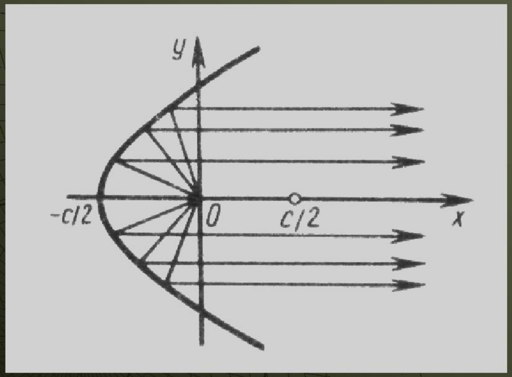
Задача 1. Задача о прожекторе.

Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения и обладающего тем свойством, что все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке О на оси вращения, отражаются зеркалом параллельно этой оси.

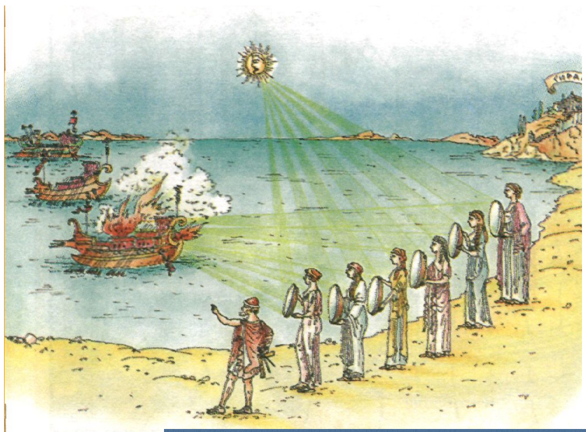
Решив эту задачу, мы получим искомое уравнение кривой – параболы. Таким образом, искомая отражающая поверхность – параболоид вращения.

Используя то свойство, что, помещая источник света на различных расстояниях, которые необходимо просчитать заранее, мы можем собрать лучи света или в одну точку, или пустить их параллельным пучком.



$$y^2 = 2Cx + C^2$$

Этими физическими свойствами зеркал и воспользовались великий Архимед и Маршал Жуков при ведении боевых действий



История гласит: в 121 году до н. э. римляне осадили с суши и моря греческий город Сиракузы (слайд 3). Руководить обороной города было решено поручить Архимеду.

Когда римский флот был уже не более чем в трехстах метрах от берега, началось светопреставление: паруса стали вспыхивать один за другим без всякой видимой причины, нестерпимо ослепительные лучи обрушились на окаменевших от ужаса воинов Клавдия Марцелла.

Атакующие обратились в паническое бегство, а со стен укреплений Архимед невозмутимо наблюдал за результатами своей работы

Из книги Г. К. Жукова «Воспоминания и размышления»:
«Так родилась идея ночной атаки с применением прожекторов . Решено было обрушить наш удар за два часа до рассвета.

Сто сорок зенитных прожекторов должны были внезапно осветить позиции противника и объекты атаки».

Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Уравнения вида $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.
- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид

$$y'' = f\left(x, y, y'\right).$$

- **Пример.** $y'' = x.$ Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма.

- Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right)$$

обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$, содержащей две произвольные постоянные.

Это множество решений называется **<u>общим решением</u>.**

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\; y'\big|_{x=x_0} = y_0'.$$

Пример. $y'' = x. \quad y\big|_{x=2} = 2, \; y'\big|_{x=2} = 3.$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \qquad y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \qquad C_1 = 1, \; C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

- **Геометрический смысл начальных условий:**
- Помимо точки (x_0, y_0), задаем угловой коэффициент касательной.

Теорема о существовании и единственности решения.

- Если функция $f\left(x,y,y'\right)$ и ее производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$

непрерывны в окрестности значений $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$,
то дифференциальное уравнение $y'' = f\left(x,y,y'\right)$
в достаточно малом интервале $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$
имеет единственное решение $y = y\left(x\right)$, удовлетворяющее
заданным начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'$.

- Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2,\ y'\big|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение.

Если задать начальные условия при $x_0 = 0,$ то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

- Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают граничные условия (краевые условия)
- $$y\big|_{x=x_1} = y_1,\ y\big|_{x=x_2} = y_2$$

(сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.).

В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений.

Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x. \qquad y\big|_{x=1} = 0,\ y\big|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0,\ \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6},\ C_2 = 1. \qquad y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

2. Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка. $y'' = f(x, y, y')$.

- 1) Правая часть **не** содержит y и y'.

$$\boxed{y'' = f(x).}$$

интегрируем дважды

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит y.

$$\boxed{y'' = f(x, y')}. \qquad y'' = f(x, y, y').$$

- Замена $\boxed{y' = z \Rightarrow y'' = z'}.$

$$z' = f(x, z).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(x, C_1), \qquad y' = z, \qquad y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

- **Пример.**

$$y'' + \frac{y'}{x} = x. \qquad y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x, \qquad z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Правая часть не содержит x.

$$\boxed{y'' = f(y, y').}$$

$$y'' = f(x, y, y').$$

Введем замену $\boxed{y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)}$

Таким образом $p' = f(x, p)$ - дифференциальное уравнение 1-ого порядка, общим решением которого является функция $p = \varphi(x, c_1)$

Заменяя $p = y'$, получаем $y' = \varphi(x, c_1)$

$$y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2$$

	Вид уравнения	Метод решения
1.	**$y'' = f(x)$**	**Двукратное интегрирование:** **а)$y' = \int f(x)dx + c_1$** **б) $y = \int [\ f(x)dx + c_1]dx + c_2$**
2.	**$y'' = f(x,y)$**	**Подстановка** **$y' = z$, $y'' = z'$**
3.	**$y'' = f(y, y')$**	**Подстановка** **$y' = p$, $y'' = p$**
4.	$y'' = f(y')$	Подстановки а) $y' = z$, $y'' = z'$ б) $y' = p$, $y'' = p$
5.	$y'' = f(y)$	Подстановка $y' = p$, $y'' = p$

Пример

$$\boxed{y^{(4)} = \sin 2x}$$

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1$$

$$y'' = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\boxed{y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4}$$

Пример 1.

$$y''' = 60x^2 \quad \Big| \cdot dx$$

$$y'''dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y'''dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60\int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad \Big| \cdot dx \Rightarrow$$

$$y''dx = (20x^3 + C_1)dx \Rightarrow \int y''dx = \int (20x^3 + C_1)dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1 x + C_2 \quad \Big| \cdot dx$$

$$y'dx = (5x^4 + C_1 x + C_2)dx \Rightarrow \int y'dx = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)dx$$

$$y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y^{||} - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_o = 0$, $y_o = 0$, $y^{/}_o = 1$.

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_o = 0$, $y_o = 0$, $y'_o = 1$.

Решение. Уравнение явно не содержит у, то есть вида $y'' = f(x, y')$.

Для решения поступим следующим образом:

1. Введём подстановку: $y' = z$, $y'' = z'$.

2. Значения y' и y'' подставим в уравнение $z' - \frac{z}{x} = x^2$ (3). Получили ЛДУ$_1$.

Для его решения введём подстановку: $z = u\,v$, $z' = u'v + v'u$.

Значения z и z' подставим в уравнение (3): $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2$;

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y^{||} - \dfrac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_o = 0$, $y_o = 0$, $y^/_o = 1$.

Решение. Уравнение явно не содержит y, то есть вида $y^{//}=f(x,\ y^/)$.

Для решения поступим следующим образом:

1. Введём подстановку: $y^/=z,\ \ y^{//}= z^/$.

2. Значения $y^/$ и $y^{//}$ подставим в уравнение $z^/ - \dfrac{z}{x} = x^2$ (3). Получили ЛДУ$_1$.

Для его решения введём подстановку: $z = u\,v,\ \ z^/ = u^/v + v^/u$.

Значения z и $z^/$ подставим в уравнение (3): $u^/v + v^/u - \dfrac{uv}{x} = x^2$;

$$u^/v+u(v^/-\frac{v}{x})=x^2.$$

Составим два уравнения с разделяющимися переменными:

а) $v^/ - \dfrac{v}{x} = 0$. Из уравнения а) найдём $v = x$, а из уравнения

б) $u^/v = x^2$ найдём: $u = \dfrac{x^2}{2} + c_1$

Отсюда имеем : $z = x(\dfrac{x^2}{2} + c_1)$ (4)

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y^{||} - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_o = 0$, $y_o = 0$, $y^/_o = 1$.

Подставляя в равенство (4) вместо z его значение $z = y^/$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y^/ = x(\frac{x^2}{2} + c_1) \quad (5)$$

относительно функции y.

Интегрируя его, найдём: $y = \frac{x^4}{8} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2$ (6) – общее решение

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y^{||} - \dfrac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_o = 0$, $y_o = 0$, $y^{/}_o = 1$.

Подставляя в равенство (4) вместо z его значение $z = y^{/}$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y^{/} = x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \quad (5)$$

относительно функции y.

Интегрируя его, найдём: $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{c_1 x^2}{2} + c_2$ (6) – общее решение

Подставим начальные условия в равенства (5) и (6), получим систему уравнений относительно произвольных постоянных c_1 и c_2

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{2} + c_1 \\ 0 = c_2 \end{cases}$$

Отсюда: $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^2}{2}$ - частное решение.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ$_2$: $yy'' - 2(y')^2=0$.

Решение. Уравнение явно не содержит x.

1.Введём подстановку: $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получим:

$yp\dfrac{dp}{dy}-2p^2=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ$_2$: $yy^{//} - 2(y^{/})^2=0$.

Решение. Уравнение явно не содержит x.

1.Введём подстановку: $y^{/}=p$, $y^{//}=p\dfrac{dp}{dy}$, получим:

$yp\dfrac{dp}{dy}-2p^2=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. Интегрируя его, будем иметь $\ln|p| = 2\ln|y| + \ln c_1$, $p=c_1y^2$ (1).

3. Так как $p = y^{/}$ уравнение (1), перепишем в виде $y^{/}= c_1y^2$ - уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ$_2$: $yy^{//} - 2(y^{/})^2=0$.

Решение. Уравнение явно не содержит х.

1.Введём подстановку: $y^{/}=p$, $y^{//}=p\dfrac{dp}{dy}$, получим:

$yp\dfrac{dp}{dy}-2p^2=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. Интегрируя его, будем иметь $\ln|p| = 2\ln|y| + \ln c_1$, $p=c_1y^2$ (1).

3. Так как $p = y^{/}$ уравнение (1), перепишем в виде $y^{/}= c_1y^2$ - уравнение с разделяющимися переменными.

4. Заменим $y^{/}$ на $\dfrac{dy}{dx}$.

Получим уравнение $\dfrac{dy}{dx} = c_1y^2$, $\dfrac{dy}{y^2} = c_1dx$.

Интегрируя его, найдём $-\dfrac{1}{y}=c_1x+c_2$ или $y = -\dfrac{1}{c_1x + c_2}$ - общее решение.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{c_1x+c_2}$ - общее решение

Пример

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$y''' = e^{2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -\frac{1}{2}$

Уравнение третьего порядка – три начальных условия.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

Первый интеграл принёс нам константу C_1. В уравнениях рассматриваемого типа рационально **сразу же** применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2, с которой мы немедленно расправляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \dfrac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \dfrac{1}{4}e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right) dx = \ldots$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \ldots$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8}$ – выполнено.

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1\right)' = \frac{1}{8}\cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4}e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ – выполнено.

3) Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right)' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$:

$y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ – выполнено.

4) Найдем третью производную:

$$y''' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.