Краткий курс лекций по математике

В настоящее время в условиях рыночных преобразований в экономике возрастает роль экономико-математических методов.

Математический инструментарий становится неотъемлемой частью экономической науки.

Автор данного курса лекций руководствовался принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.

Раздел 1.
Линейная алгебра.

Линейна алгебра является необходимым инструментарием для компактного и эффективного описания и анализа экономико-математических моделей и методов.

Тема 1. Матрицы.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеет важное значение для экономистов, так как значительная часть математических моделей экономических объектов может быть записана в компактной матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ или mn - матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

Матрица содержит m строк и n столбцов.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами.

Матрица записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или $A_{m\times n} = (a_{ij})$ где a_{ij} - элемент матрицы.

Первый индекс i - это номер строки, второй j - индекс номер столбца, где расположен элемент.

Виды матриц.

1. Если в матрице число строк не равно числу столбцов, то матрица называется прямоугольной матрицей.

2. Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной матрицей.

3. Матрица строка

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

4.Матрица столбец

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

5. Матрица, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей и обозначается символом E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами.

1. Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2 & -2+(-4) & 4+1 \\ -1+5 & 3+(-4) & 5+0 \\ 1+(-2) & 7+(-3) & -5+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Произведением матрицы A и числа λ называется матрица той же размерности, все элементы которой умножаются на это число:

$$\lambda A \cdot = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Произведением матрицы размерности $m \times n$ и матрицы размерности $n \times k$ называется матрица размером $m \times k$, элементы которой равны сумме произведений элементов - строки матрицы, стоящей на первом месте на соответствующие элементы столбца матрицы, стоящей на втором месте.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Произведение существует в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Размер матрицы произведения равен $m \times k$

Например, даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы A на матрицу B неопределено, так как число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй матрицы, однако, произведение матрицы B на матрицу A определено

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 3 & 0\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение двух матриц А и В

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

При умножении матриц коммутативный (переместительный) закон не выполняется $A \cdot B \neq B \cdot A$

4. Возведение в степень.

Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы ***A*** называется произведение ***m*** равных матриц

$$A^m = A \cdot A \cdot A....A$$

Операция возведение в степень определена только для квадратных матриц.

Пример. Возвести матрицу ***A*** в вторую степень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

5. Транспонирование матрицы.

Под этой операцией понимается переход от матрицы $\boldsymbol{A}$ к матрице $\boldsymbol{A^T}$, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

Матрица $\boldsymbol{A^T}$ называется *транспонированной* относительно матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования

$$(A^T)^T = A \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Задачи с экономическим содержанием

Понятие матрицы часто используется в практической деятельности.

Например, данные о выпуске продукции нескольких видов, нормы затрат нескольких ресурсов на производство продукции нескольких типов, цены реализации единицы продукции, нормы затрат ресурсов на производство единиц продукции и т.д удобно записывать в виде матриц.

Задача.

Предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Определить *затраты сырья*, необходимые для планового выпуска продукции, и общую *стоимость сырья*.

Обозначим P_1, P_2, P_3 – *виды продукции*, S_1, S_2 – *виды сырья*

Считая известными нормы расхода каждого вида сырья на изготовление каждого вида продукции составим матрицу норм расхода сырья

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \textit{нормы расхода сырья}$$

Каждый элемент этой матрицы показывает, сколько единиц сырья каждого типа расходуется на производство единицы продукции.

План выпуска продукции, задан матрицей-строкой

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} - \textit{план выпуска продукции}$$

Стоимость единицы каждого типа сырья задана матрицей-столбцом

$$B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} \textit{стоимость единицы каждого типа сырья}$$

Решение. 1 способ.

1. Вычисляют матрицу затрат сырья

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot 2 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 \\ 100 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 130 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} - \textit{матрица затрат сырья}$$

2. Вычисляют общую стоимость сырья

$$Q = S \cdot B = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} =$$

$$= (730 \cdot 30 + 980 \cdot 50) = (70900)$$

2 способ.

1.Вычисляют матрицу стоимости затрат сырья на единицу продукции

$$P = A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}210\\ 250\\ 230\end{pmatrix} - \textit{матрица стоимости затрат на единицу продукции}$$

2. Вычисляют общую стоимость сырья

$$Q = C\cdot P = \begin{pmatrix}100 & 80 & 130\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}210\\ 250\\ 230\end{pmatrix} = (70900) - \textit{общая стоимость сырья}$$

Задача.

В некоторой отрасли ***m*** заводов выпускают ***n*** видов продукции.

Матрица $A_{m\times n}$- задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, $B_{m\times n}$матрица - во втором; $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$- объемы продукции ***j*** - го типа на ***i*** - м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

В данном случае ***m=4*** и ***n=3***

Замечание. Число строк в матрице соответствует числу предприятий, а число столбцов – количеству видов выпускаемой продукции.

Найти:

1. объем продукции за полугодие, за год:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = 2(A + B) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 18 \\ 6 & 12 & 6 \\ 16 & 8 & 14 \\ 14 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

2. Прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам:

Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Отрицательные элементы матрицы показывают, что на данном заводе объем производства ***j***-го продукта уменьшился; положительные - увеличился; нулевые - не изменился.

3. Стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ - курс доллара по отношению к рублю.

$$\lambda C = \lambda\left(A + B\right)$$

Задача.

Предприятие производит ***n*** типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы –***i***-го типа продукции в ***j***-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где ***k***- число регионов, в которых реализуется продукции

Найти матрицу выручки ***C*** по регионам.

Выручка определяется матрицей

$$C_{1\times k} = A_{1\times n} \times B_{n\times k}$$

Пусть

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание. Число столбцов матрицы ***A*** и число строк матрицы ***B*** равно количеству видов выпускаемой продукции, число столбцов матрицы ***B*** равно числу регионов, где реализуется продукция.

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 1300 & 700 & 1300 \end{pmatrix}.$$

Задача.

Предприятие производит ***n*** типов продукции, используя ***m*** видов ресурсов. Нормы затрат ресурса ***i***- го вида на производство единицы продукции ***j***-го типа заданы матрицей затрат ***A***. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило определенное количество продукции каждого типа, записанное матрицей ***X*** .

Определить ***S*** - матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени.

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X_{3\times1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Матрица полных затрат ресурсов $\boldsymbol{S}$ определяется как произведение матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{X}$, т.е.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 14 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}$$

Если известна стоимость каждого вида ресурса в расчете на единицу продукции, то можно определить полную стоимость всех затраченных ресурсов по формуле $C = PS$

$$P = (10 \quad 20 \quad 10 \quad 10)$$

В данном случае

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix} = 39900$$