

Лекция № 1

Колебания

Литература

Т. И. Трофимова. Курс физики
§§140 – 148;

А. А. Детлаф, Б. М. Яворский.
Курс физики гл. 27, 28.

Н. П. Калашников,

Н. М. Кожевников,

4 ДЕ, задания 17 – 20.

Колебания

- - процессы, повторяющиеся во времени, их тип определяет природа процесса.
- Различают колебания:
 - механические,
 - электромагнитные,
 - электромеханические и другие.

Колебания

- **Периодические** - повторяются через равные промежутки времени.
- **Гармонические** - описываются законом синуса или косинуса.
-

Механические колебания



Опыт Кавендиша

Механические колебания

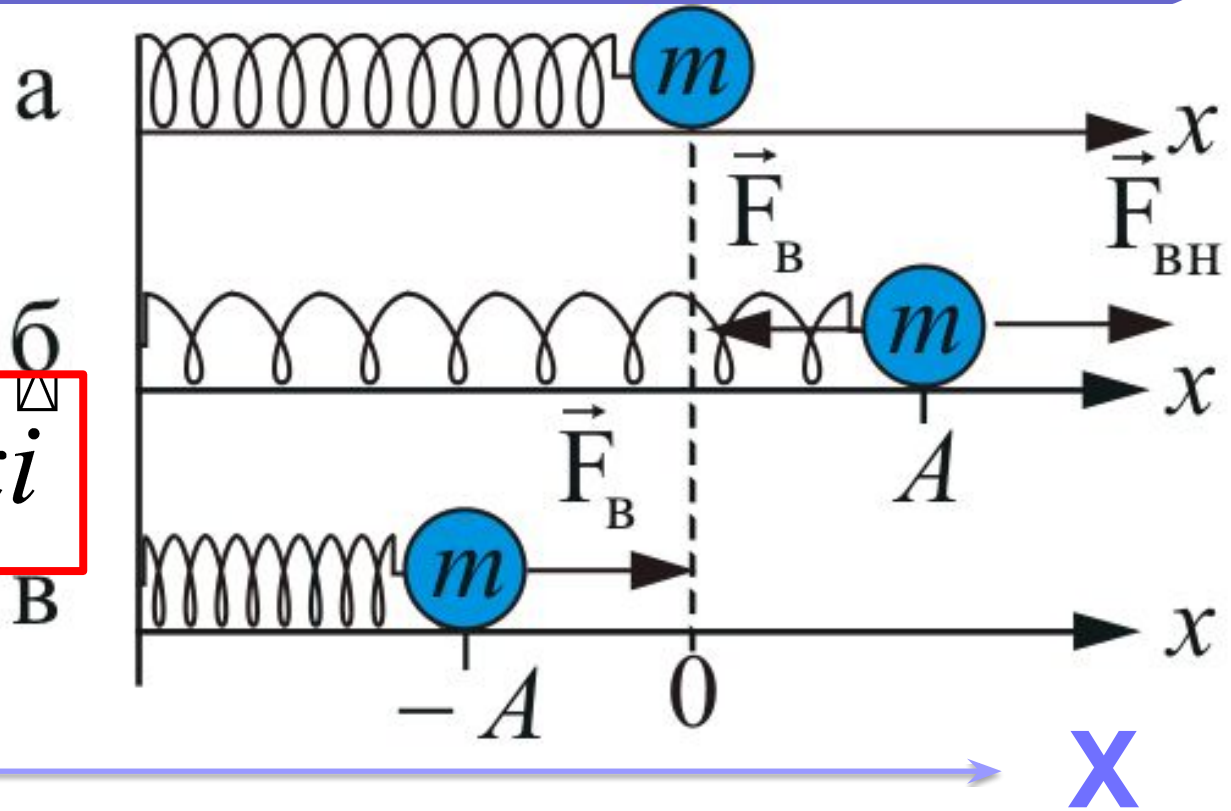


При **абсолютно упругом ударе шаров** (нет потерь энергии) **скорость и угол отклонения крайних шаров одинаковы, промежуточные шары - в покое.**

Движение шарика (без трения)

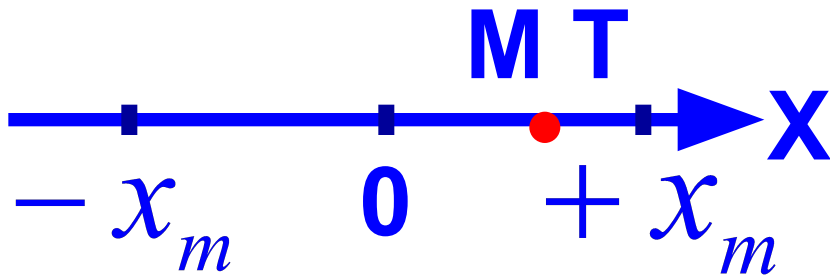
**Закон
Гука:**

$$\vec{F}_y = -kxi$$



$\vec{F}_{вн}$ - внешняя сила,
 $\vec{F}_в$ - внутренняя сила (упругости)

Механические колебания



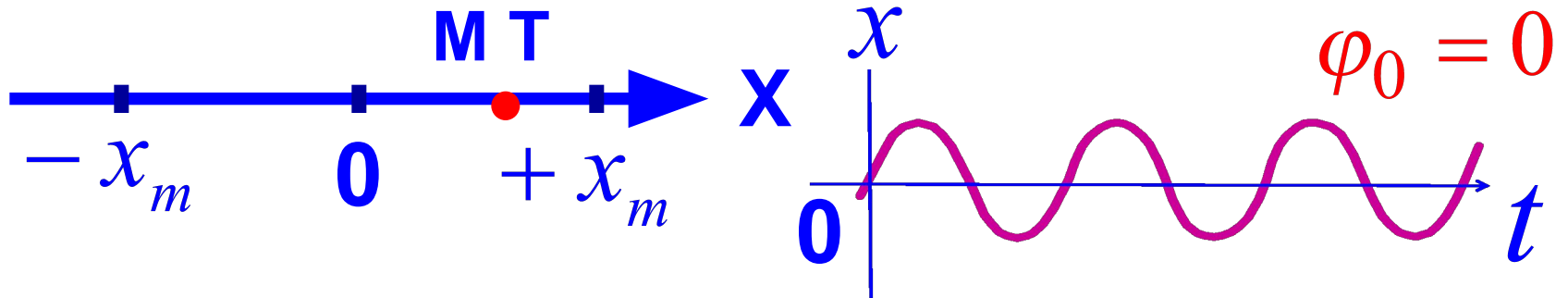
$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

x - координата (смещение) $M T$

в момент времени t ;

x_m - максимальное смещение
(амплитуда колебаний);

Механические колебания

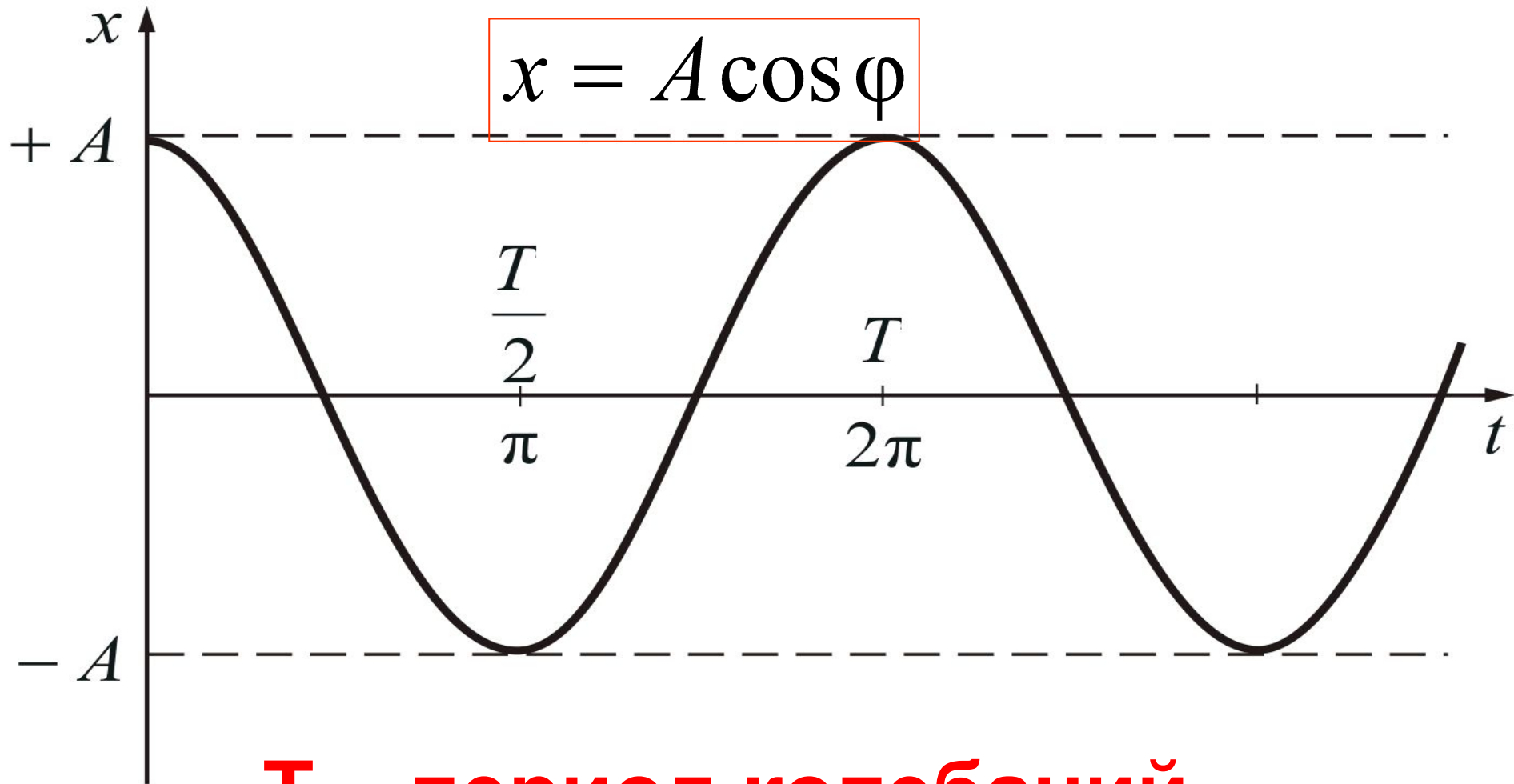


$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ω - циклическая частота;

φ_0 - начальная фаза колебаний;

$\omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний;



**T – период колебаний,
 φ – фаза колебаний,
 A – амплитуда колебаний.**

Скорость и ускорение

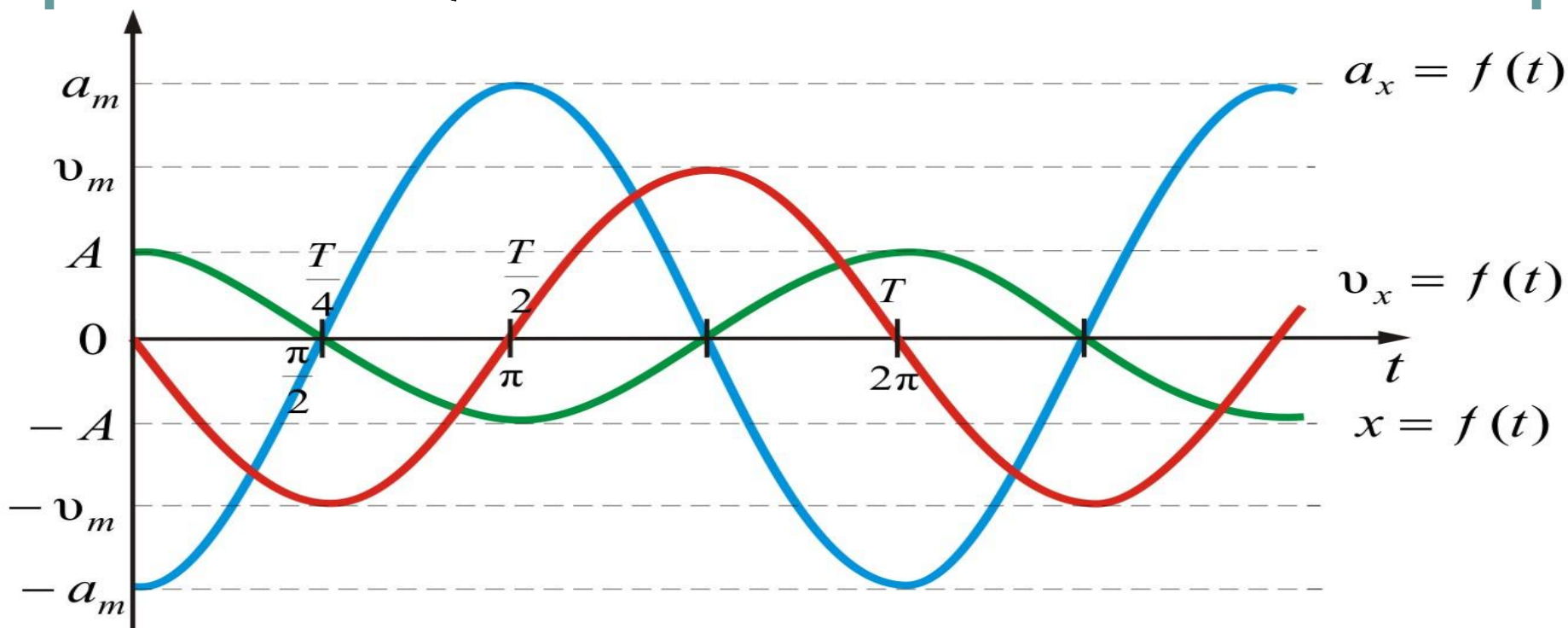
$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = \left(x_m \sin(\omega t + \varphi_0) \right)' =$$
$$= x_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) -$$

скорость МТ, совершающей ГК;

$$a_x = v_x' = -x_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) =$$
$$= -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) - \text{ускорение МТ.}$$

Графики смещения, скорости и ускорения

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \phi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$



Из графиков следует:

- **скорость** колебаний максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия;
- при максимальном смещении **скорость** равна нулю;
- **ускорение** равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.

Уравнение динамики

гармонических

колебаний

Второй закон Ньютона в проекции на ось OX:

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x.$$

Сила пропорциональна **смещению** и всегда направлена к положению равновесия. Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Этому условию удовлетворяют **упругие силы**. Силы иной природы, удовлетворяющие этому условию - **квазиупругие**.

Для **квазиупругой силы** $F_x = -kx$,
где k – коэффициент квазиупругой
силы.

Учитывая, что $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ **и** $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$, **получим уравнение динамики ГК, вызываемых упругими силами:**

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

- уравнение динамики гармонических колебаний.

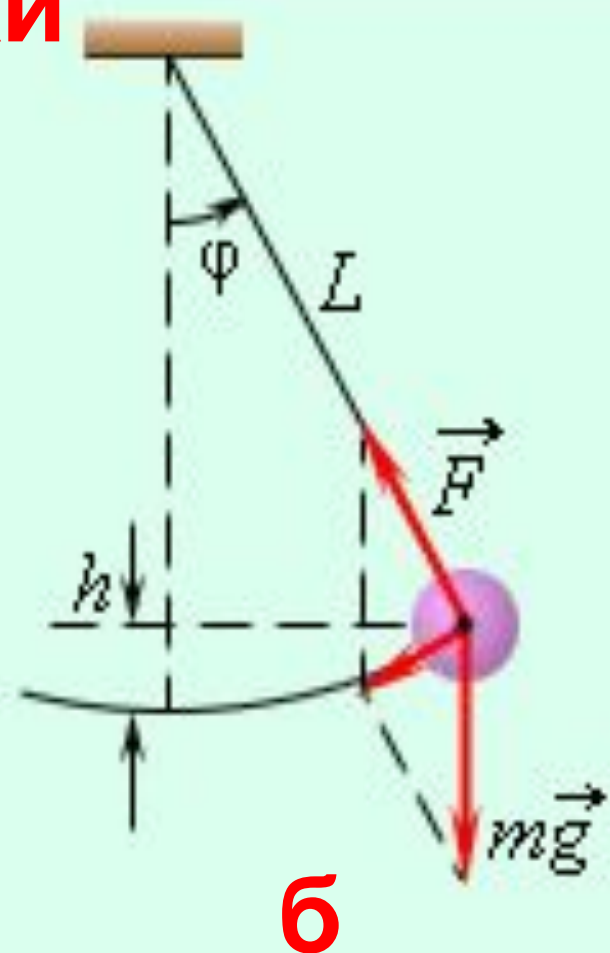
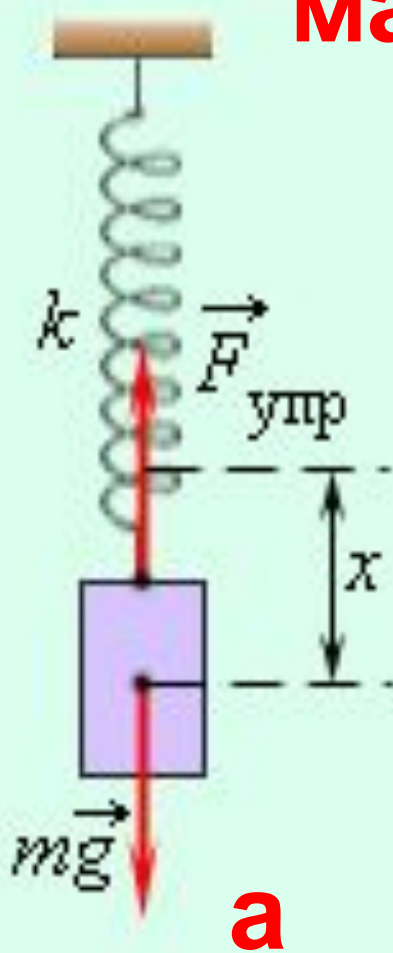
Его решение

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или}$$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

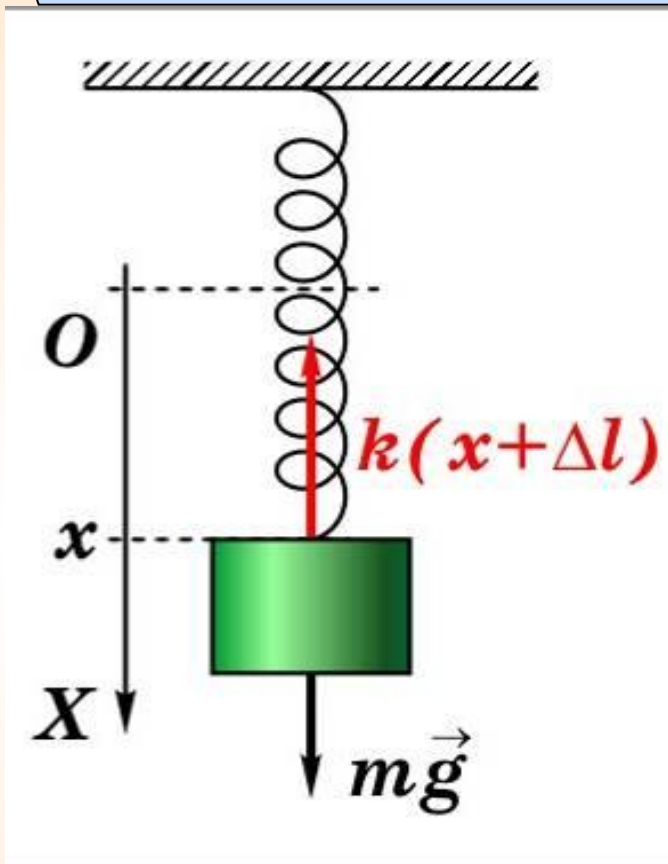
Механические колебательные системы:

маятники



пружинный(а), математический(б).

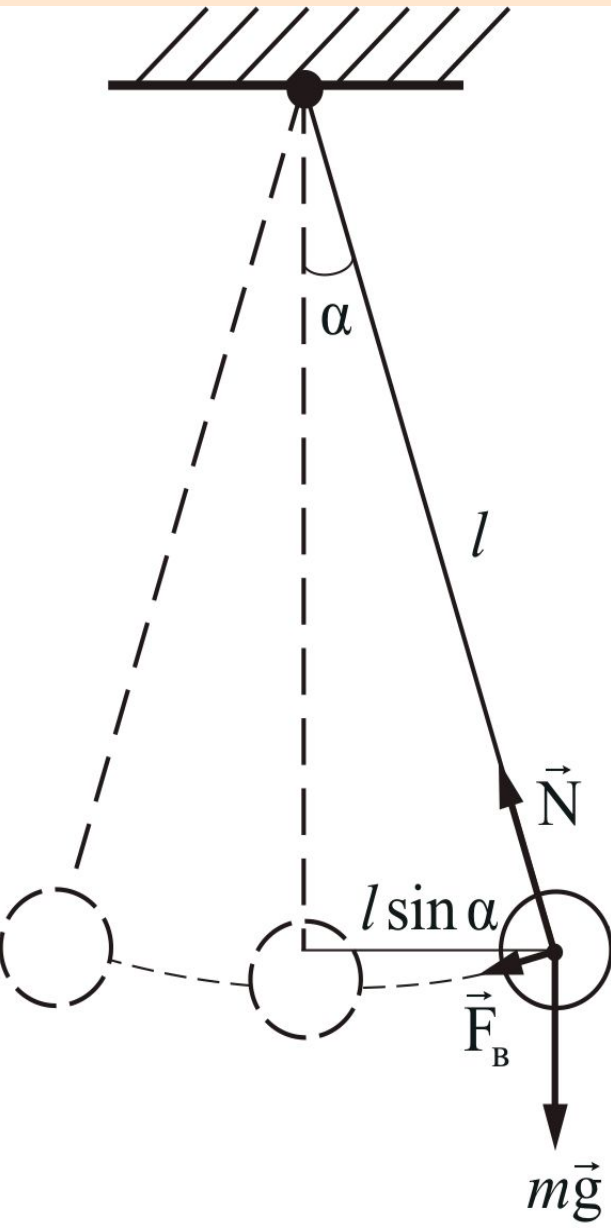
Гармонические осцилляторы



1. Пружинный маятник – груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k , совершающий гармонические колебания под действием упругой силы.

Циклическая частота и период собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



2. Математический маятник – идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити).

При отклонении маятника от вертикали, возникает вращающий момент

$$M = -mg\ell \sin \alpha.$$

Уравнение динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon.$$

Момент инерции маятника $J = m\ell^2$.

Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

Обозначим $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$.

Для малых углов $\sin \alpha \approx \alpha$.

Тогда $m\ell^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\ell \sin\alpha$, **или** $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\alpha = 0$.

Уравнение движения маятника

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

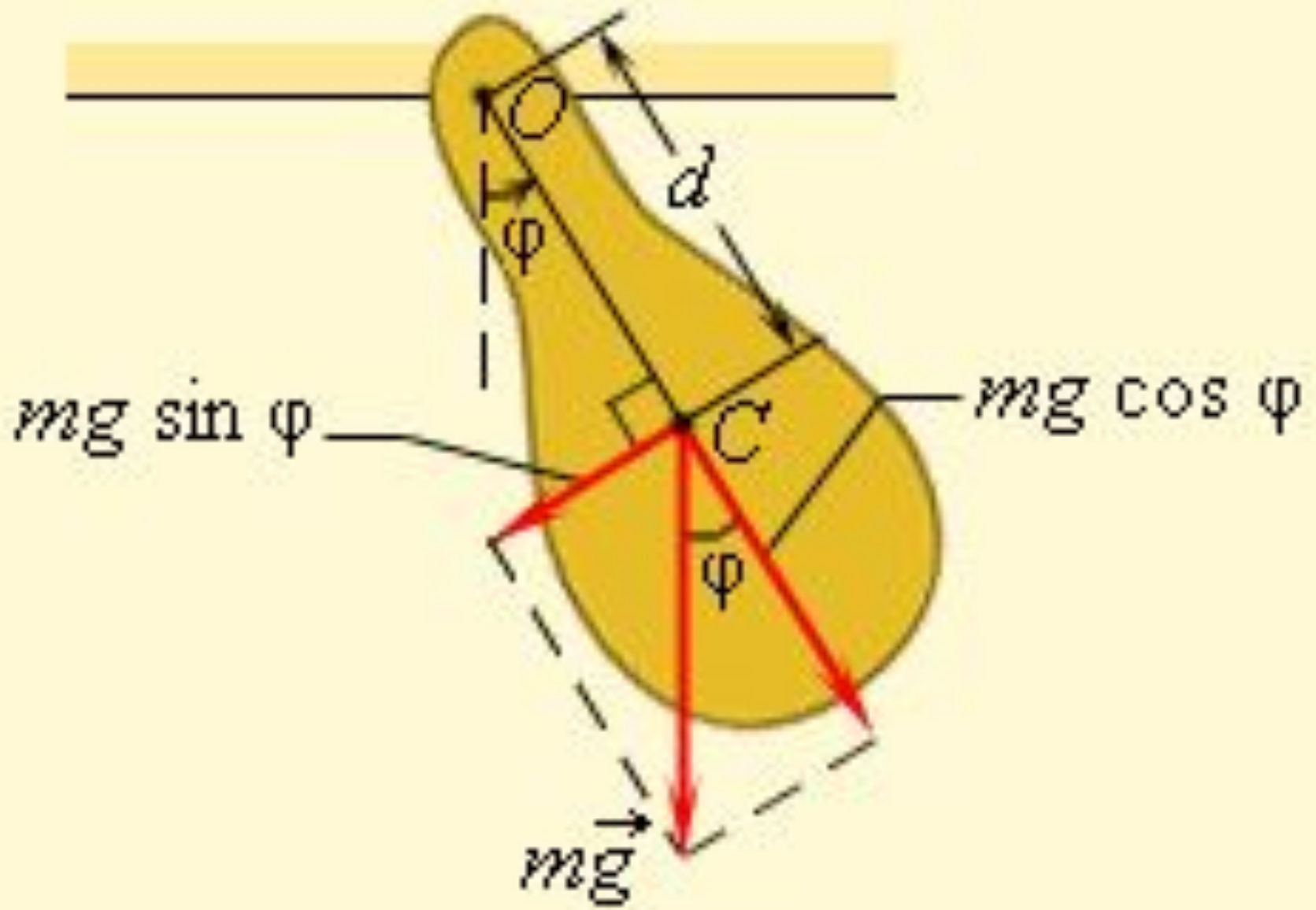
его решение $\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

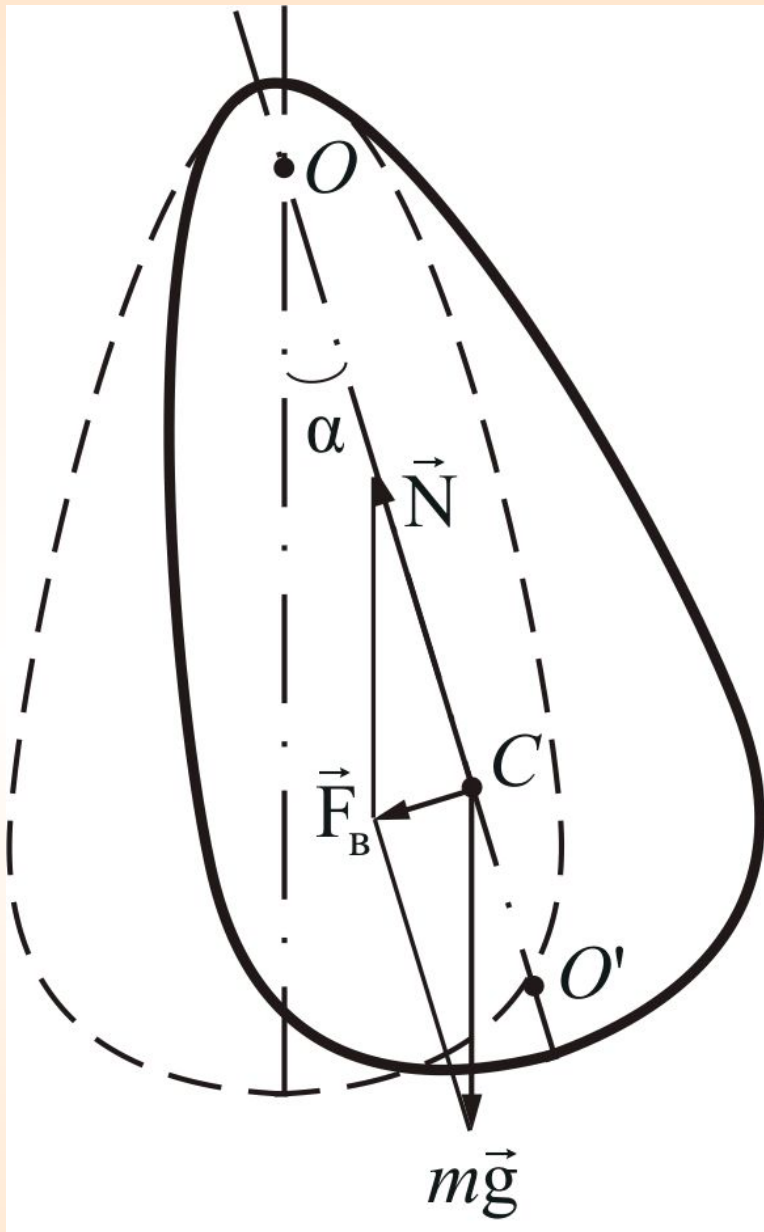
Циклическая частота и период собственных колебаний математического

маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Физический маятник





3. Физический маятник – твердое тело, совершающее под действием **силы тяжести** колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса **O**, не совпадающую с центром масс **C**.

Вращающий момент силы тяжести

$$M = -mg\ell \sin \alpha,$$

ℓ – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника ***O-C***,

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg\ell \sin \alpha, \quad \sin \alpha \approx \alpha,$$

J – момент инерции маятника относительно точки подвеса ***O***.

Уравнение динамики вращательного

движения $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0$, его решение

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

Циклическая частота и период собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\vartheta}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\vartheta}}.$$

Обозначим $\vartheta_{\text{пр}} = \frac{J}{m\vartheta}$ - приведенная длина физического маятника, тогда

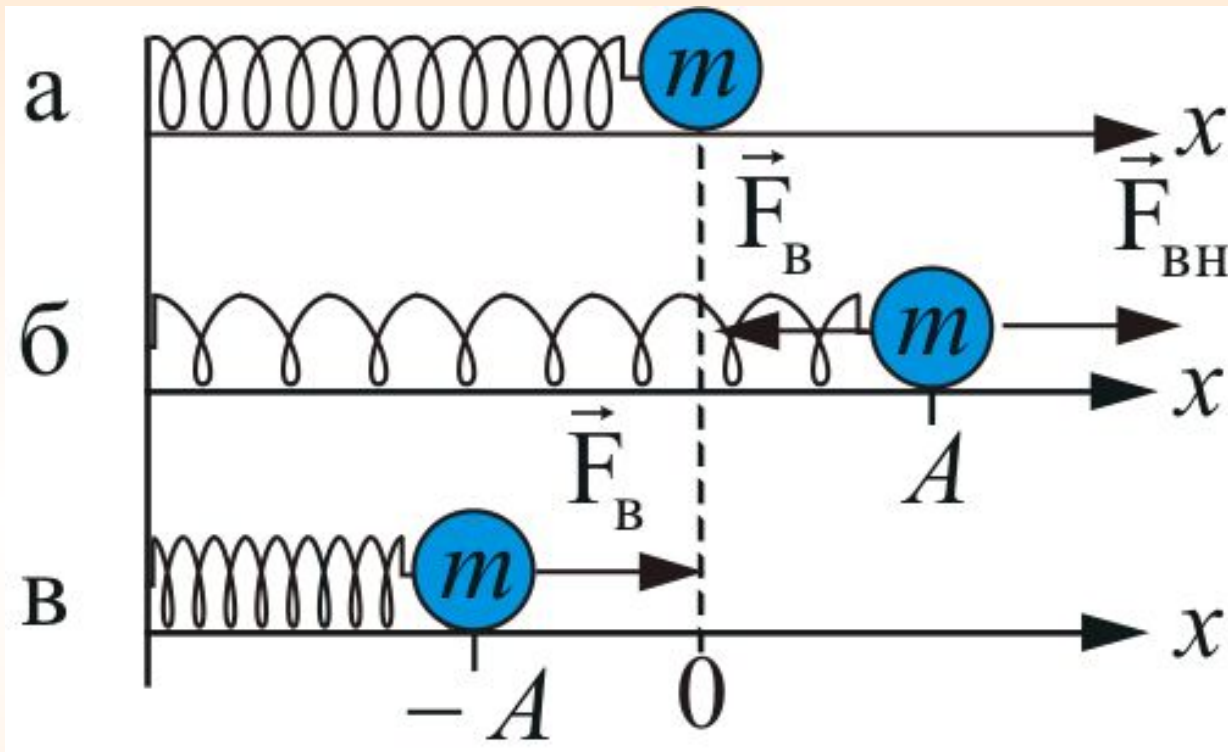
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\vartheta_{\text{пр}}}{g}}.$$

$\vartheta_{\text{пр}}$ — длина математического маятника,

период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Соотношения для математического и физического маятников справедливы для малых углов отклонения (меньше 15°), когда $\sin \alpha$ мало отличается от длины хорды $x = \alpha$ (меньше, чем на 1%).

Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела W_p , определяется работой, произведенной возвращающей силой.

$$F_x = -\frac{dW_p}{dx}, \quad dW_p = -Fdx = kx dx, \quad W_p = k \int_0^x x dx$$

Потенциальная энергия: $W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$

Кинетическая энергия: $W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$

Полная энергия: $W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2.$

Полная механическая энергия тела, совершающего ГК, пропорциональна квадрату амплитуды.

При ГК, совершающихся под действием консервативных сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но их сумма в любой момент времени постоянна.

Колебательный контур

- Это электрическая цепь, состоящая из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L .
- В нем возникают электромагнитные колебания: изменяются по гармоническому закону

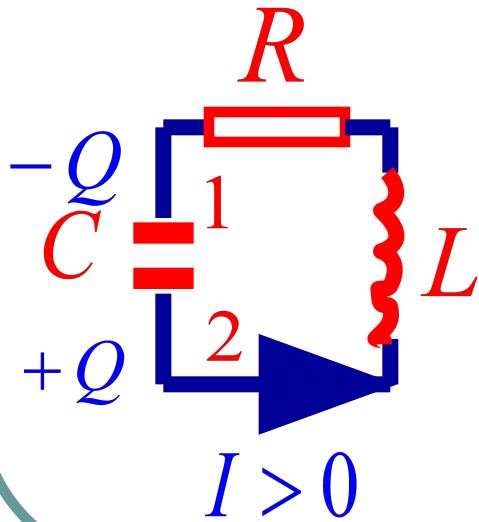
$$Q, I, U, E, B, W_e, W_m.$$

Свободные колебания

Закон Ома для участка **1-R-L-2**:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_c;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{Q}{C}; \quad \varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}; \quad I = \frac{dQ}{dt};$$



$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 Q}{dt^2};$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Незатухающие свободные колебания

$$R = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0;$$

ω_0^2

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

$$Q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Затухающие колебания

$$R \neq 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0;$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0;$$

$$Q = Q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

График затухающих колебаний

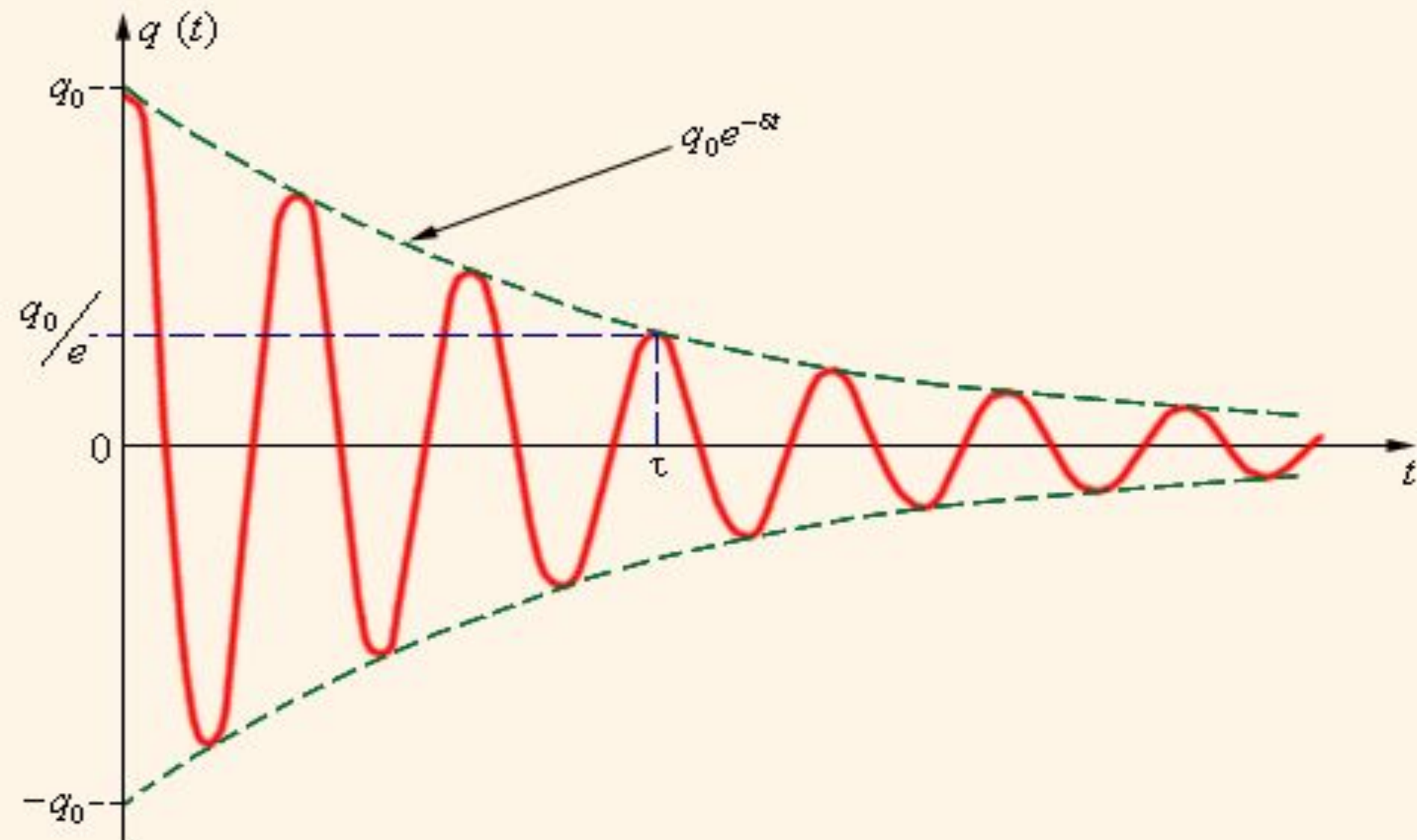
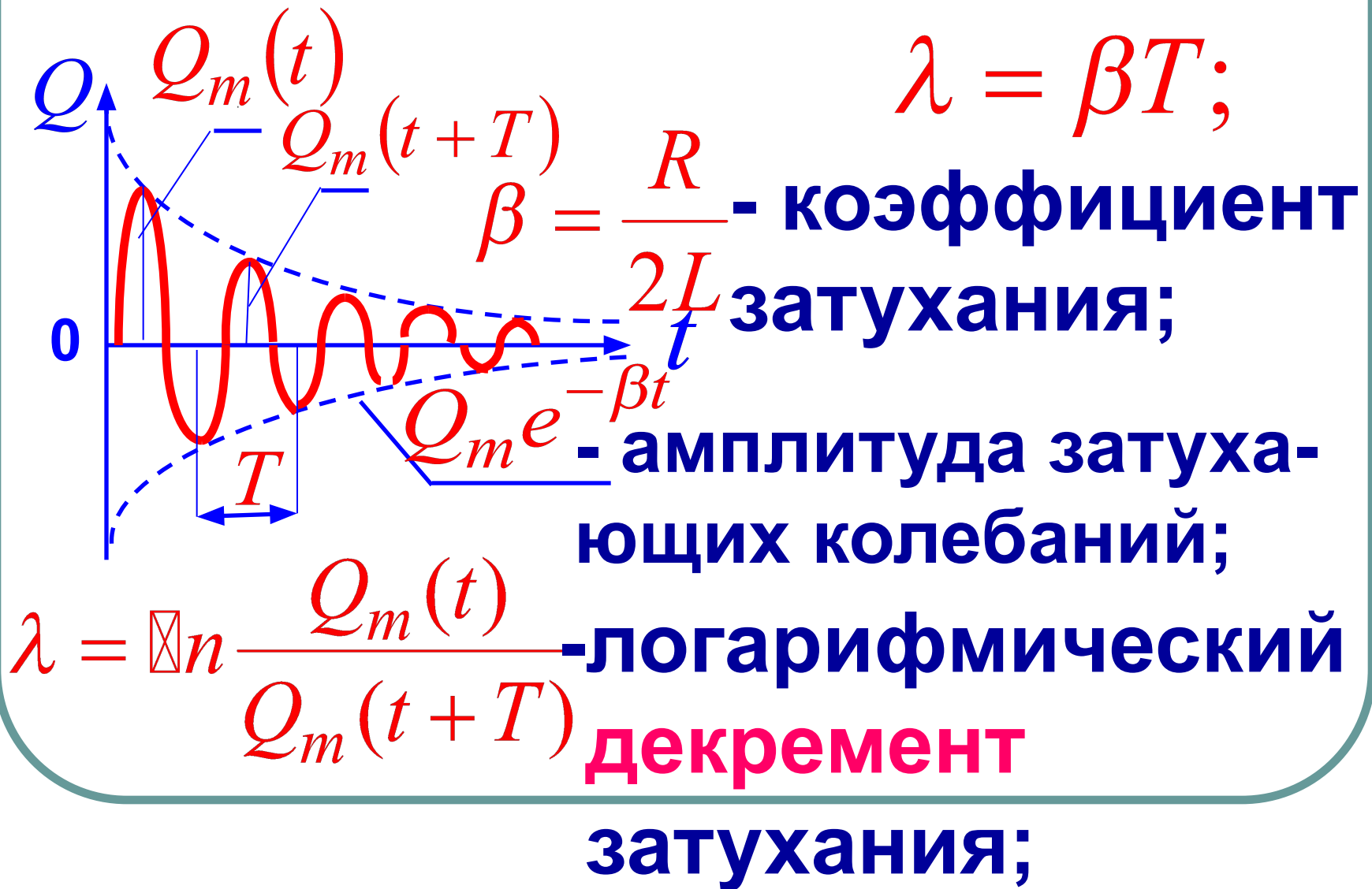


График затухающих колебаний



$$\lambda = \beta T;$$

$\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания;

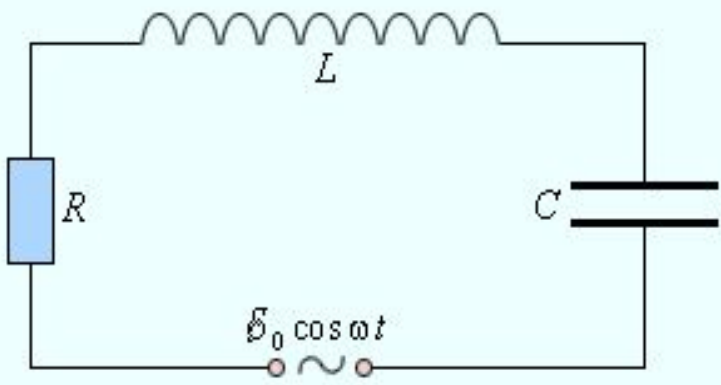
$Q_m e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний;

$\lambda = \ln \frac{Q_m(t)}{Q_m(t+T)}$ - логарифмический декремент

затухания;

Вынужденные колебания

Для получения **незатухающих** колебаний в контур включают источник переменной ЭДС.



$$IR = -\frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} + \varepsilon(t);$$
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \Omega t;$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \Omega t$$

$$Q = Q_m \cos(\Omega t + \varphi_0) -$$

решение неоднородного уравнения,

где $Q_m = \frac{\varepsilon_m}{\Omega \sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2}}$

- амплитуда,

$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{R}{\Omega L - 1/(\Omega C)}$ **- начальная фаза**

установившихся вынужденных колебаний.

**Сопротивление
уменьшается**

**Явление
резонанса**

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**- добротность
контура.**

$$\Omega_p \approx \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$$

**- резонансная частота при
малых затуханиях примерно
равна собственной частоте.**

