

Математический анализ

Лекция 2

Лектор: Михайлов Ю. А.

Кафедра 812 «Математика»

2 семестр

Раздел 1. Определенный интеграл.

Раздел 2. Ряды.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Раздел 4. Кратные интегралы.

Определенный интеграл

- Замена переменной в определенном интеграле.
- Интегрирование по частям в определенном интеграле.
- Приложения определенного интеграла.

Замена переменной

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha; \beta]$ и отображает $[\alpha; \beta]$ на $[a; b]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

• **Доказательство.** Пусть $\Phi(x)$ –какая-то первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a);$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))d\varphi(t) = \\ &= \Phi(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \\ &= \Phi(b) - \Phi(a), \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Пример 1

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2; dx = 2t dt \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 2(t - \operatorname{arctg} t) \Big|_1^2 = 2(2 - \operatorname{arctg} 2 - (1 - \operatorname{arctg} 1)) =$$

$$= 2 \left(1 - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Пример 2

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ t = \arcsin \frac{x}{2}; dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) = \pi.$$

Интегрирование по частям

- **Теорема.** Пусть функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$.

Тогда

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

или в дифференциалах

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

• **Доказательство.** Проинтегрируем на $[a; b]$ очевидное равенство $uv' = (uv)' - u'v$,

тогда

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b u'v dx,$$

где

$$\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$$

(по формуле Ньютона-Лейбница), ч.т.д.

Пример 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin 2x \\ u' = 1; \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4

$$\int_0^4 \sqrt{9+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{9+x^2} \\ u' = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} ; v = x \end{array} \right]$$

$$= x\sqrt{9+x^2} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx =$$

$$= 20 - \int_0^4 \frac{x^2 + 9 - 9}{\sqrt{9+x^2}} dx =$$

$$= 20 + 9 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} - \int_0^4 \sqrt{9+x^2} dx =$$

$$= 20 + 9 \ln \left| x + \sqrt{9+x^2} \right| \Big|_0^4 - \int_0^4 \sqrt{9+x^2} dx =$$

$$= 20 + 9 \ln 3 - \int_0^4 \sqrt{9+x^2} dx$$

$$I = F - I; 2I = F; I = \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} (20 + 9 \ln 3).$$

Приложения определенного интеграла

- Площадь плоской фигуры.
- Длина дуги кривой.
- Объем тела вращения.
- Площадь поверхности вращения.
- Физические приложения.

Площадь плоской фигуры

а). В декартовых координатах.

Пусть плоская область

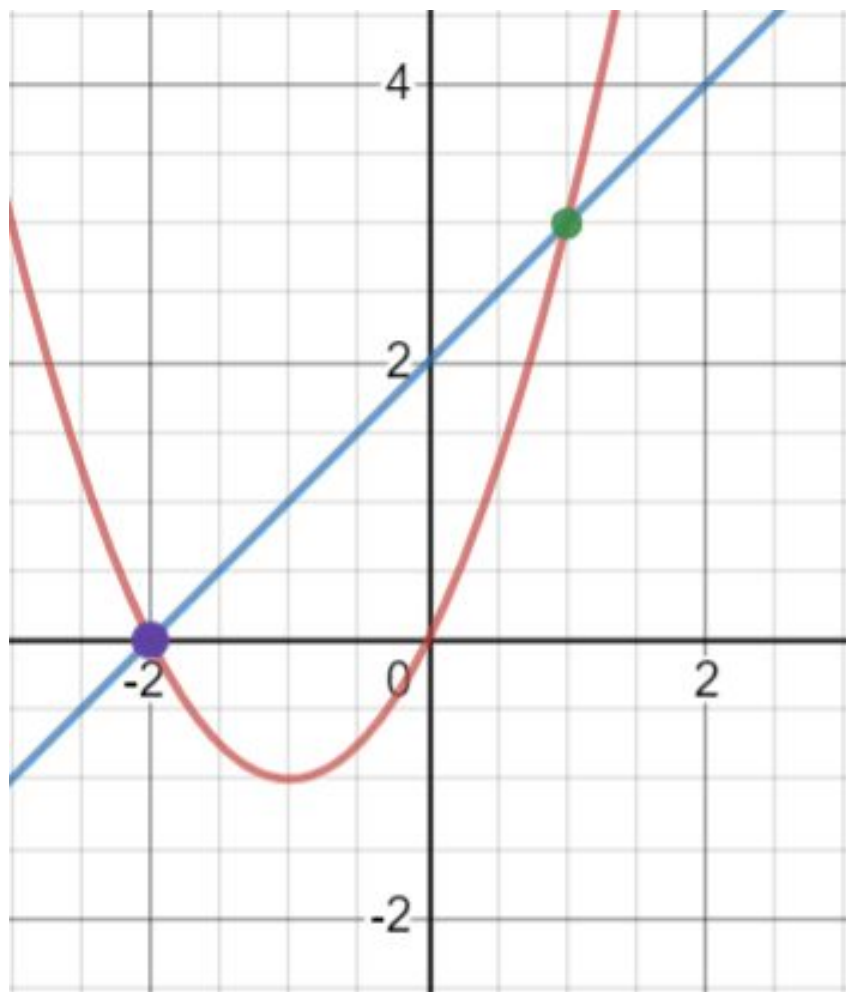
$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Тогда ее площадь равна

$$S(D) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

Пример 5

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.



Найдем точки пересечения: $x^2 + 2x = x + 2$;

$$x^2 + x - 2 = 0, x_1 = -2, x_2 = 1$$

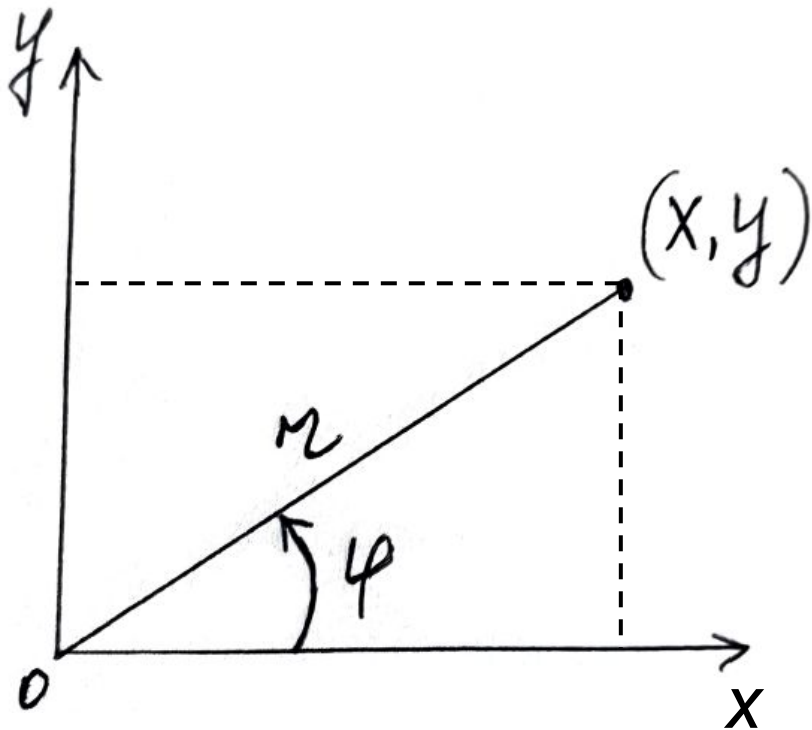
$$S = \int_{-2}^1 (x + 2 - (x^2 + 2x)) dx =$$

$$= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{9}{2}.$$

б). В полярных координатах.

(r, φ) – полярные координаты:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

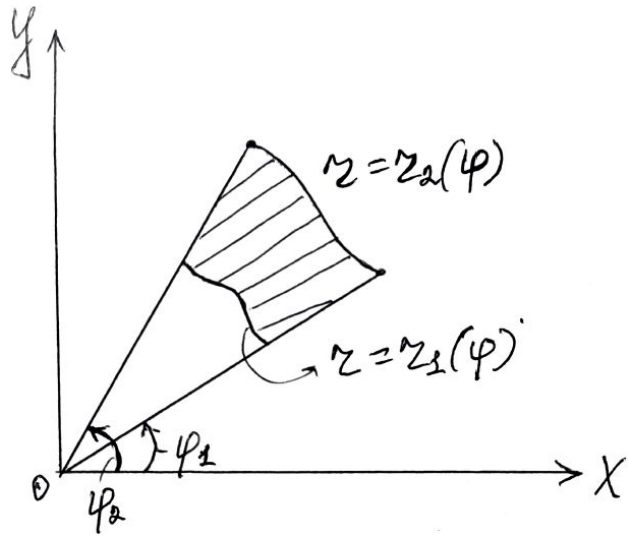


Пусть плоская область задана в полярных координатах

$$D = \{(r, \varphi): \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

$$\text{Тогда } S(D) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

Эта формула далее будет простым следствием свойства двойного интеграла.



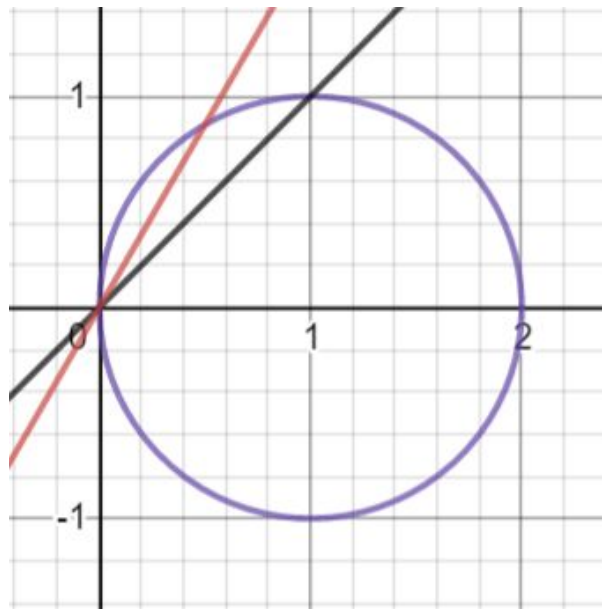
Пример 6

Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ и прямыми $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$.

Уравнение окружности в полярных координатах:

$$r^2 = 2r \cos \varphi; r = 2 \cos \varphi, \text{ а прямых } y = x;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}; y = x\sqrt{3}; \varphi = \frac{\pi}{3};$$



•

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right).$$

в). В параметрических координатах.

Если плоская фигура ограничена кривой

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox ,

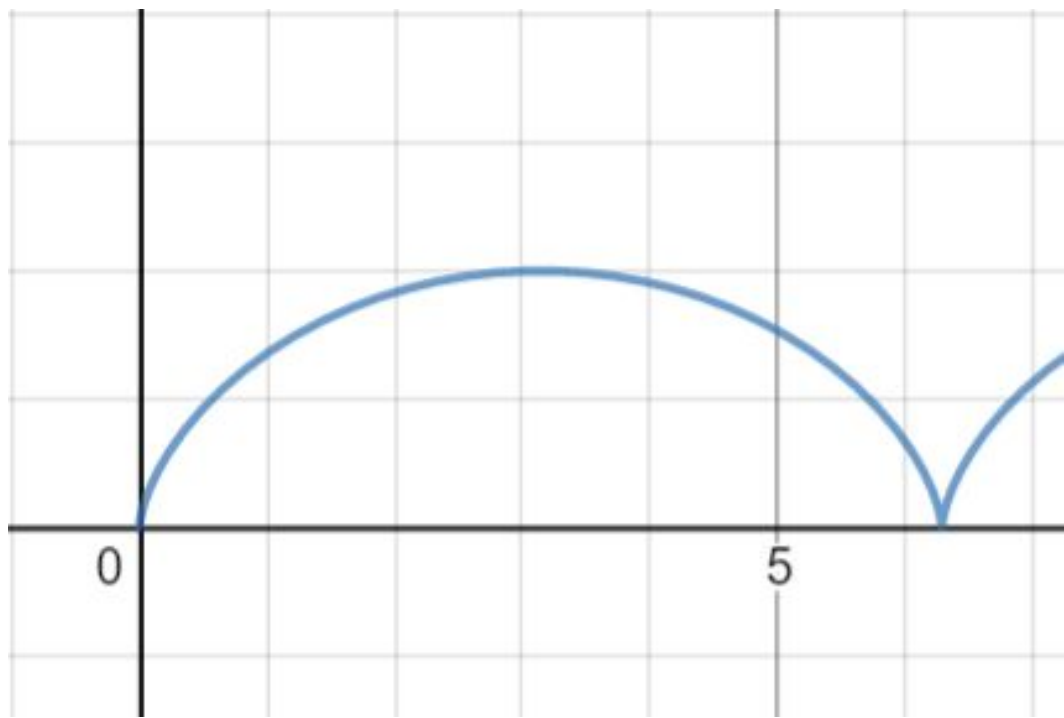
где $a = x(t_1), b = x(t_2)$ и

$y(t) \geq 0$ на $[t_1; t_2]$, то её площадь равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Пример 7

Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$,
 $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox : $t_1 = 0, t_2 = 2\pi$



- $$S = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t) \cdot 2(1 - \cos t) dt =$$
$$= 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$
$$= 4 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$
$$= 2 \int_0^{2\pi} (3 - 4 \cos t + \cos 2t) dt =$$
$$= 2 \left(3t - 4 \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

• Длина дуги кривой

а). В декартовых координатах.

Если кривая задана уравнением

$$y = f(x), x \in [a; b],$$

то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример 8

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$$

между точками ее пересечения с осью Ox .

$$y = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = 3;$$

$$y' = \frac{1}{3}(3\sqrt{x} - x\sqrt{x})' = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1 - 2x + x^2}{4x}} dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{x} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

б). В полярных координатах.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2],$$

то ее длина равна

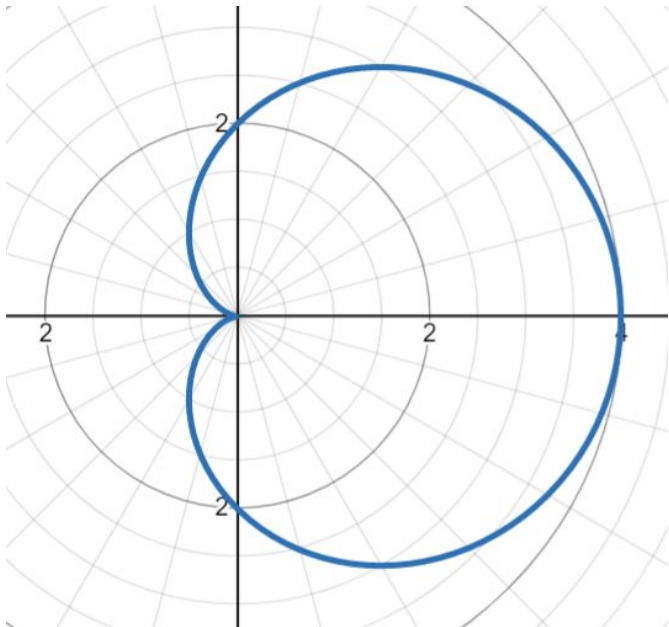
$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Пример 9

Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi = \\ &= a^2(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= a^2(2 + 2 \cos \varphi) = \end{aligned}$$

$$= 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$



$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 4a(1 + 1) = 8a.$$

в). В параметрических координатах.

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1; t_2],$$

то ее длина равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

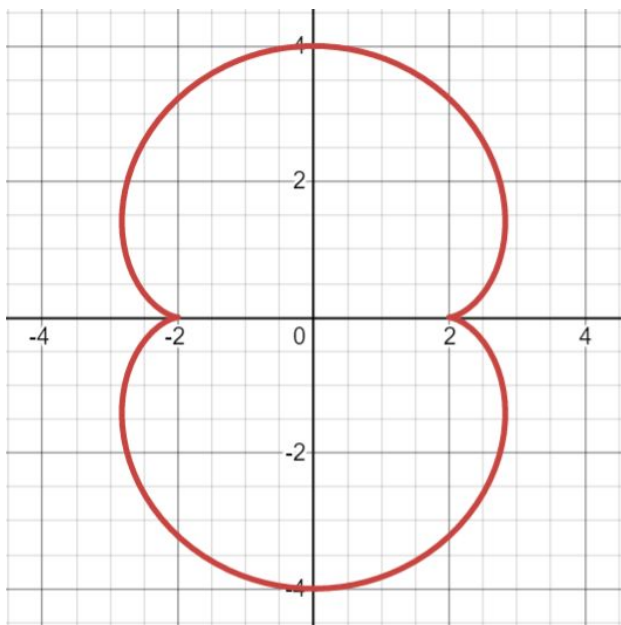
Пример 10

Найти длину дуги кривой

$$x = a(3 \cos t - \cos 3t),$$

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$).



$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 &= \\ &= a^2(-3 \sin t + 3 \sin 3t)^2 + a^2(3 \cos t - 3 \cos 3t)^2 = \\ &= 9a^2(\sin^2 t - 3 \sin t \sin 3t + \sin^2 3t + \cos^2 t - \\ &\quad - 2 \cos t \cos 3t + \cos^2 3t) = \\ &= 9a^2(2 - 2(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t)) = \\ &= 18a^2(1 - \cos 2t) = 36a^2 \cos^2 t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36a^2 \cos^2 t} dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \\ &= 6a \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.\end{aligned}$$

• Объем тела вращения

Если трехмерная область получается вращением вокруг

оси Ox криволинейной трапеции

$$\{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

то ее объем равен

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример 11

Найти объем эллипсоида вращения,
полученного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ вокруг оси } Ox$$

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \Rightarrow V = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx =$$

$$= \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a =$$

$$= \pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} - \left(-a + \frac{a}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

- # Площадь поверхности вращения

Пусть поверхность получена вращением
вокруг оси Ox дуги кривой

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Тогда ее площадь равна

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Для полярных или параметрических координат формулы аналогичны:

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

И

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Пример 12

Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{3}x^3 \right| \sqrt{1 + x^4} dx = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = [1 + x^4 = t; 4x^3 dx = dt] = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_1^2 \sqrt{t} \frac{dt}{4} = \frac{\pi}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \Big|_1^2 = \frac{2}{9} \pi (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Физические приложения определенного интеграла

- Масса кривой
- Центр масс кривой
- Статические моменты кривой
- Суммарный электрический заряд кривой
- Момент инерции однородного тела вращения