Математический анализ

Лекция 2

Лектор: Михайлов Ю. А.

Кафедра 812 «Математика»

2 семестр

Раздел 1. Определенный интеграл.

Раздел 2. Ряды.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Раздел 4. Кратные интегралы.

Определенный интеграл

- Замена переменной в определенном интеграле.
- Интегрирование по частям в определенном интеграле.
- Приложения определенного интеграла.

Замена переменной

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и отображает $[\alpha;\beta]$ на $[a;b]$, причем $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

- **Доказательство.** Пусть $\Phi(x)$ –какая-то первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)d\varphi(t) =$$

$$= \Phi\big(\varphi(t)\big)\Big|_\alpha^\beta = \Phi\big(\varphi(\beta)\big) - \Phi\big(\varphi(\alpha)\big) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a), \text{ч. т. д.}$$

•

Пример 1

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \end{bmatrix}; dx = 2tdt \Bigg] = \int_1^2 \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_1^2 = 2\big(2 - \operatorname{arctg} 2 - (1 - \operatorname{arctg} 1)\big) =$$

$$= 2\left(1 - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

• Пример 2

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left[\begin{matrix} x = 2\sin t \\ t = \arcsin\frac{x}{2};\ dx = 2\cos t\, dt \end{matrix} \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \pi.$$

Интегрирование по частям

- **Теорема.** Пусть функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$.

  Тогда

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

  или в дифференциалах

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,.$$

- **Доказательство.** Проинтегрируем на $[a; b]$ очевидное равенство $uv' = (uv)' - u'v$,

тогда

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'vdx\,,$$

где

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\,\Big|_a^b$$

(по формуле Ньютона-Лейбница), ч.т.д.

- # Пример 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x \, dx = \left[\begin{matrix} u = x \\ u' = 1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} v' = \sin 2x \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right] =$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

-

Пример 4

$$\int_0^4 \sqrt{9+x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} u = \sqrt{9+x^2} & \\ u' = \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} & ; v = x \end{matrix}\right]$$

$$= x\sqrt{9+x^2}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx =$$

$$= 20 - \int_0^4 \frac{x^2+9-9}{\sqrt{9+x^2}}\,dx =$$

•

$$= 20 + 9\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} - \int_0^4 \sqrt{9+x^2}\,dx =$$

$$= 20 + 9\ln\left|x + \sqrt{9+x^2}\right|\Big|_0^4 - \int_0^4 \sqrt{9+x^2}\,dx =$$

$$= 20 + 9\ln 3 - \int_0^4 \sqrt{9+x^2}\,dx$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{F} - \mathrm{I};\ 2\mathrm{I} = \mathrm{F};\ \mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{F} = \frac{1}{2}(20 + 9\ln 3).$$

Приложения определенного интеграла

- Площадь плоской фигуры.
- Длина дуги кривой.
- Объем тела вращения.
- Площадь поверхности вращения.
- Физические приложения.

Площадь плоской фигуры

а). В декартовых координатах.

Пусть плоская область

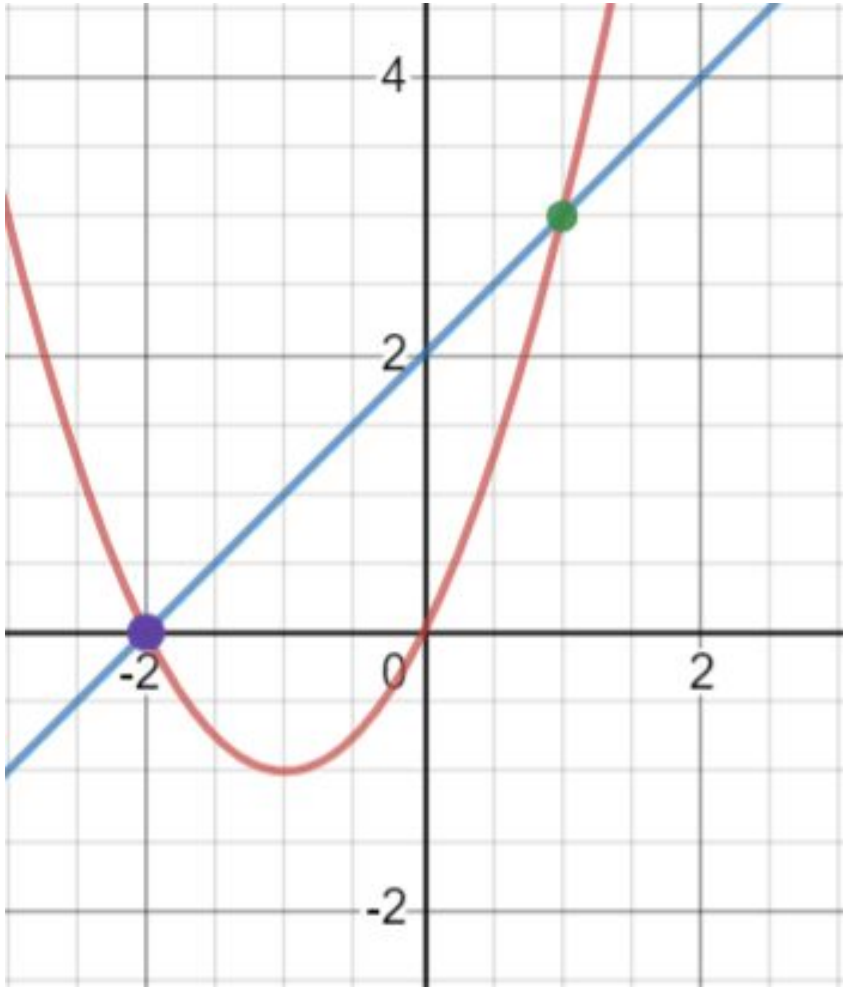
$$D = \{(x, y): a \le x \le b, \qquad f_1(x) \le y \le f_2(x)\}.$$

Тогда ее площадь равна

$$S(D) = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$$

Пример 5

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.



- Найдем точки пересечения: $x^2 + 2x = x + 2$;

$x^2 + x - 2 = 0, x_1 = -2, x_2 = 1$

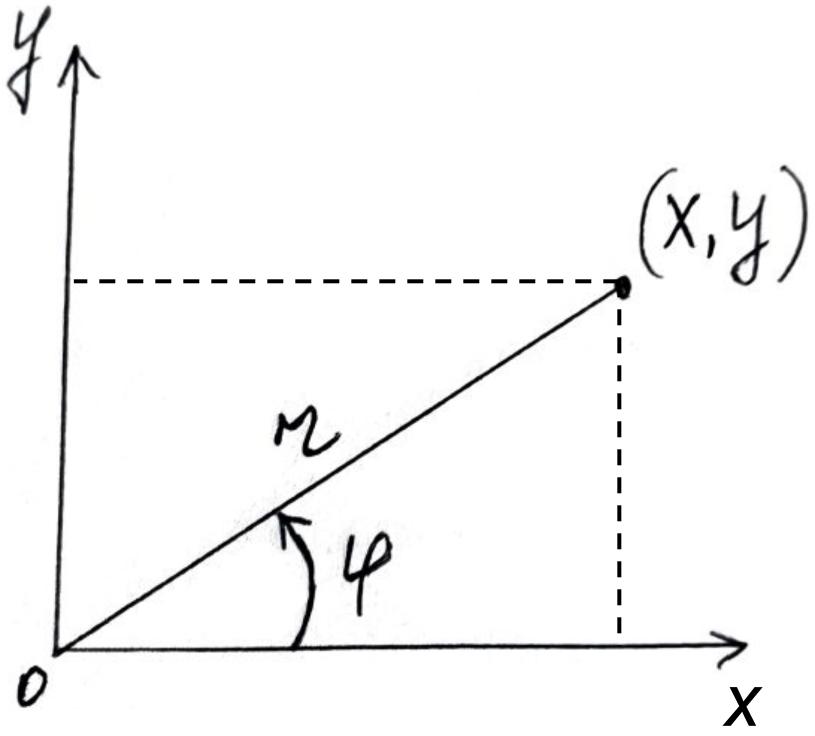
$$S = \int_{-2}^{1} \left(x + 2 - (x^2 + 2x)\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2}.$$

б). В полярных координатах.

(r, φ) –полярные координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

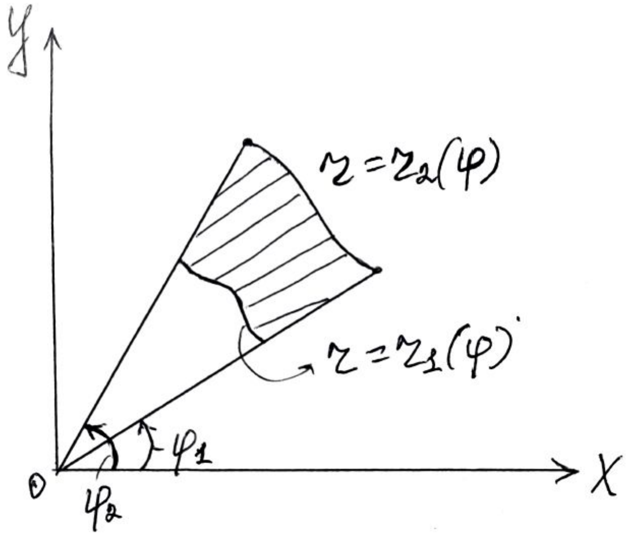


Пусть плоская область задана в полярных координатах

$$D = \{(r, \varphi): \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}.$$

Тогда $$S(D) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right) d\varphi\,.$$

Эта формула далее будет простым следствием свойства двойного интеграла.



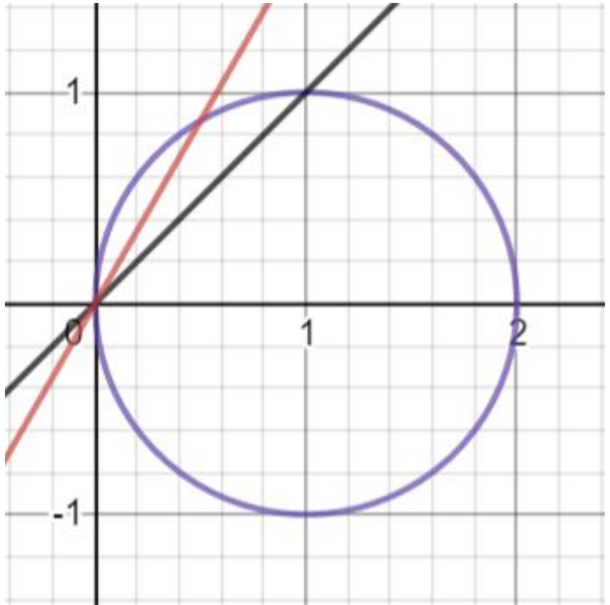
Пример 6

- Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ и прямыми $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$.

Уравнение окружности в полярных координатах:

$r^2 = 2r\cos\varphi$; $r = 2\cos\varphi$, а прямых $y = x$;

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; $y = x\sqrt{3}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;



- $$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right).$$

• **в). В параметрических координатах.**

Если плоская фигура ограничена кривой

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямыми $x = a, x = b$ и осью $0x$,

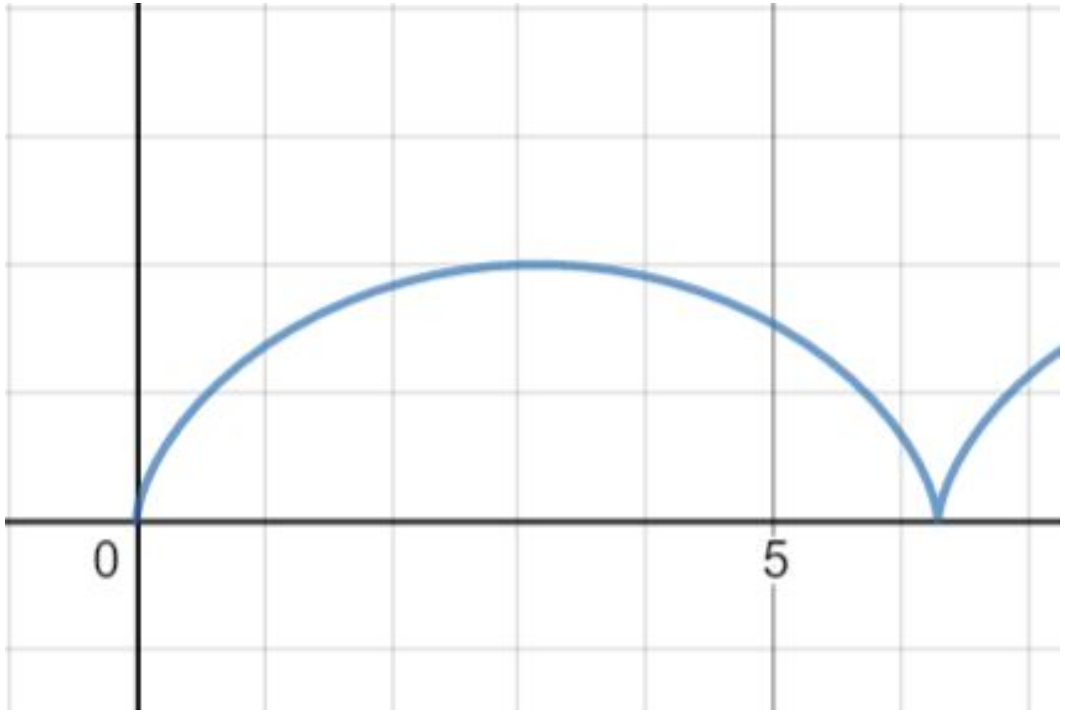
где $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$ и

$y(t) \geq 0$ на $[t_1; t_2]$, то её площадь равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Пример 7

- Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox: $t_1 = 0, t_2 = 2\pi$



- $$S = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t) \cdot 2(1 - \cos t)dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (3 - 4\cos t + \cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(3t - 4\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

Длина дуги кривой

а). В декартовых координатах.

Если кривая задана уравнением

$$y = f(x), x \in [a; b],$$

то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Пример 8

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$$

между точками ее пересечения с осью Ox.

$y = 0$ при $x_1 = 0, x_2 = 3;$

$$y' = \frac{1}{3}(3\sqrt{x} - x\sqrt{x})' = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{\sqrt{x}}$$

- $$l=\int_0^3 \sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{4x}}\,dx=$$

$$=\int_0^3 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^3=$$

$$=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}.$$

б). В полярных координатах.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$,

то ее длина равна

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

•

Пример 9

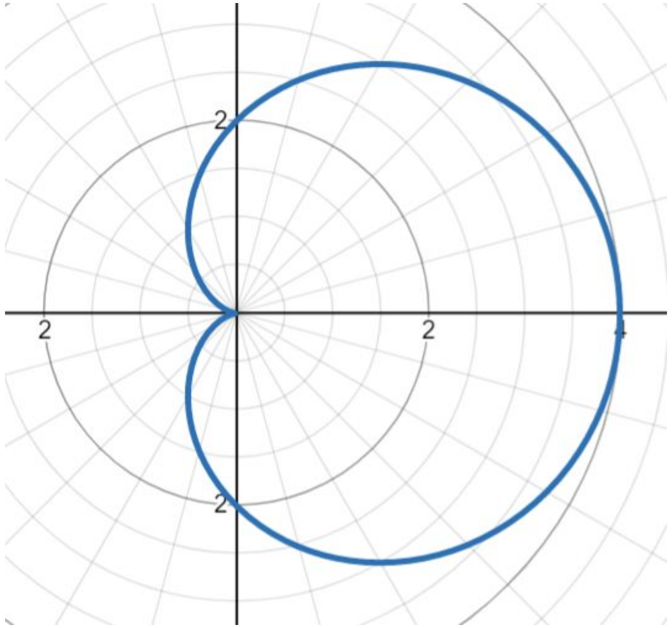
Найти длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi =$$

$$= a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= a^2(2 + 2\cos\varphi) =$$

$$= 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$



-

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 4a(1 + 1) = 8a.$$

в). В параметрических координатах.

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1; t_2],$$

то ее длина равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + (y'(t))^2} dt$$

•

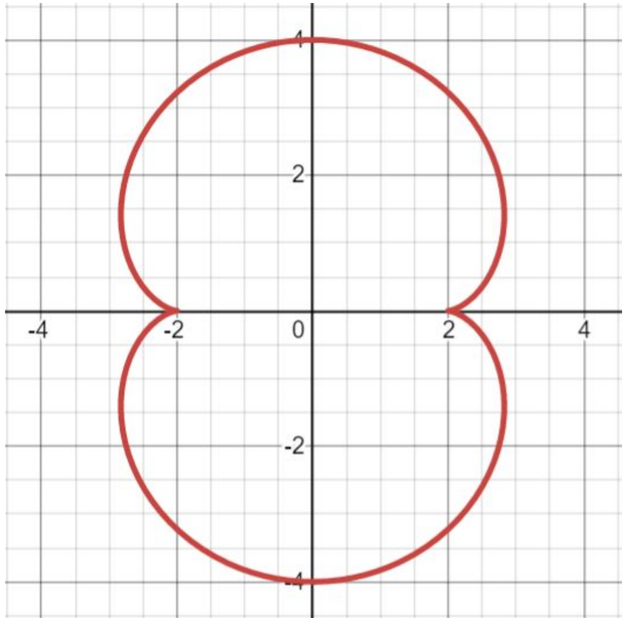
Пример 10

Найти длину дуги кривой

x$= a(3\cos t \ - \cos 3t)$,

$y = a(3\sin t \ - \sin 3t)$

от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$ $(a > 0)$.



$$(x')^2 + (y')^2 =$$

$$= a^2(-3\sin t + 3\sin 3t)^2 + a^2(3\cos t - 3\cos 3t)^2 =$$

$$= 9a^2(\sin^2 t - 3\sin t \sin 3t + \sin^2 3t + \cos^2 t -$$

$$- 2\cos t \cos 3t + \cos^2 3t) =$$

$$= 9a^2\big(2 - 2(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t)\big) =$$

$$= 18a^2(1 - \cos 2t) = 36a^2\cos^2 t$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36a^2\cos^2 t}\, dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt =$$

$$= 6a \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

Объем тела вращения

Если трехмерная область получается вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, то ее объем равен

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример 11

Найти объем эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}-\left(-a+\frac{a}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}\pi a b^2.$$

•

Площадь поверхности вращения

Пусть поверхность получена вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x), x \in [a; b]$. Тогда ее площадь равна

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

- Для полярных или параметрических координат формулы аналогичны:

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$$

и

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

•

Пример 12

Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$.

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{3}x^3\right| \sqrt{1 + x^4}\, dx =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_{0}^{1} x^3 \sqrt{1 + x^4}\, dx = [1 + x^4 = t;\ 4x^3 dx = dt] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_{1}^{2} \sqrt{t} \frac{dt}{4} = \frac{\frac{\pi}{3} t^{\frac{3}{2}}}{3} \cdot 2 \Big|_{1}^{2} = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2} - 1)$$

Физические приложения определенного интеграла

- Масса кривой
- Центр масс кривой
- Статические моменты кривой
- Суммарный электрический заряд кривой
- Момент инерции однородного тела вращения