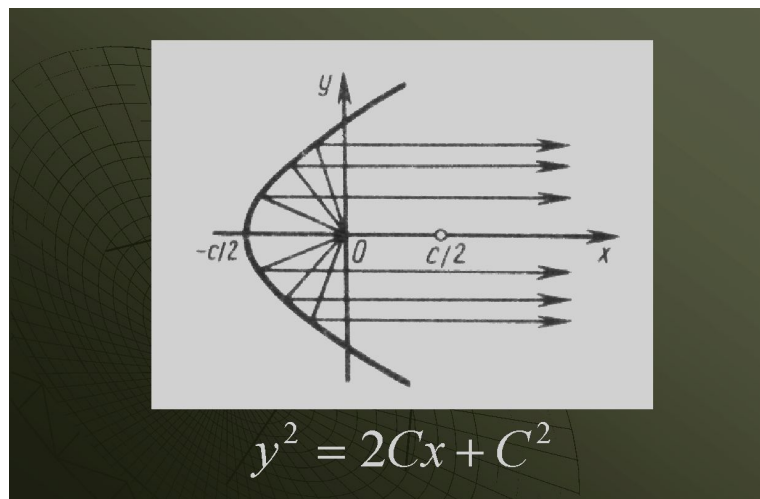


Задача 1. Задача о прожекторе.

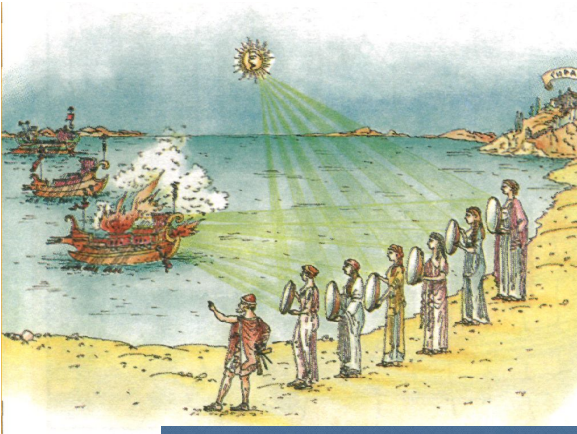
Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения и обладающего тем свойством, что все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражаются зеркалом параллельно этой оси.

Решив эту задачу, мы получим искомое уравнение кривой – параболы. Таким образом, искомая отражающая поверхность – параболоид вращения.

Используя то свойство, что, помещая источник света на различных расстояниях, которые необходимо просчитать заранее, мы можем собрать лучи света или в одну точку, или пустить их параллельным пучком.



Этими физическими свойствами зеркал и воспользовались великий Архимед и Маршал Жуков при ведении боевых действий



История гласит: в 121 году до н. э. римляне осадили с суши и моря греческий город Сиракузы (слайд 3). Руководить обороной города было решено поручить Архимеду.

Когда римский флот был уже не более чем в трехстах метрах от берега, началось светопреставление: паруса стали вспыхивать один за другим без всякой видимой причины, нестерпимо ослепительные лучи обрушились на окаменевших от ужаса воинов Клавдия Марцелла.

Атакующие обратились в паническое бегство, а со стен укреплений Архимед невозмутимо наблюдал за результатами своей работы



Из книги Г. К. Жукова «Воспоминания и размышления»:
«Так родилась идея ночной атаки с применением прожекторов .
Решено было обрушить наш удар за два часа до рассвета.
Сто сорок зенитных прожекторов должны были
внезапно осветить позиции противника и объекты атаки».



Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид

$$y'' = f(x, y, y').$$

- **Пример.** $y'' = x$. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма.

- Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные.

Это множество решений называется **общим решением**.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пример. $y'' = x.$ $y|_{x=2} = 2, y'|_{x=2} = 3.$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \quad C_1 = 1, C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

- **Геометрический смысл начальных условий:**
- Помимо точки (x_0, y_0) , задаем угловой коэффициент касательной.

Теорема о существовании и единственности решения.

- Если функция $f(x, y, y')$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений (x_0, y_0, y'_0) , то дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$.
- Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение.

Если задать начальные условия при $x_0 = 0$, то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

- Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают граничные условия (краевые условия)

- $y|_{x=x_1} = y_1, y|_{x=x_2} = y_2$
(сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.).

В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений.

Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x.$ $y|_{x=1} = 0, y|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \quad \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6}, \quad C_2 = 1. \quad y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

2. Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка. $y'' = f(x, y, y')$.

- 1) Правая часть **не** содержит y и y' .

$$y'' = f(x).$$

интегрируем дважды

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит y .

$$y'' = f(x, y').$$

$$y'' = f(x, y, y').$$

- Замена

$$y' = z \Rightarrow y'' = z'.$$

$$z' = f(x, z).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(x, C_1), \quad y' = z, \quad y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

- **Пример.**

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

$$y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x,$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Правая часть не содержит x .

$$y'' = f(y, y').$$

$$y'' = f(x, y, y').$$

Введем замену

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$$

Таким образом $p' = f(x, p)$ - дифференциальное уравнение 1-ого порядка, общим решением которого является функция $p = \varphi(x, c_1)$

Заменяя $p = y'$, получаем $y' = \varphi(x, c_1)$

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$$

	Вид уравнения	Метод решения
1.	$y''=f(x)$	<p>Двукратное интегрирование:</p> <p>а) $y' = \int f(x)dx + c_1$</p> <p>б) $y = \int [\int f(x)dx + c_1]dx + c_2$</p>
2.	$y''=f(x,y)$	<p>Подстановка</p> <p>$y' = z, y'' = z'$</p>
3.	$y''=f(y, y')$	<p>Подстановка</p> <p>$y' = p, y'' = p'$</p>
4.	$y''=f(y')$	<p>Подстановки</p> <p>а) $y' = z, y'' = z'$</p> <p>б) $y' = p, y'' = p'$</p>
5.	$y''=f(y)$	<p>Подстановка</p> <p>$y' = p, y'' = p'$</p>

Пример

$$y^{(4)} = \sin 2x$$

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c_1$$

$$y'' = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1\right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{8} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{16} \sin 2x + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Пример 1.

$$y''' = 60x^2 \quad | \cdot dx$$

$$y''' dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y''' dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60 \int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad | \cdot dx \Rightarrow$$

$$y'' dx = (20x^3 + C_1) dx \Rightarrow \int y'' dx = \int (20x^3 + C_1) dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1x + C_2 \quad | \cdot dx$$

$$y' dx = (5x^4 + C_1x + C_2) dx \Rightarrow \int y' dx = \int (5x^4 + C_1x + C_2) dx$$

$$y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 1$.

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 1$.

Решение. Уравнение явно не содержит y , то есть вида $y'' = f(x, y')$.

Для решения поступим следующим образом:

1. Введём подстановку: $y' = z, y'' = z'$.

2. Значения y' и y'' подставим в уравнение $z' - \frac{z}{x} = x^2$ (3). Получили ЛДУ₁.

Для его решения введём подстановку: $z = u v, z' = u'v + v'u$.

Значения z и z' подставим в уравнение (3): $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2$;

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 1$.

Решение. Уравнение явно не содержит y , то есть вида $y'' = f(x, y')$.

Для решения поступим следующим образом:

1. Введём подстановку: $y' = z, y'' = z'$.

2. Значения y' и y'' подставим в уравнение $z' - \frac{z}{x} = x^2$ (3). Получили ЛДУ₁.

Для его решения введём подстановку: $z = u v, z' = u'v + v'u$.

Значения z и z' подставим в уравнение (3): $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2$;

$$u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x^2.$$

Составим два уравнения с разделяющимися переменными:

а) $v' - \frac{v}{x} = 0$. Из уравнения а) найдём $v = x$, а из уравнения

б) $u'v = x^2$ найдём: $u = \frac{x^2}{2} + c_1$

Отсюда имеем: $z = x(\frac{x^2}{2} + c_1)$ (4)

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 1$.

Подставляя в равенство (4) вместо z его значение $z = y'$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \quad (5)$$

относительно функции y .

Интегрируя его, найдём: $y = \frac{x^4}{8} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2$ (6) – общее решение

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y}{x} = x^2$

удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 1$.

Подставляя в равенство (4) вместо z его значение $z = y'$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \quad (5)$$

относительно функции y .

Интегрируя его, найдём: $y = \frac{x^4}{8} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2$ (6) – общее решение

Подставим начальные условия в равенства (5) и (6), получим систему уравнений относительно произвольных постоянных c_1 и c_2

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} + c_1 \\ 0 = c_2 \end{cases} \quad \text{Отсюда: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 0.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}$ - частное решение.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ₂ : $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

Решение. Уравнение явно не содержит x .

1. Введём подстановку: $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, получим:

$yp \frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ₂: $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

Решение. Уравнение явно не содержит x .

1. Введём подстановку: $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, получим:

$yp \frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. Интегрируя его, будем иметь $\ln|p| = 2\ln|y| + \ln c_1$, $p = c_1 y^2$ (1).

3. Так как $p = y'$ уравнение (1), перепишем в виде $y' = c_1 y^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3.

Найти общее решение ДУ₂: $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

Решение. Уравнение явно не содержит x .

1. Введём подстановку: $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, получим:

$yp \frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. Интегрируя его, будем иметь $\ln|p| = 2\ln|y| + \ln c_1$, $p = c_1 y^2$ (1).

3. Так как $p = y'$ уравнение (1), перепишем в виде $y' = c_1 y^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

4. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$.

Получим уравнение $\frac{dy}{dx} = c_1 y^2$, $\frac{dy}{y^2} = c_1 dx$.

Интегрируя его, найдём $-\frac{1}{y} = c_1 x + c_2$ или $y = -\frac{1}{c_1 x + c_2}$ – общее решение.

Ответ: $y = -\frac{1}{c_1 x + c_2}$ – общее решение

Пример

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -\frac{1}{2}$$

Уравнение третьего порядка – три начальных условия.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

Первый интеграл принёс нам константу C_1 . В уравнениях рассматриваемого типа рационально сразу же применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2 , с которой мы немедленно расправляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4} e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right) dx = \dots$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \dots$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8} \text{ — выполнено.}$$

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1 \right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4}e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \text{ — выполнено.}$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x \right)' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$:

$$y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ — выполнено.}$$

4) Найдем третью производную:

$$y''' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1 \right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.