

Техническая механика

Раздел «Теоретическая механика»

Лекция № 3

Центр тяжести тела

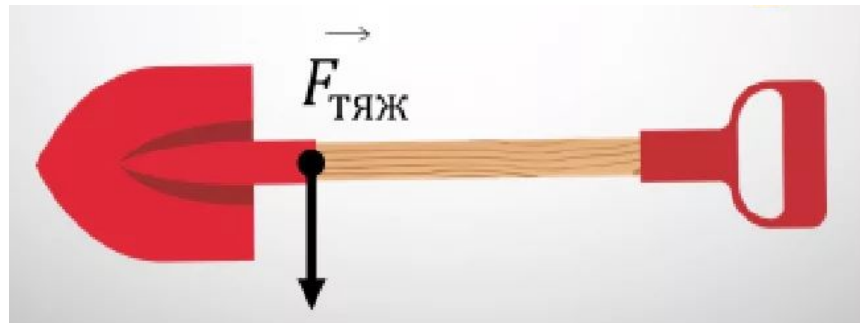


Цель: изучение способов определения центра тяжести твердого тела.

План

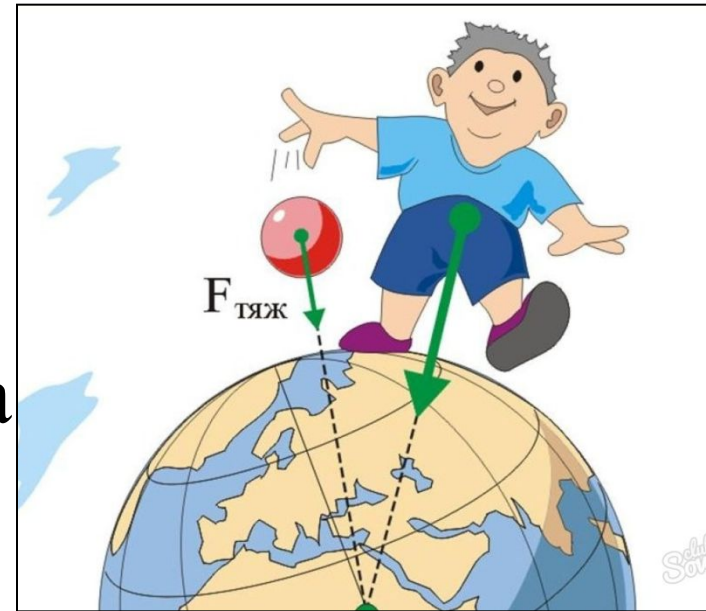
1. Понятие центра тяжести твердого тела.
2. Примеры вычисления координат центра тяжести тела.

1. Определение центра тяжести тела

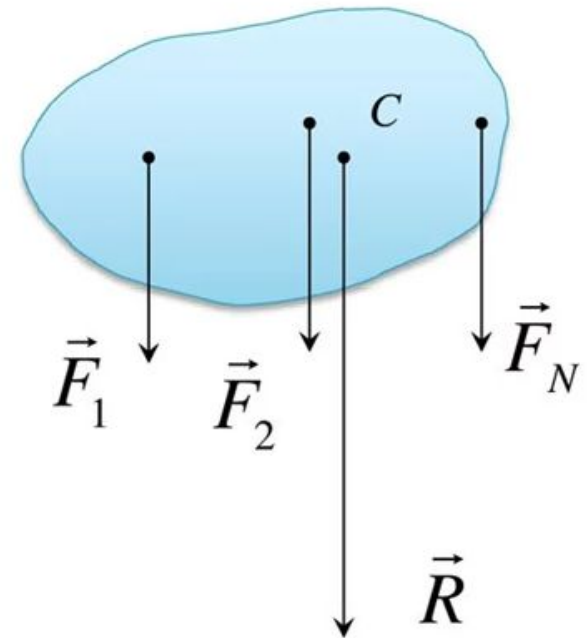
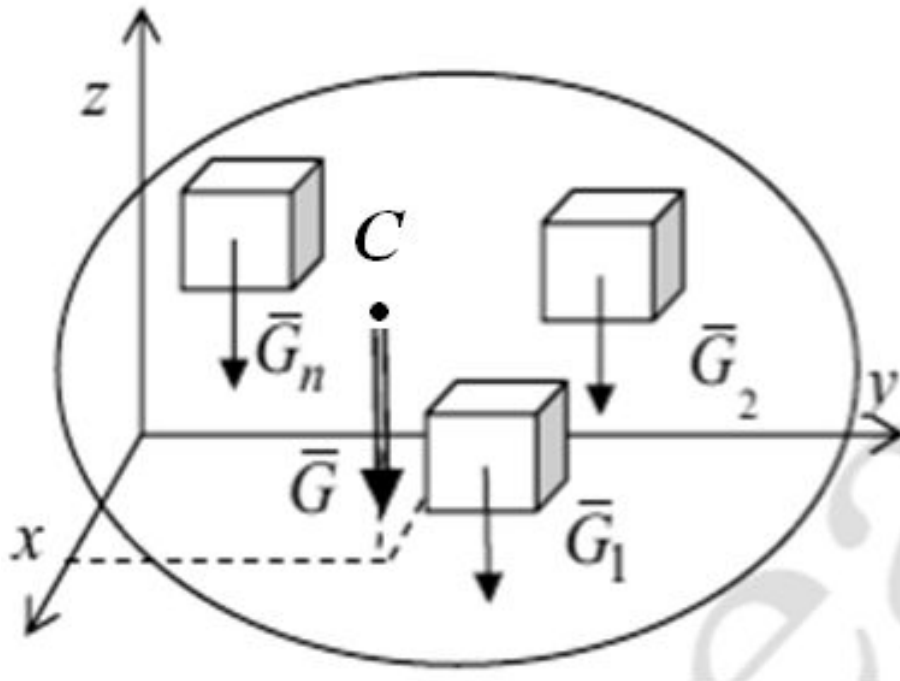


По закону всемирного тяготения на все частицы тела, находящегося вблизи земной поверхности, действуют силы притяжения их к Земле, т.е. силы их тяжести.

Центр тяжести тела есть такая, неизменно связанная с этим телом, точка, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом положении тела в пространстве.



Центром тяжести (ЦТ) твердого тела называется геометрическая точка, жестко связанная с этим телом, и являющаяся центром параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частицам тела. **C** - обозначение ЦТ

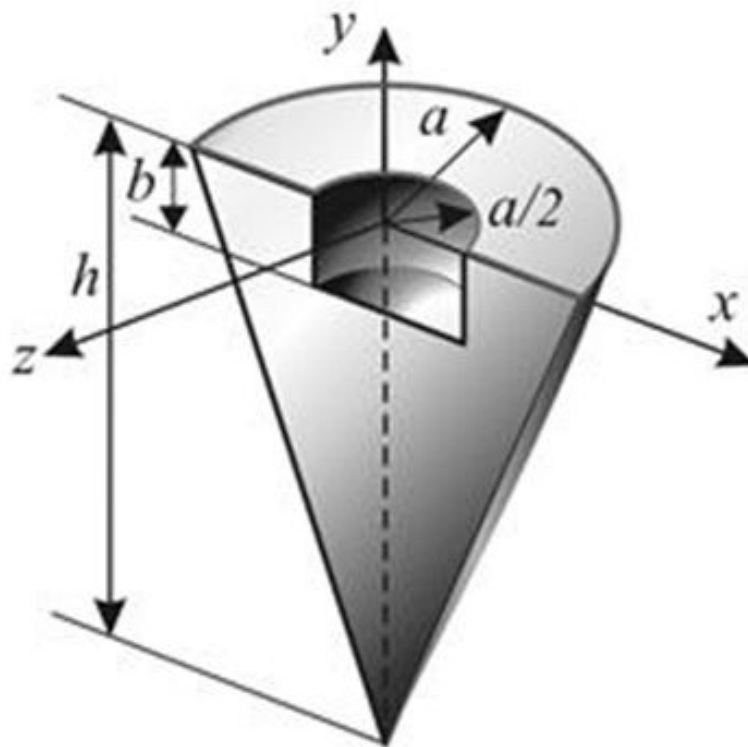


Координаты ЦТ однородного объемного тела:

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V}$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}$$

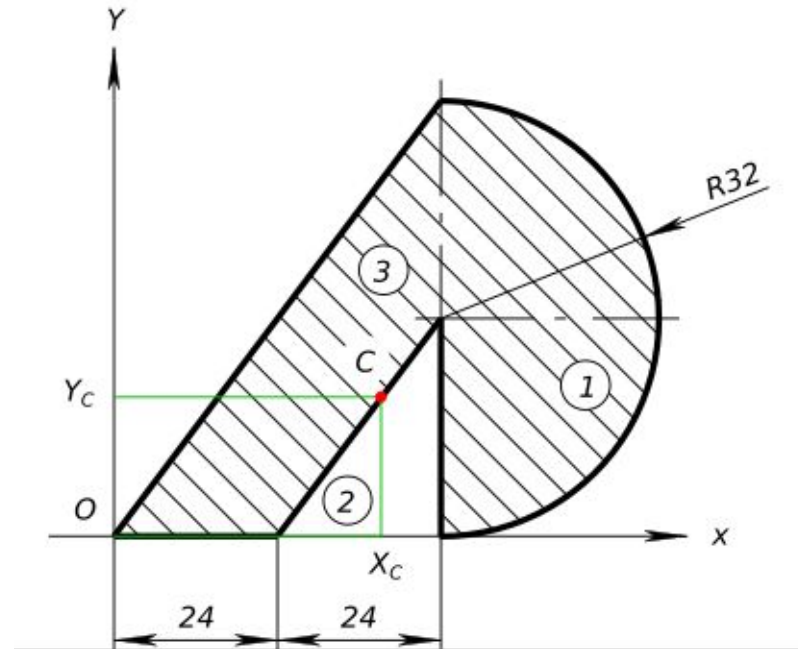
$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$



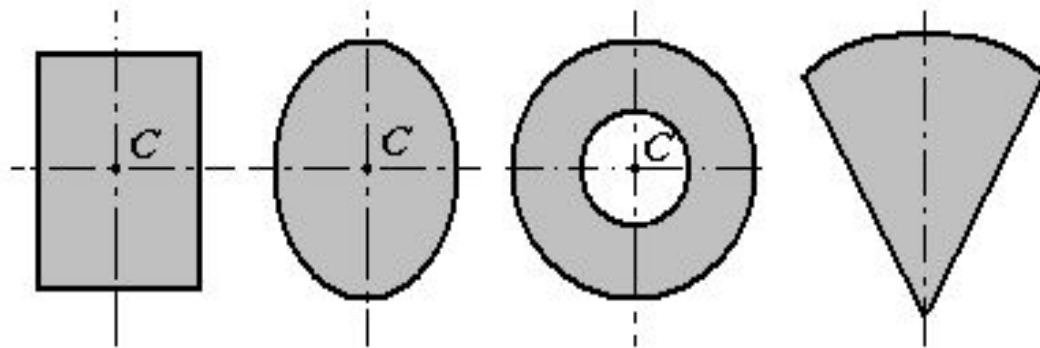
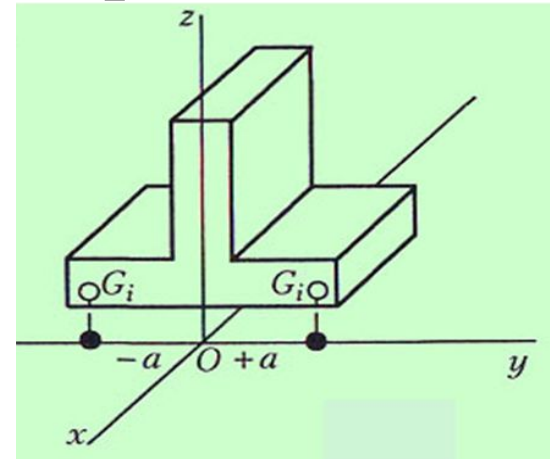
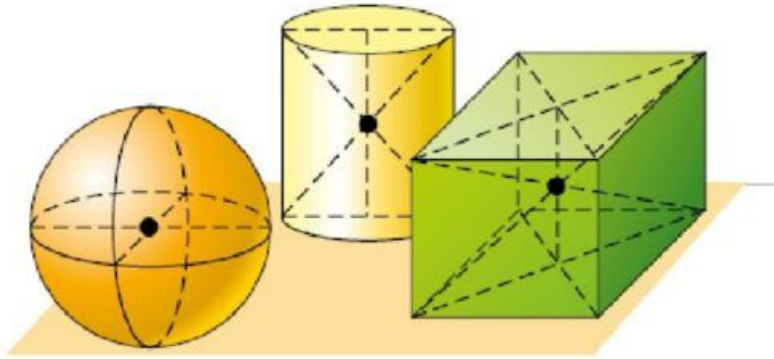
Координаты ЦТ плоского тела:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}$$

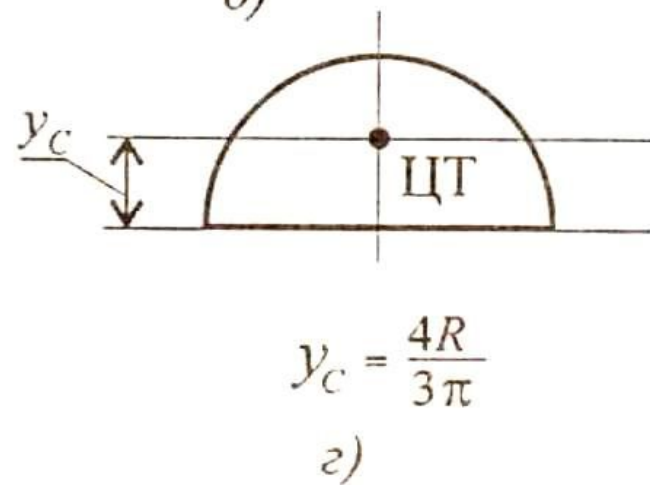
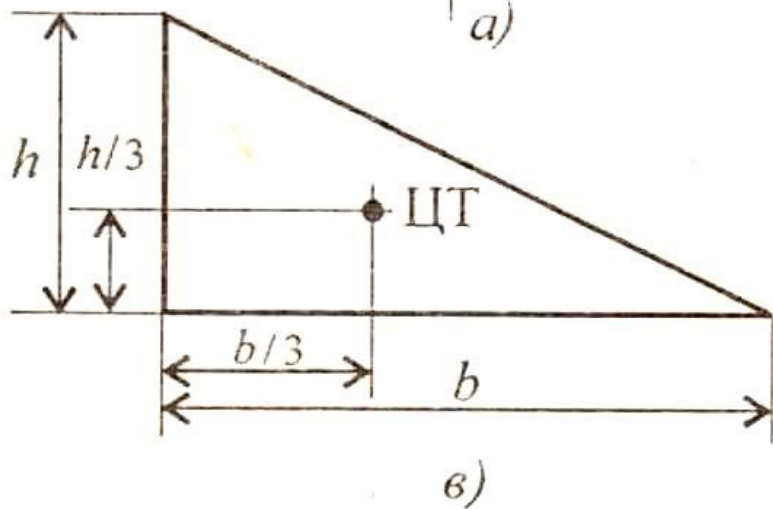
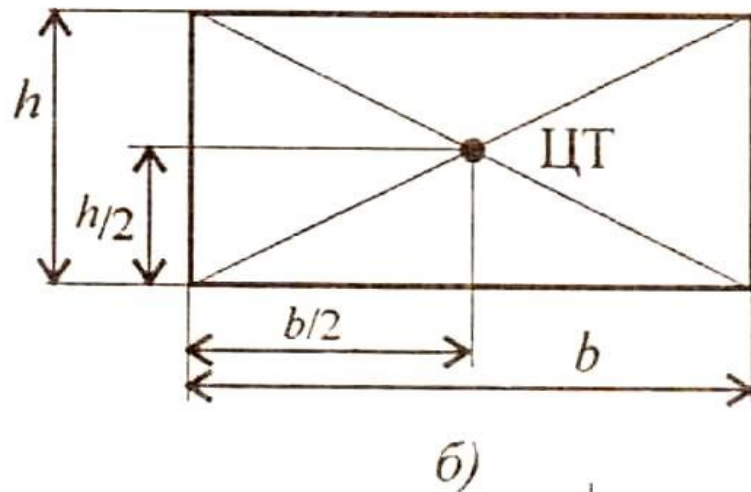
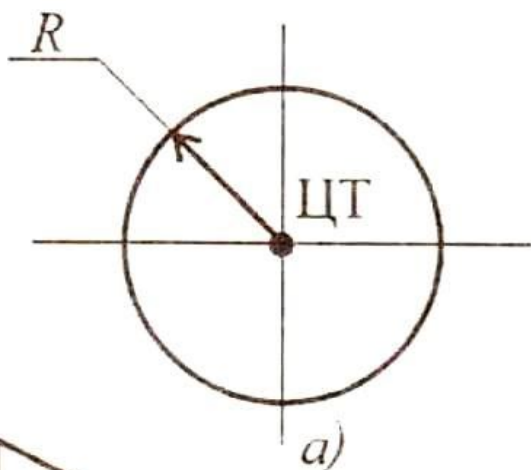
$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}$$



Если однородное тело **симметричное** (имеет плоскость, ось или центр симметрии), то его ЦТ находится в центре симметрии или на плоскости симметрии, или на оси симметрии.



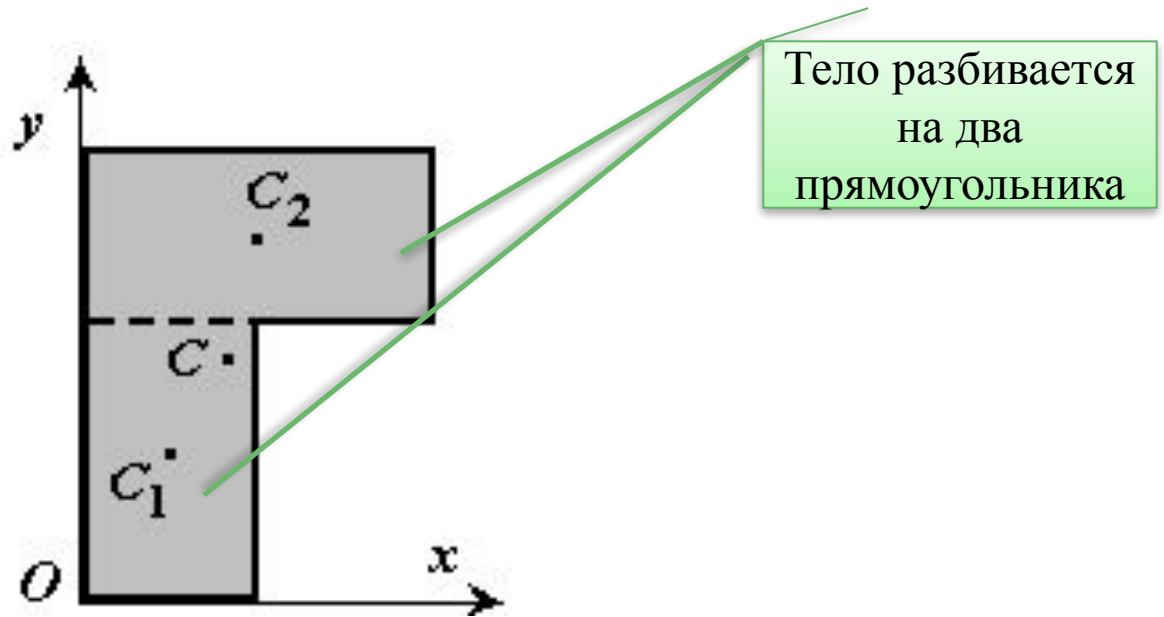
Примеры ЦТ симметричных тел



Методы определения координат центра тяжести

Разбиение.

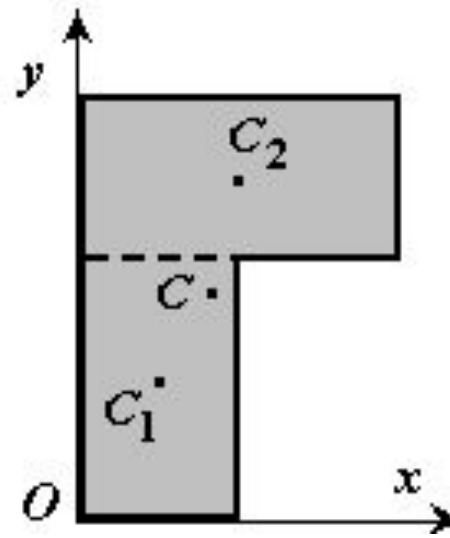
Тело разбивается на части, для которых положение ЦТ и площадь известны.



Пример.

C_1, S_1 - ЦТ и площадь первой фигуры;

C_2, S_2 - ЦТ и площадь второй фигуры.

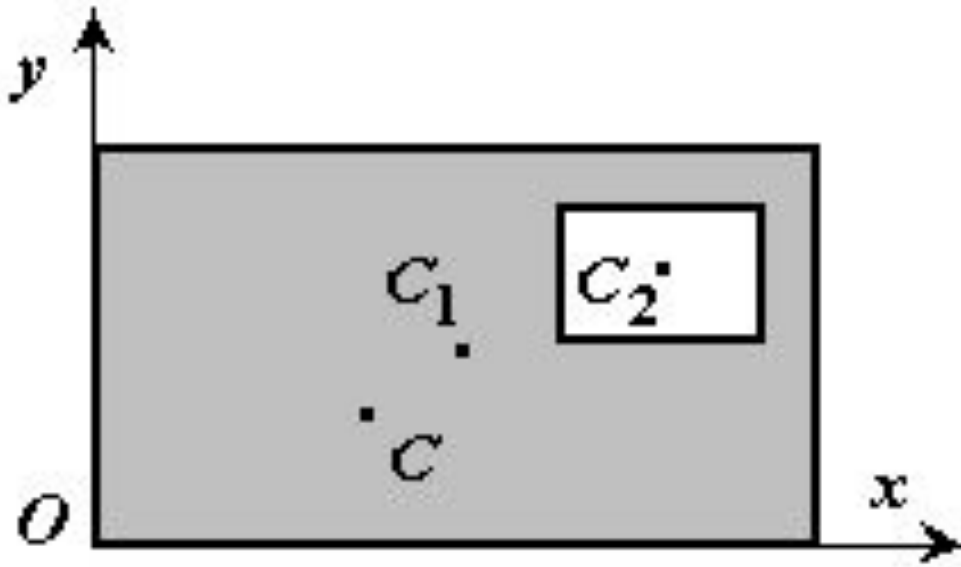


$x_c = (x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2) / (S_1 + S_2)$ - координата ЦТ плоской фигуры по оси x ;

$y_c = (y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2) / (S_1 + S_2)$ - координата ЦТ плоской фигуры по оси y .

2) Метод отрицательных площадей.

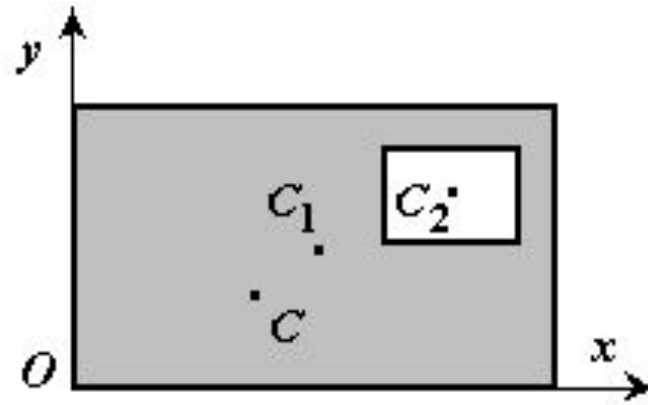
Применяется к телам, имеющим вырезы, если ЦТ тела без выреза и вырезанной части известны.



Пример.

C_1, S_1 - ЦТ и площадь первой фигуры;

C_2, S_2 - ЦТ и площадь второй фигуры.



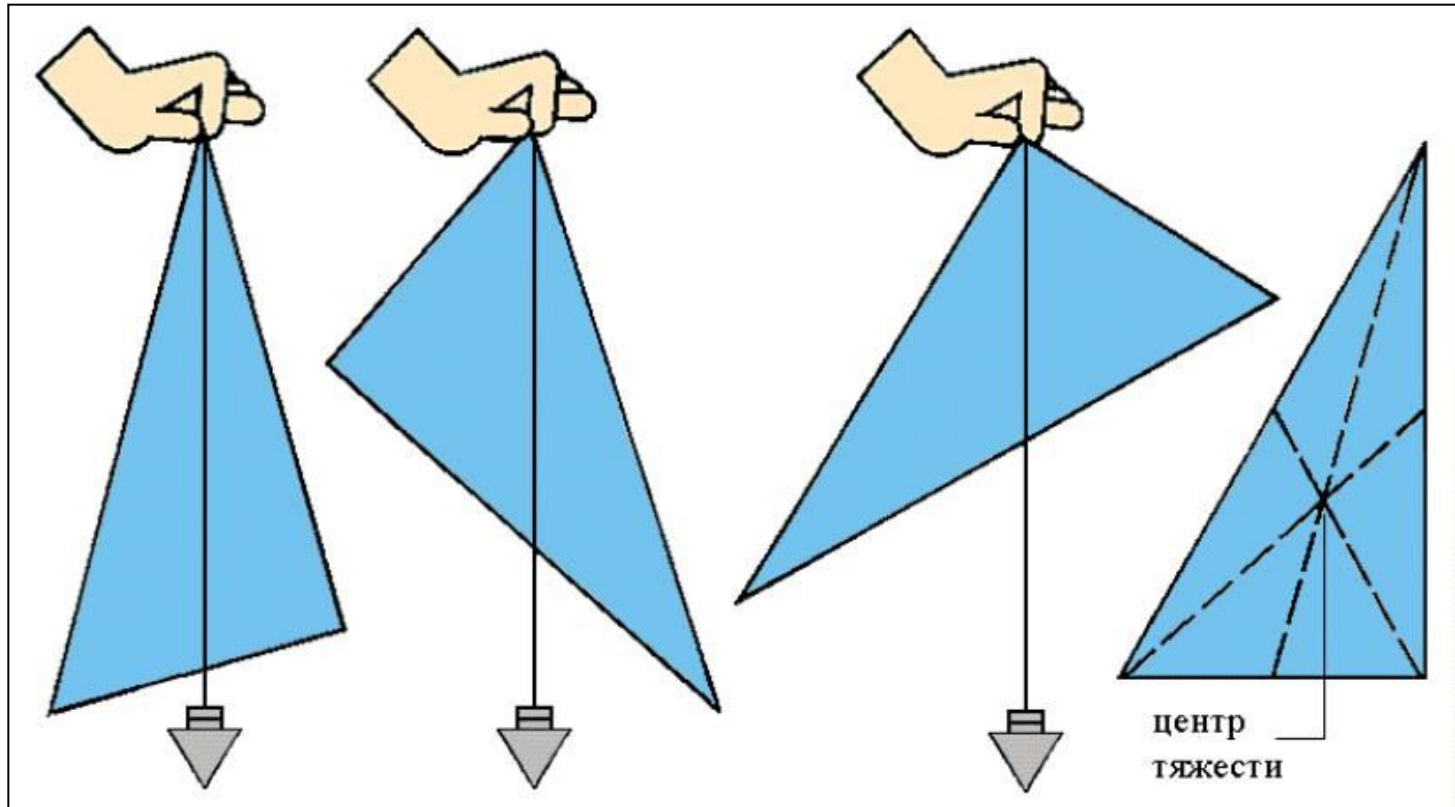
$x_c = (x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2) / (S_1 - S_2)$ - координата ЦТ плоской фигуры по оси x ;

$y_c = (y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2) / (S_1 - S_2)$ - координата ЦТ плоской фигуры по оси y .

Пример сложной фигуры, при определении ЦТ которой применяются оба метода

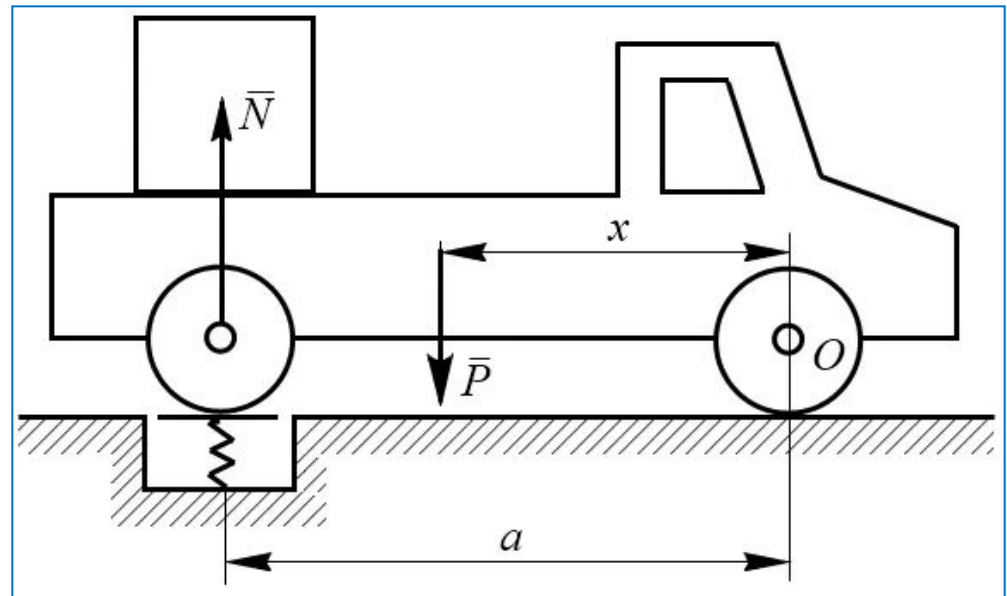


3) Практические методы определения ЦТ. а) метод подвешивания

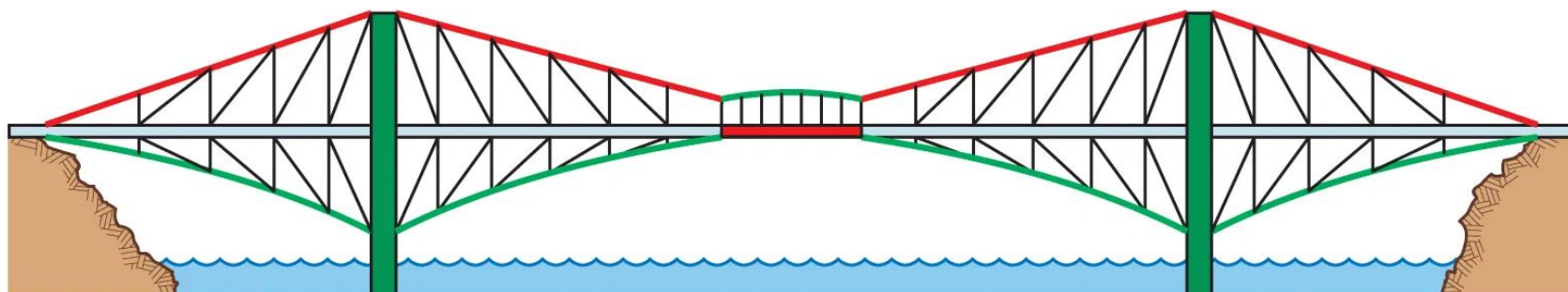


б) метод взвешивания

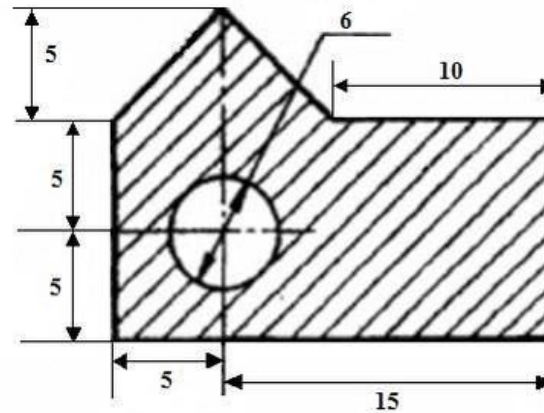
Метод взвешивания состоит в том, что сначала определяется вес тела, например, автомобиля. Затем на весах определяется реакция опоры заднего моста автомобиля. Составив уравнение равновесия относительно какой-либо точки, например оси передних колес, можно вычислить расстояние от этой оси до центра тяжести автомобиля.



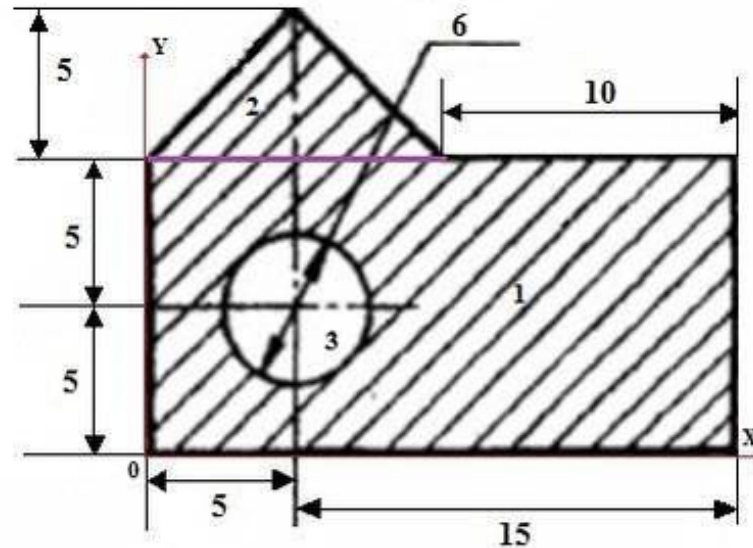
2. Примеры расчета координат центра тяжести



Пример 1. Найти координаты ЦТ плоской фигуры, изображенной на рисунке.



Выбираем оси координат так, чтобы нижний и левый край фигуры совпали с ними:



Делим заданную плоскую фигуру на прямоугольник (1), треугольник (2) и круг (3).

Вычисляем площади этих фигур:

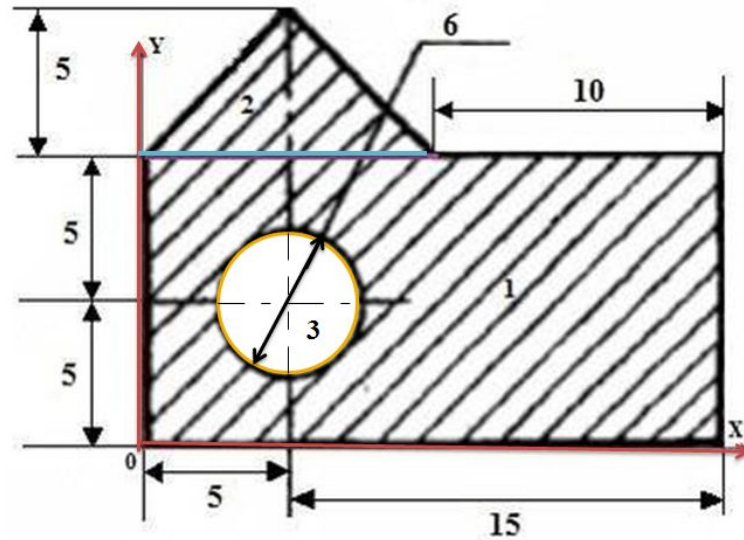
$$S_1 = 10 \cdot 20 = 200; \quad S_2 = 0,5 \cdot 5 \cdot 10 = 25; \quad S_3 = \pi \cdot 9 = 28,3.$$

Определяем координаты ЦТ фигур:

$$x_1 = 10; \quad y_1 = 5$$

$$x_2 = 5; \quad y_2 = 11,7$$

$$x_3 = 5; \quad y_3 = 5$$



Координаты ЦТ всей плоской фигуры:

$$x = \frac{\sum x_i \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 - x_3 S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{10 \cdot 200 + 5 \cdot 25 - 5 \cdot 28.3}{200 + 25 - 28.3} = 10$$

$$y = \frac{\sum y_i \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 - x_3 S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{5 \cdot 200 + 11.7 \cdot 25 - 5 \cdot 28.3}{200 + 25 - 28.3} = 5.9$$

Пример 2. Определить координаты ЦТ составного сечения. Сечение состоит из листа и прокатных профилей (швеллера, двутавра).

Примечание. Часто конструкции сваривают из разных профилей. При этом, уменьшается расход металла и образуется конструкция высокой прочности.

Для стандартных прокатных профилей собственные геометрические характеристики известны. Они приводятся в соответствующих стандартах - ГОСТах.

Швеллер - разновидность металлопроката, который имеет П-образное поперечное сечение.

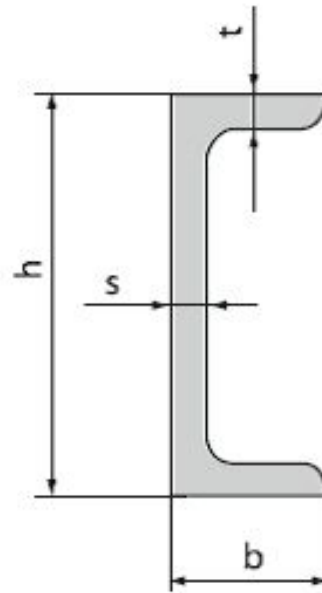
Область применения:

- строительство;
- машиностроение;
- автомобилестроение;
- вагоностроение и др.



Характеристики швеллера

- h - высота,
 b - ширина полки,
 s - толщина стенки,
 t - средняя толщина полки.



Двутавр – балочный профиль из высокопрочной стали с Н-образным поперечным сечением.

Двутавровые конструкции хорошо переносят сопротивление на изгиб.

Балки применяются в строительстве зданий различного назначения, подвесных конструкций, в автомобильной промышленности.

Их размеры регламентируются действующими государственными стандартами.



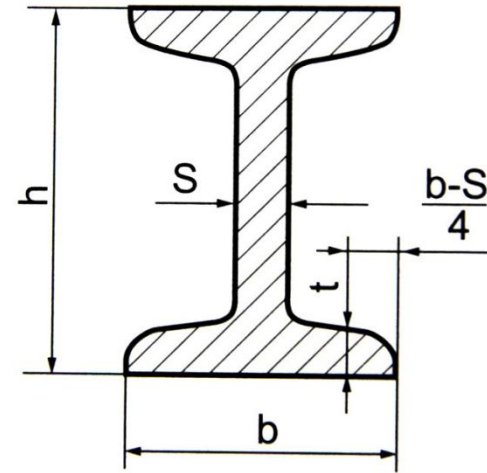
Характеристики двутавра

h - высота,

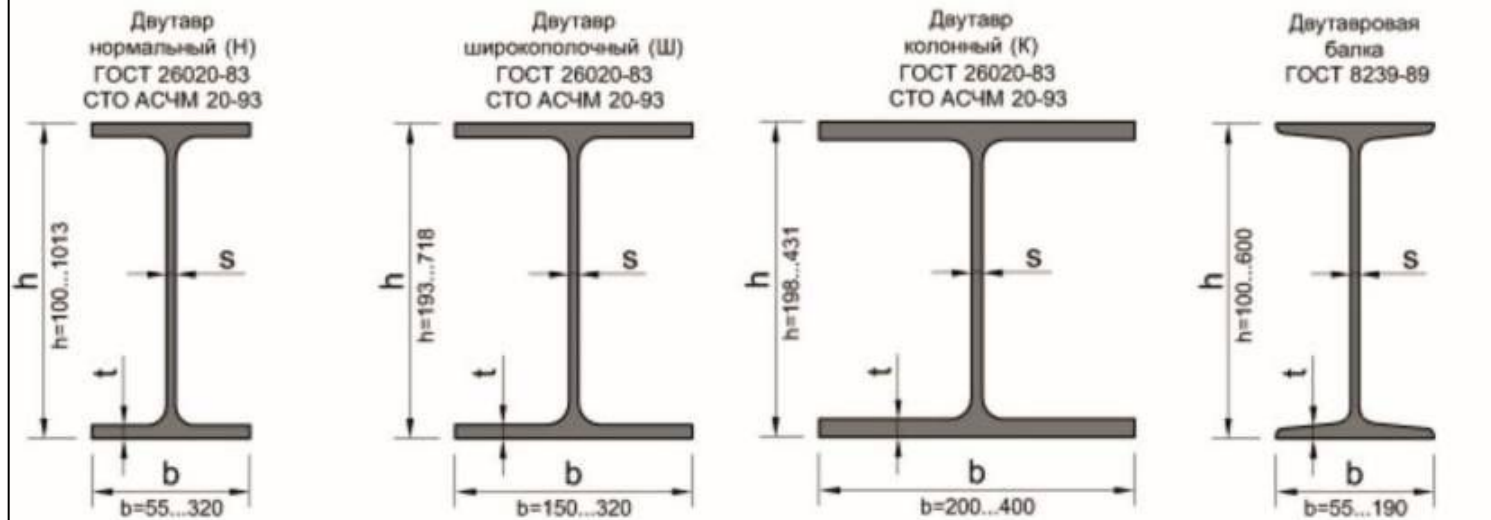
b – ширина полки,

s – толщина стенки,

t - средняя толщина полки.



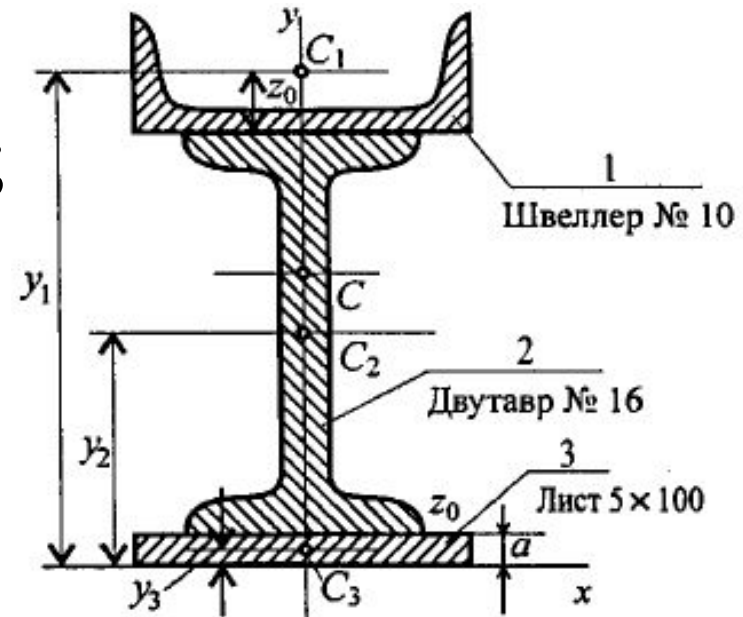
Сортамент двутавра



Задача. Сечение состоит из листа, швеллера, двутавра.

Обозначаем фигуры номерами и выписываем из таблиц стандартов необходимые данные:

1. **швеллер №10** (ГОСТ 8240-89); высота $h=100$ мм; ширина полки $b=46$ мм; площадь сечения $A_1=10,9\text{см}^2$;
2. **двутавр №16** (ГОСТ 8239-89); высота $h_2=160$ мм; ширина полки $b_2=81$ мм; площадь сечения $A_2=20,2\text{см}^2$ [ОВ];
3. **лист 5×100** ; толщина $a=5$ мм; ширина $b_3=100$ мм; площадь сечения $A_3=0,5\cdot 10=5\text{ см}^2$.



Координаты центров тяжести каждой фигуры можно определить по чертежу.

Составное сечение симметрично, поэтому ЦТ находится на оси симметрии и координата $[\bar{O}\bar{B}\bar{J}] x_C = 0$.

Швеллер 1: $[\bar{O}\bar{B}\bar{J}] y_1 = a + h_2 + z_0 = 0,5 + 16 + 1,44 = 17,54$ см

Двутавр 2: $[\bar{O}\bar{B}\bar{J}] y_2 = a + h_2/2 = 0,5 + 16/2 = 8,5$ см

Лист 3: $[\bar{O}\bar{B}\bar{J}] y_3 = a/2 = 0,25$ см

Определение центра тяжести составного сечения:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_C = \frac{10,9 \cdot 17,54 + 20,2 \cdot 8,5 + 5 \cdot 0,25}{10,9 + 20,2 + 5} = 10 \text{ см}$$

Ответ: $x_C = 0$ $y_C = 10 \text{ см}$

