Введение в теорию графов

начать

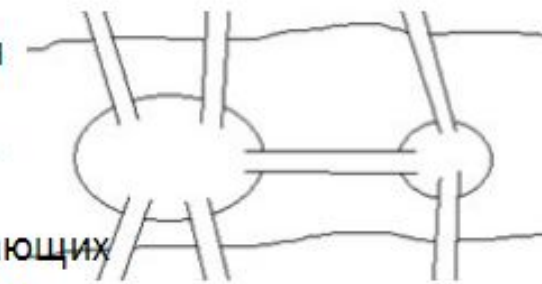
ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера (1707-1783).

Через город протекает река Преголя. Она делится на два рукава, огибает остров и имеет семь мостов.

Рассказывают, что однажды житель города спросил у своего знакомого, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать только один раз и вернуться к тому месту, откуда началась прогулка. Многие горожане заинтересовались этой задачей, однако придумать решение никто не смог. Этот вопрос привлек внимание ученых разных стран. Разрешить проблему удалось известному математику Леонарду Эйлеру.Причем, он не только решил эту конкретную задачу, но придумал общий метод решения подобных задач.

Эйлер поступил следующим образом: он "сжал" сушу в точки, а мосты "вытянул" в линии.



Такую фигуру, состоящую из точек и линий, связывающих эти точки, называют графом. Точки называют вершинами графа, а линии, которые соединяют вершины - ребрами

Введение в теорию графов

Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.

Понятие графа

Граф - это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

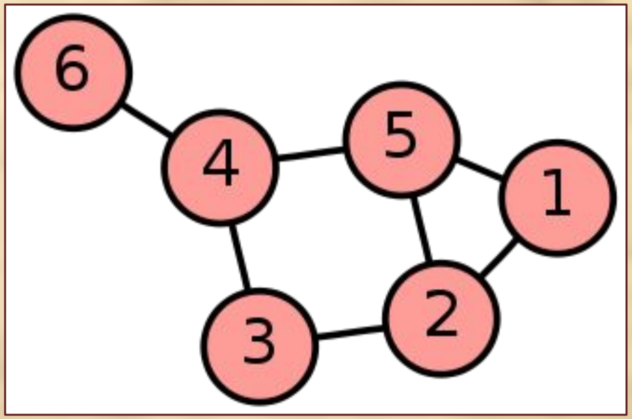


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым)называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

<u>Нулевой граф</u>

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется <u>нулевым графом</u>

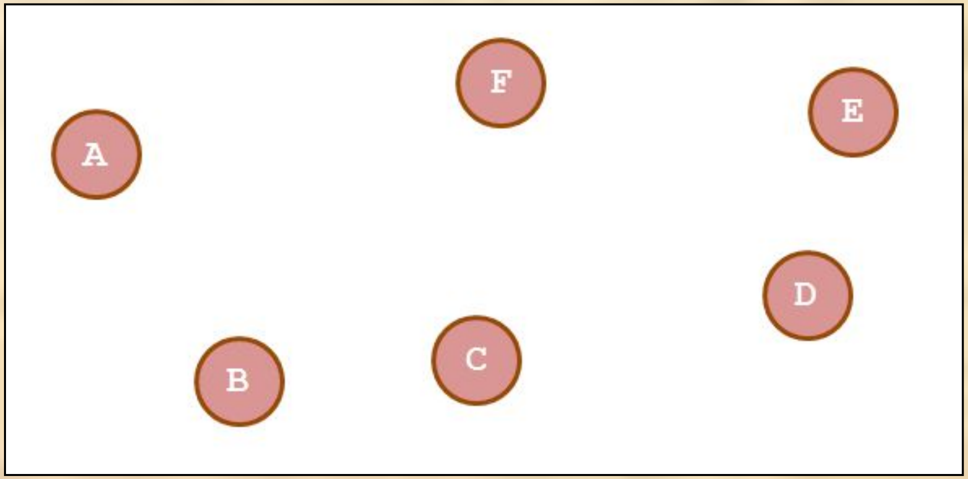


Рис. 2. Нулевой граф

Неполный граф

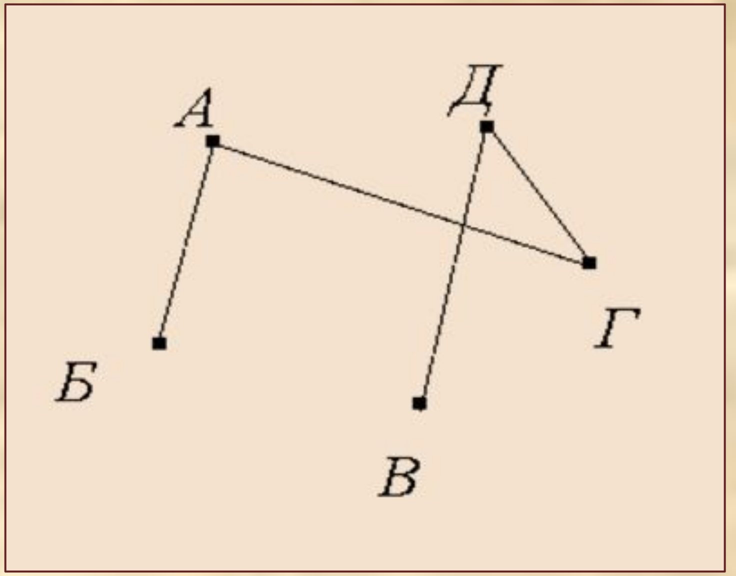


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным. Таким образом, любой полный граф — однородный.

Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то количество ребер равно

$$n(n-1)/2$$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

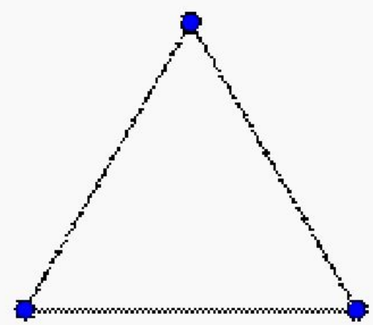
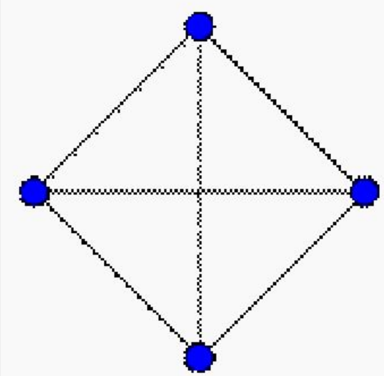
Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

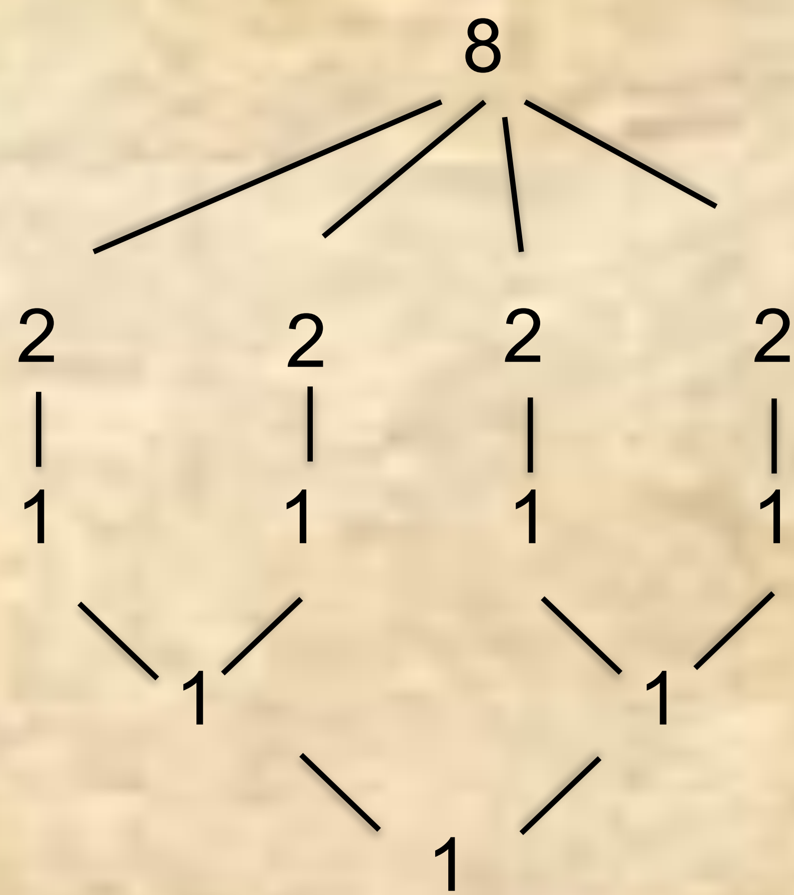
Заметим, что n и (n-1) – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

Примеры полных графов

K_1: 0	K_2: 1	K_3: 3	K_4: 6
			

Задание 2.Построить полный граф для 5 вершин.

Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 8 команд.



Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

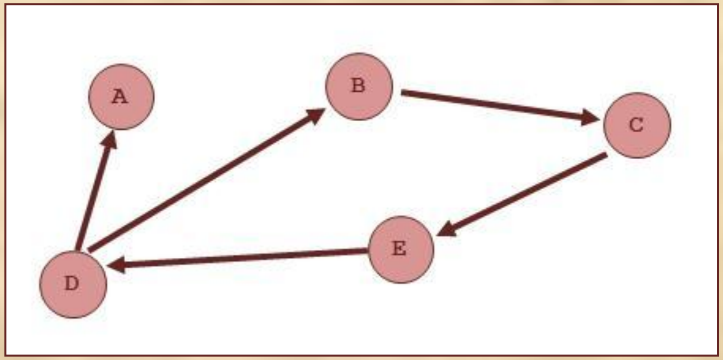


Рис. 4. Ориентированный граф

Ориентированный и неориентированный графы

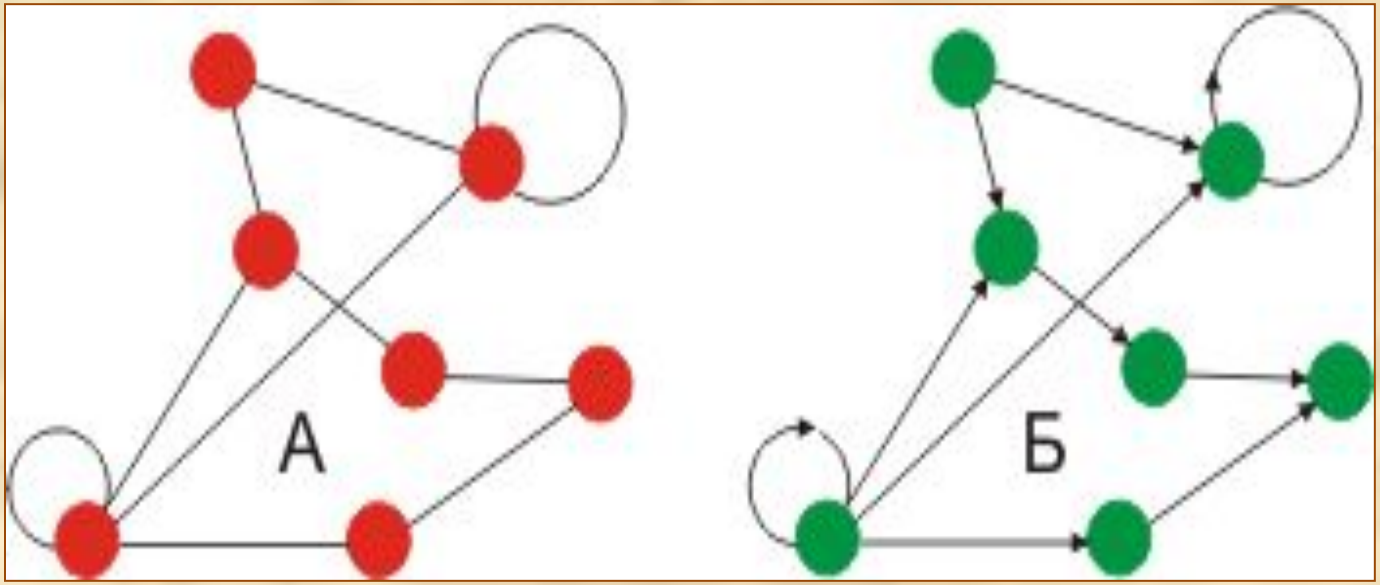


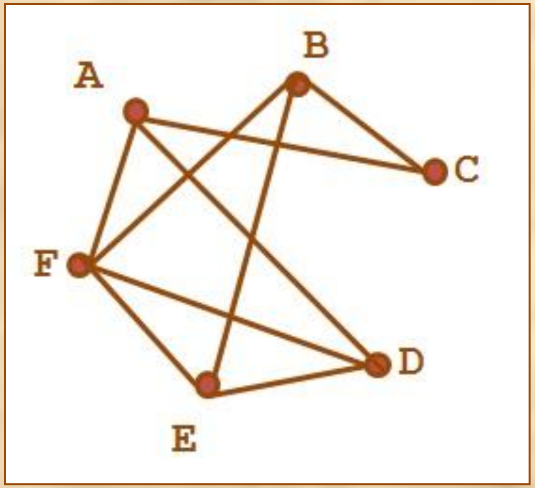
Рис. 5. Примеры неориентированного
и ориентированного графов (А и Б)

Задание 3.Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами A, B, C, D, E и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

ОТВЕТ

A с C, D, F;
B с C, E, F;
C с A, B;
D с A, E, F;
E с B, D, F;
F с A, B, D.



Запомнить!

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет.

Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

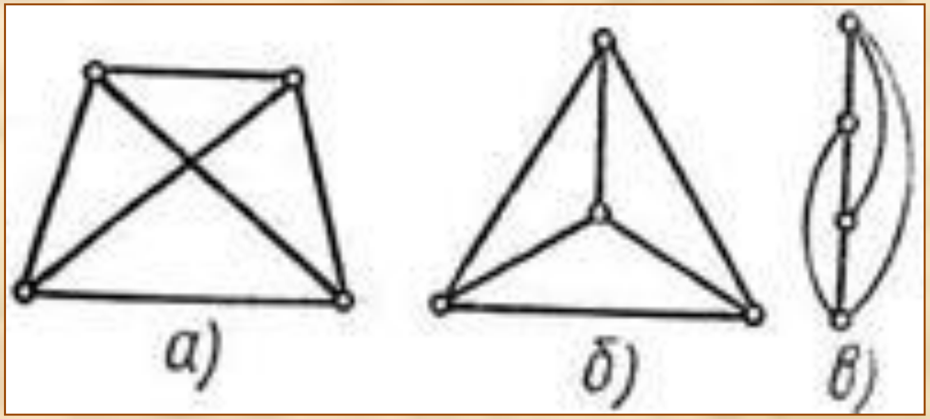
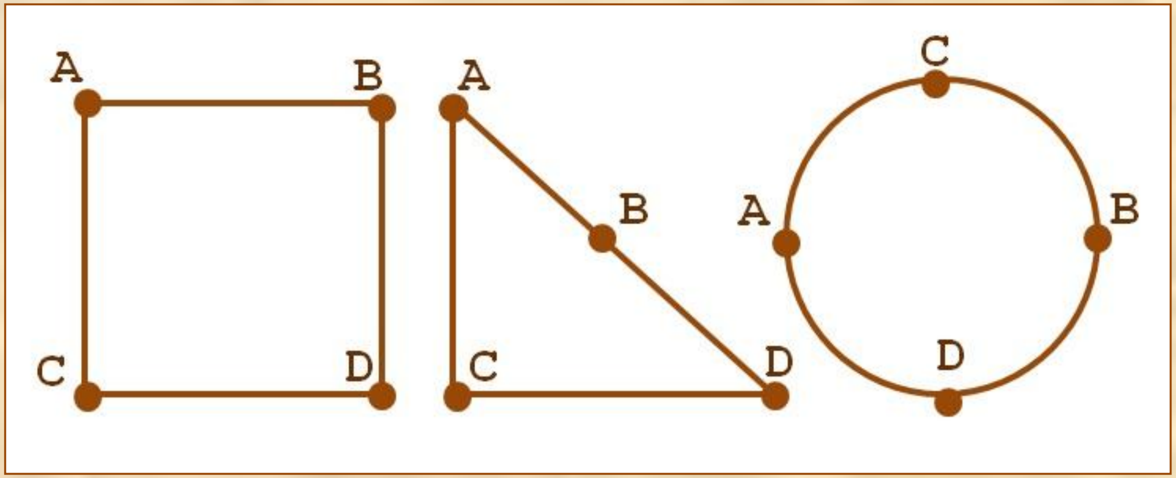


Рис. 6. Примеры изображения графа

Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.

1) 2) 3)



ОТВЕТ

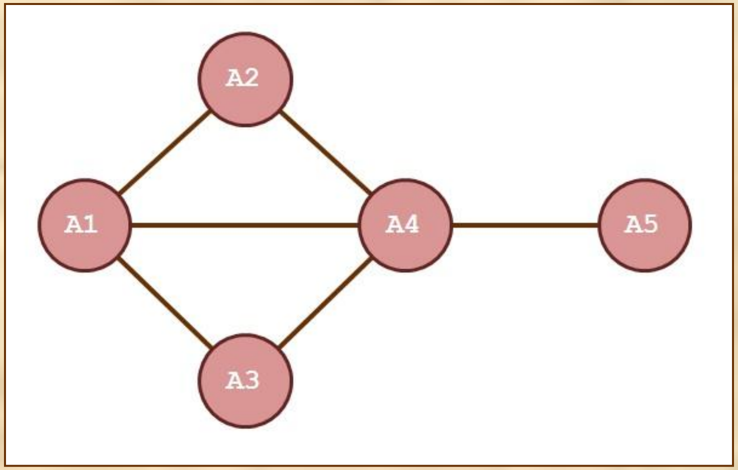
Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа. Рисунок 3 изображением другого графа

Путь в графе

<u>Путём</u> в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).



Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

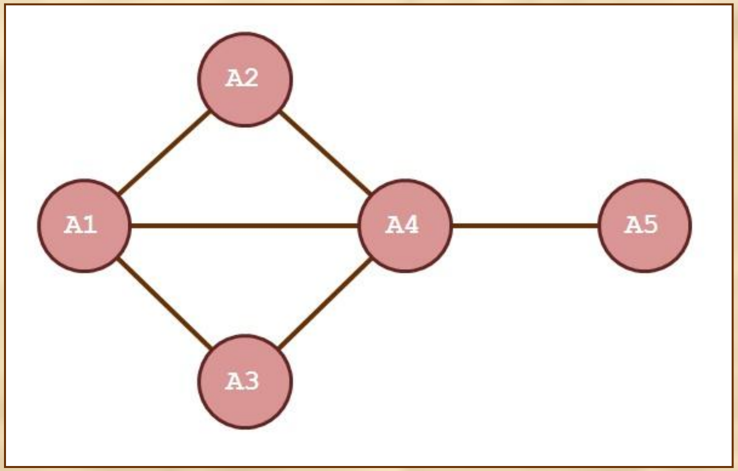
ОТВЕТ

Третья последовательность (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).

Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро (A1, A4) повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины A1 и A4 повторяются.

ОТВЕТ

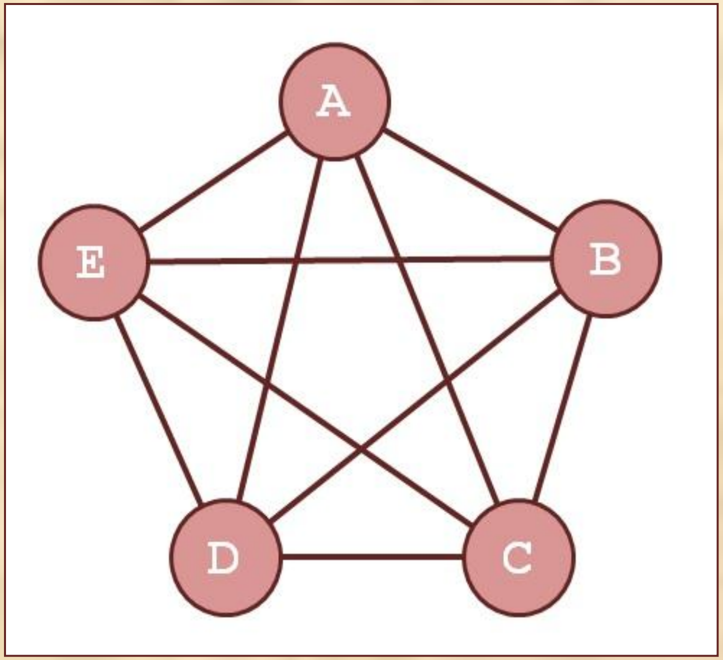
Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 7.

Назовите в графе циклы, содержащие



a) 4 ребра;
b) 6 ребер;
c) 5 ребер;
d) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?

ОТВЕТ

ОТВЕТ

Решение:

a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.

b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.

d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

Задание 2.

1. **Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.**
2. **Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.**