

Определение производной. Её геометрический и физический смысл

Упражнение:

● Вычислить пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x + 3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x - 8) = -13$$



$$S = S(t) \quad t = [c] \quad v = [M/c]$$

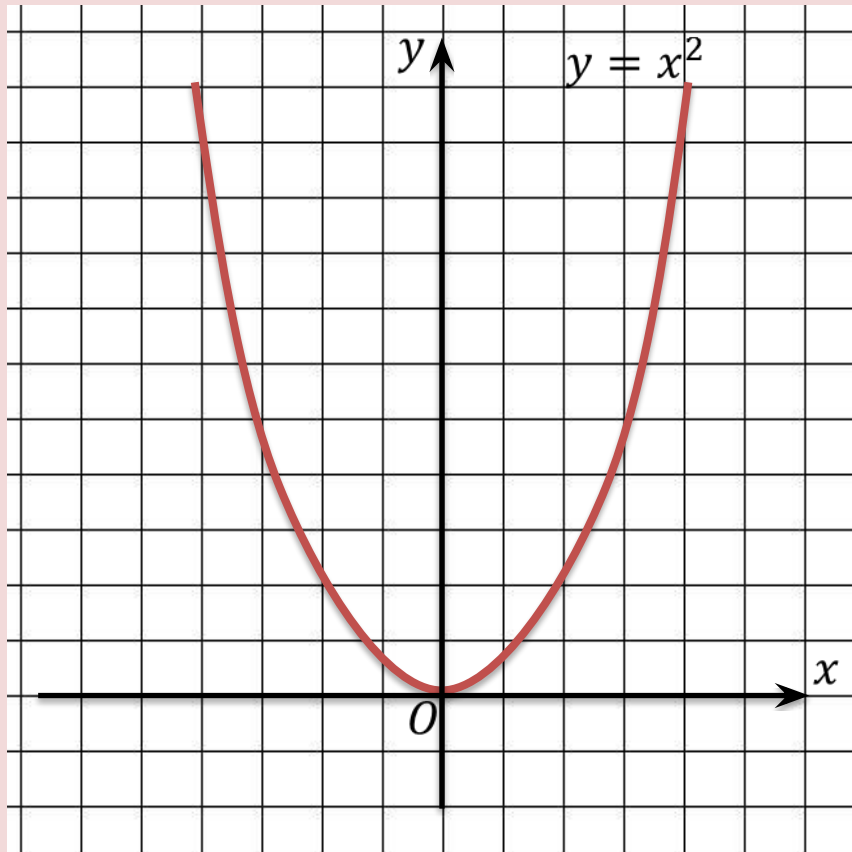
$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

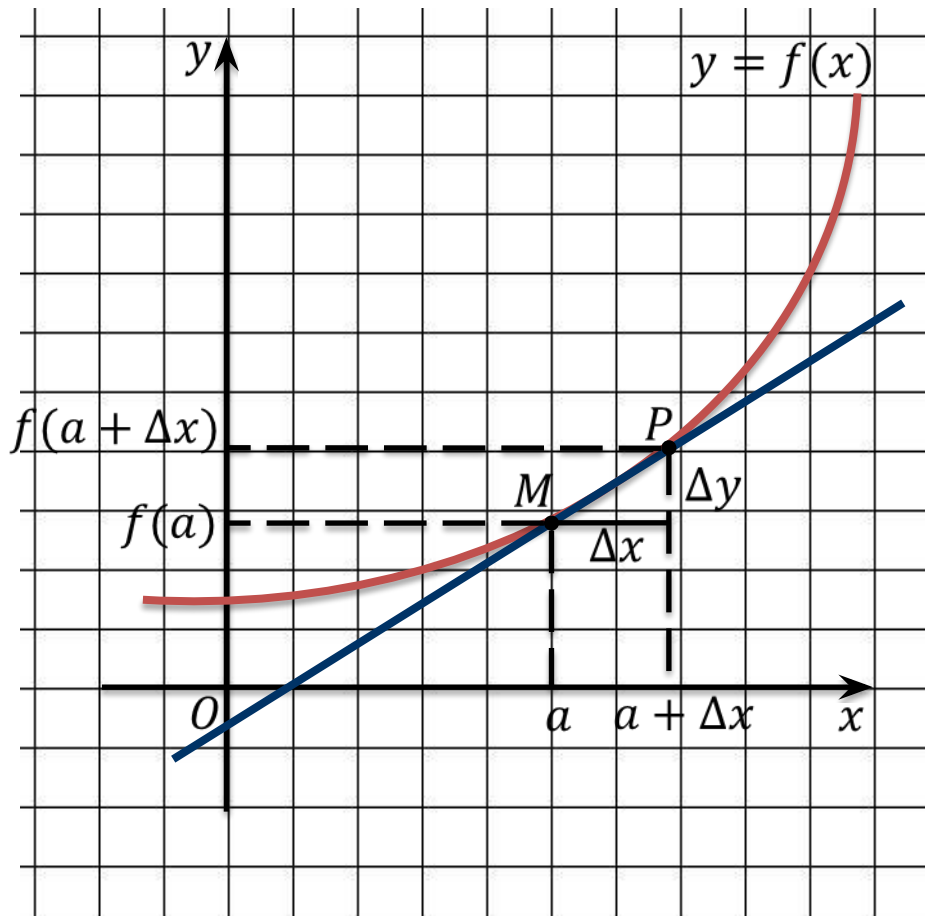
$$\left. \begin{array}{l} OM = S(t) \\ OP = S(t + \Delta t) \end{array} \right\} \Rightarrow MP = OP - OM = \quad -$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$$

$$MP = \Delta S$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

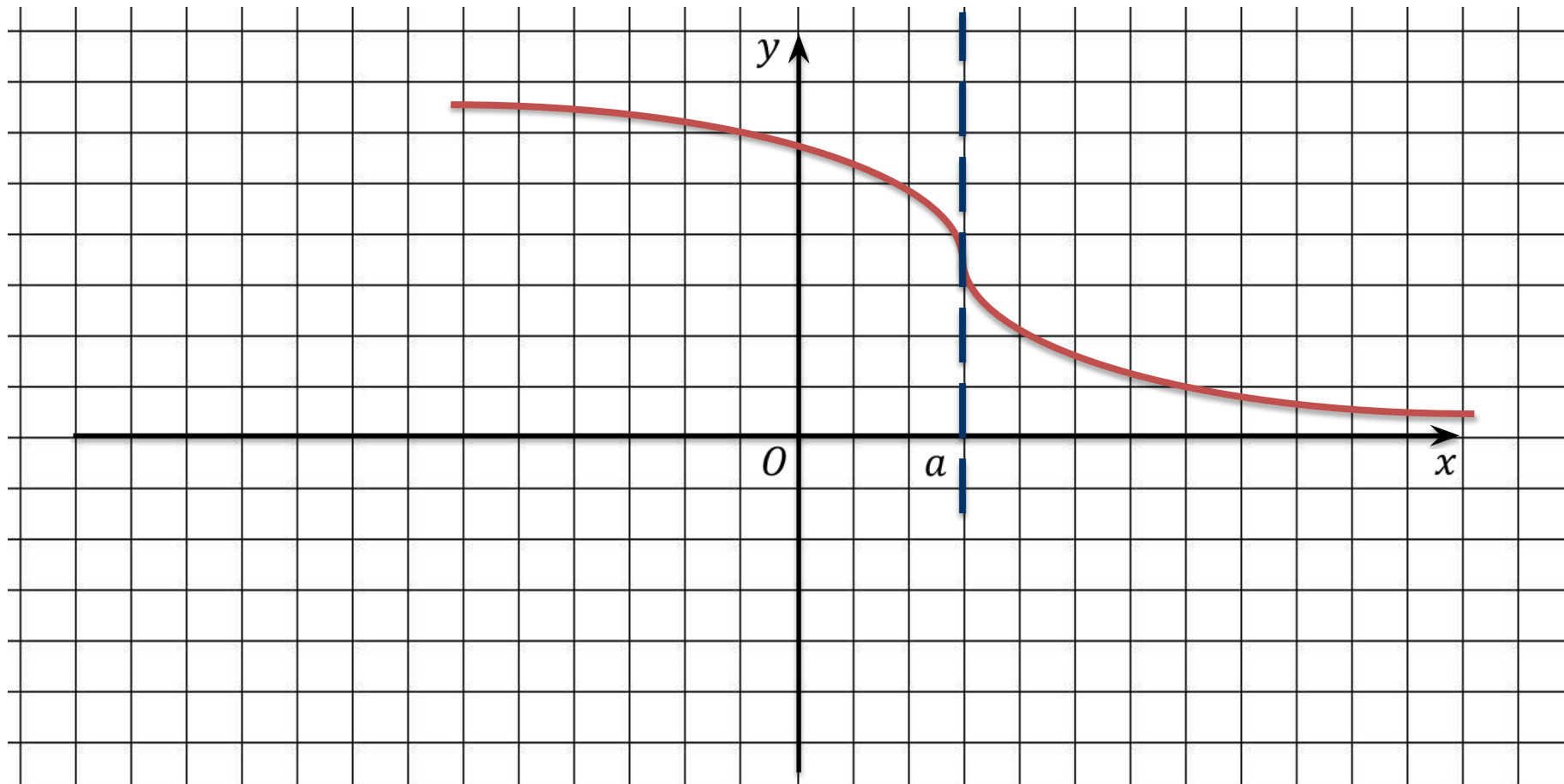




$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}}$$



$$v_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0 . Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают **$f'(x_0)$** .

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$y' = f'(x)$ – **производная функции $y = f(x)$** .

$$\left. \begin{array}{l} y = kx + m \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \end{array} \right\} \Rightarrow y' = k \Leftrightarrow (kx + m)' = k$$

$$k = 1, m = 0 \Rightarrow (1x + 0)' = (x)' = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow y' = 2x \Leftrightarrow (x^2)' = 2x$$

Физический смысл

производной:

Если $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t :

$$v(t) = s'(t)$$

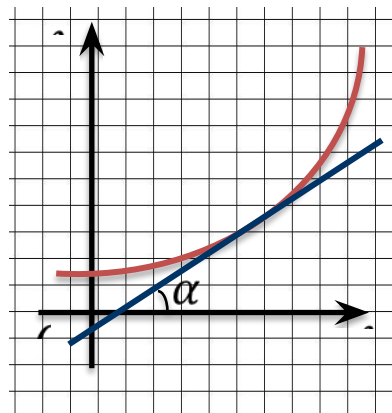
Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ выражает *скорость протекания процесса* в момент времени t .

Геометрический смысл производной:

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси OY , то $f'(a)$ выражает *угловой коэффициент касательной*:

$$k = f'(a)$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$$



Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример:

● Найти производную функции $y = C$.

Решение:

1. $f(x) = C$

2. $f(x + \Delta x) = C$

3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример:

● Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение:

$$1. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$2. f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$3. \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x(x + \Delta x))} = -\frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

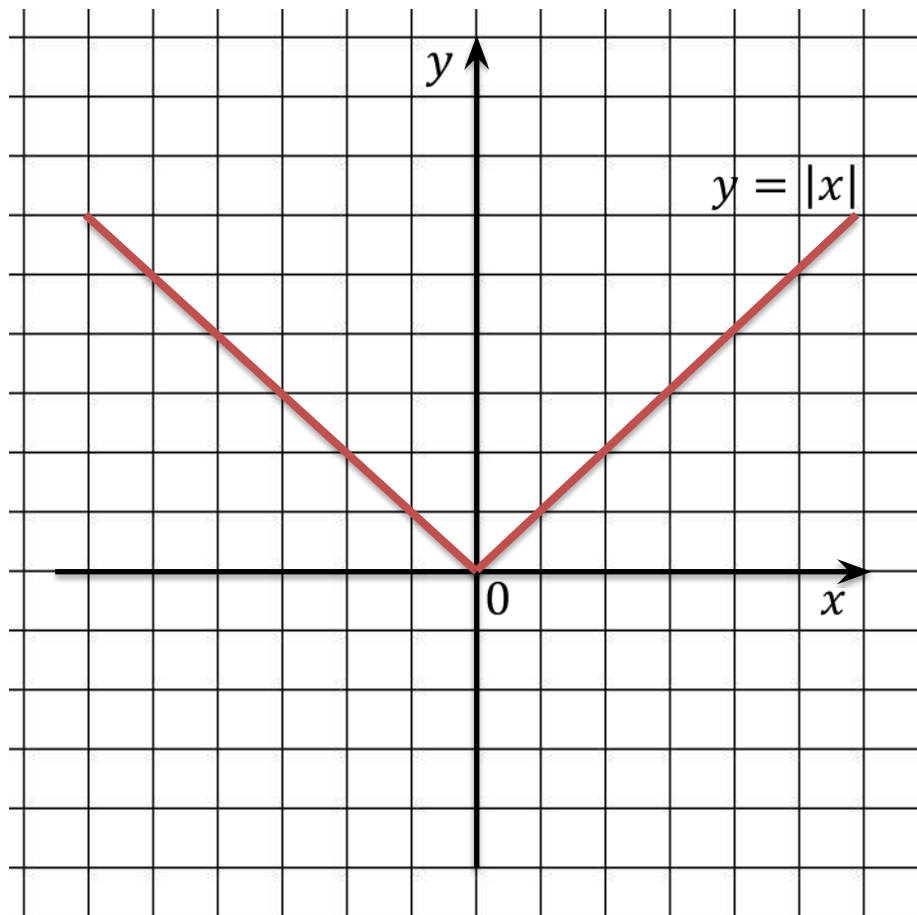
$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x , то ее называют **дифференцируемой в точке x** . Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют **дифференцированием функции $y = f(x)$** .

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x . Тогда, пользуясь геометрическим смыслом производной, в точке $M(x, f(x))$ можно провести касательную, причем, угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x)$.

В точке M не может быть разрыва, то есть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x .

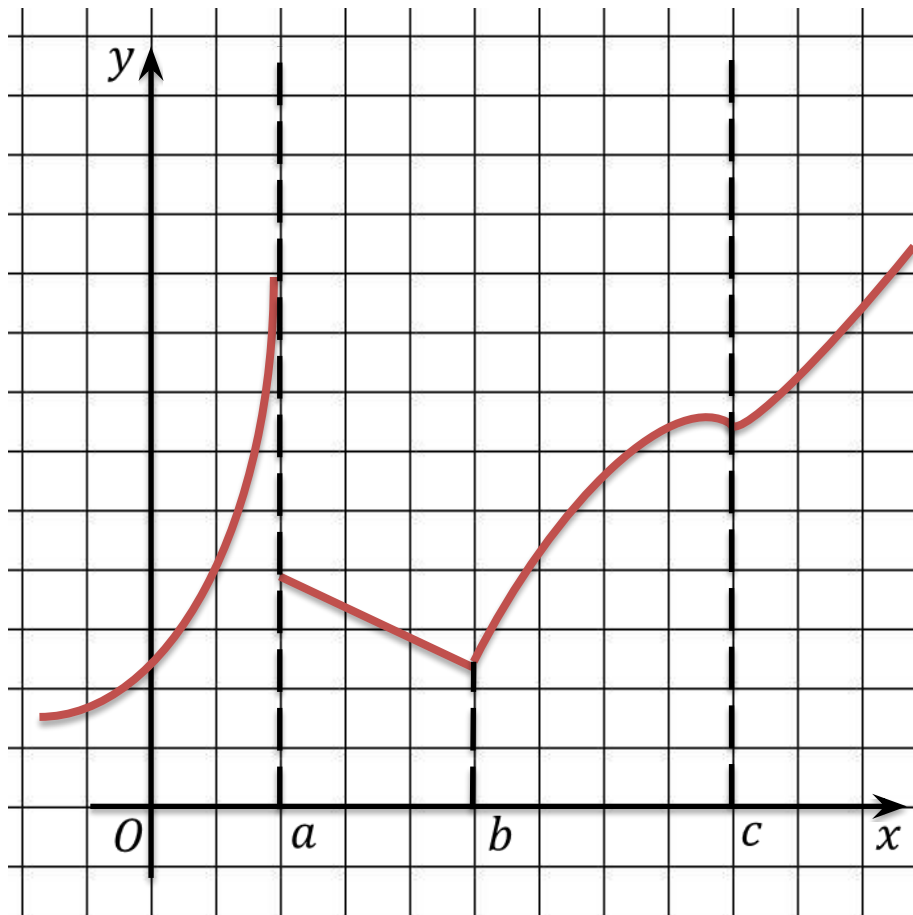
Если функция $y = f(x)$ *дифференцируема* в точке x , то она и *непрерывна* в этой точке.



Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке *не существует производная*.

Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке *функция дифференцируема*.

Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке *функция недифференцируема*.



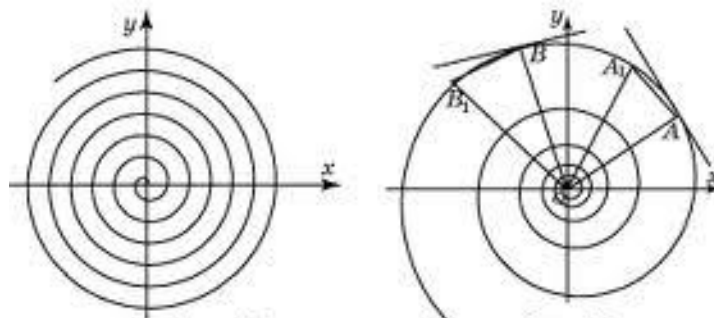
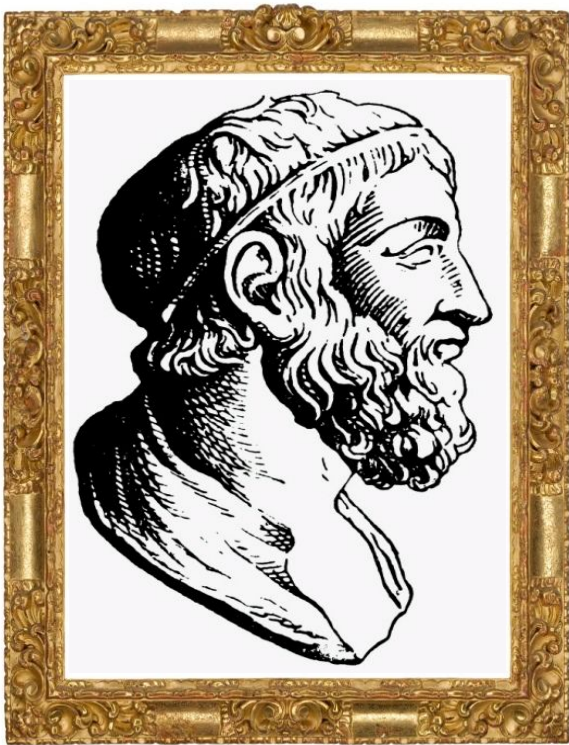
В точке a касательной к графику функции не существует.

В точке b касательной к графику функции не существует.

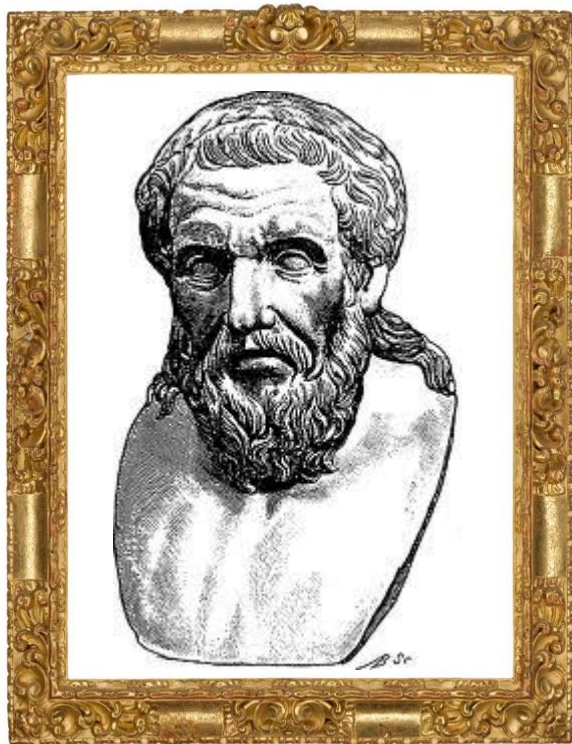
В точке c касательная к графику функции параллельна оси OY .

Раздел математики который изучает производные функции и их применения, называется **дифференциальным исчислением**.

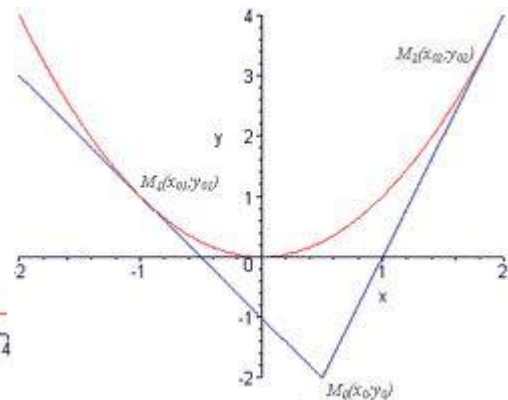
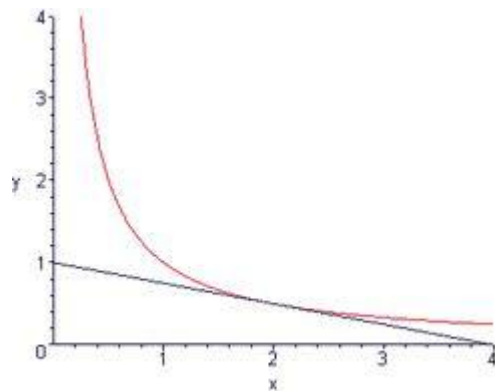
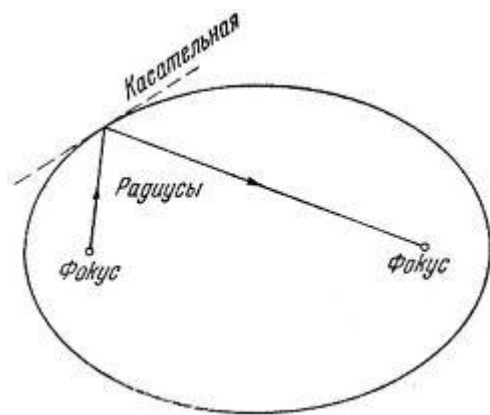
Это исчисление возникло из решений задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функции.



Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.)

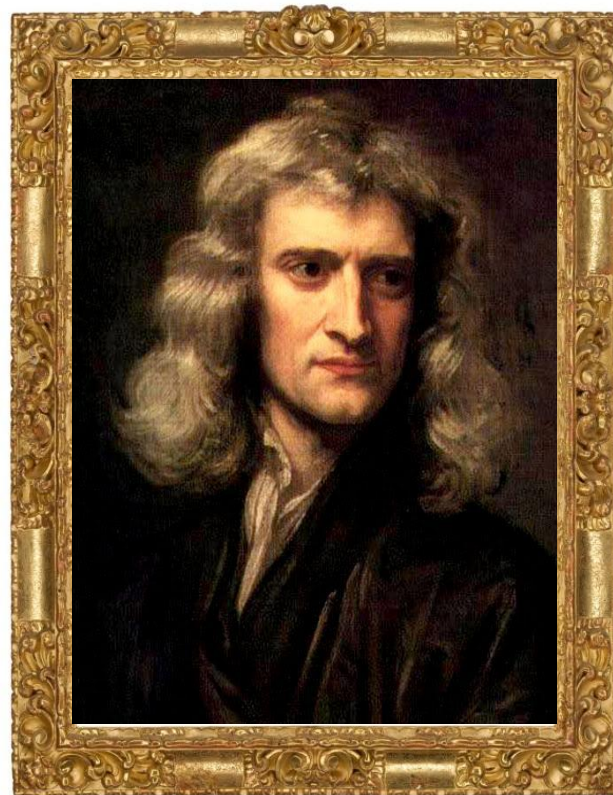


Аполлоний Пергский
(ок. 262 – 190 до н.э.)





Пьер Ферма (1601 – 1665 гг.)



Исаак Ньютон (1642 – 1727 гг.)



Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646 – 1716 гг.)

Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц в 1684 году опубликовал первую статью по дифференциальному исчислению, в которой были изложены основные правила дифференцирования.



Жозеф Луи Лагранж
1736 – 1813

Термин «производная» впервые встречается у француза Луи Арбогаста. Этим термином стал пользоваться Лагранж, который и ввел обозначения y' и $f'(x)$.