17.07.22

Формулы комбинаторики. Формула числа перестановок, размещений и сочетаний. Решение задач.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1401
https://infourok.ru/videouroki/1402
https://infourok.ru/videouroki/1403

Теоретическая часть:

Прочитать.

Определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

КОМБИНАТОРИКА.

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Перестановки.

Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

▶ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ Книги можно поставить 24 способами. ◁

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение. ***Перестановками из n элементов*** **называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.**

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Размещения.

Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▶ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ 12. ◁

Определение. *Размещениями из m элементов по n элементов* ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \qquad (3)$$

Сочетания.

Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

Пусть x — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. $2x$. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно A_{10}^2. Таким образом, $2x = A_{10}^2$, т. е. $2x = 90$, откуда $x = 45$.

Ответ 45 способами.

Определение. *Сочетаниями из m элементов по n* в каждом ($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Например, $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{P_3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Практическая часть.

Задачи:

1047 Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три различные дороги, а между пунктами B и C — четыре различные дороги. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

1063 Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:
1) последней была цифра 3;
2) первой была цифра 4;
3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
4) первой была цифра 2, а последней — цифра 4;

1075 В классе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: 1) физорга и культорга; 2) физорга, культорга и казначея?

1081 Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать:
1) троих студентов; 2) четверых студентов?