Лекция № 1

Колебания

Литература

Т. И. Трофимова. Курс физики §§140 – 148;

А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. Курс физики гл. 27, 28.

Н. П. Калашников,
Н. М. Кожевников,
4 ДЕ, задания 17 – 20.

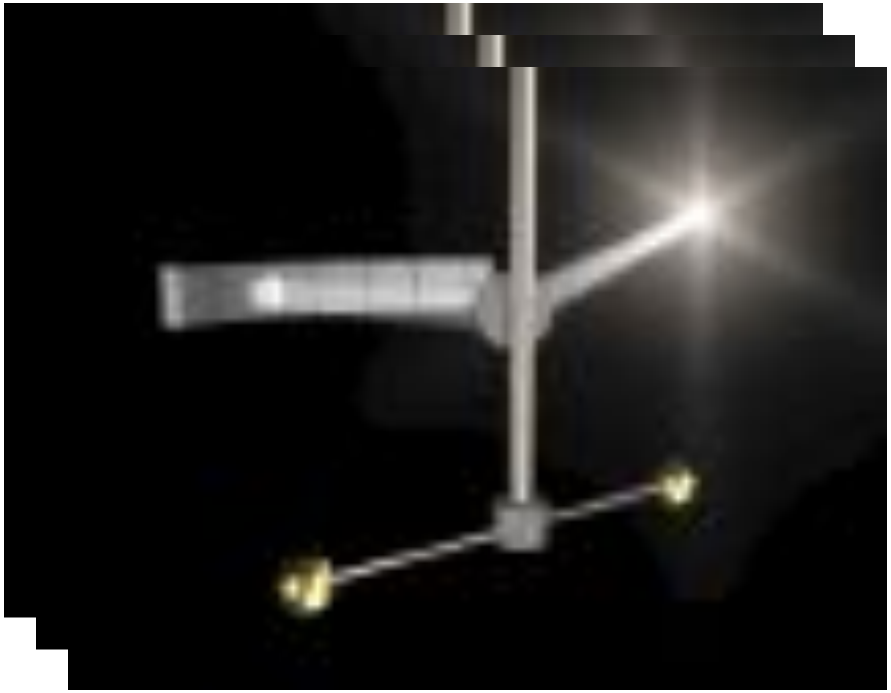
Колебания

- - процессы, повторяющиеся во времени, их тип определяет природа процесса.
- Различают колебания:
  - механические, электромагнитные,
  - электромеханические и другие.

Колебания

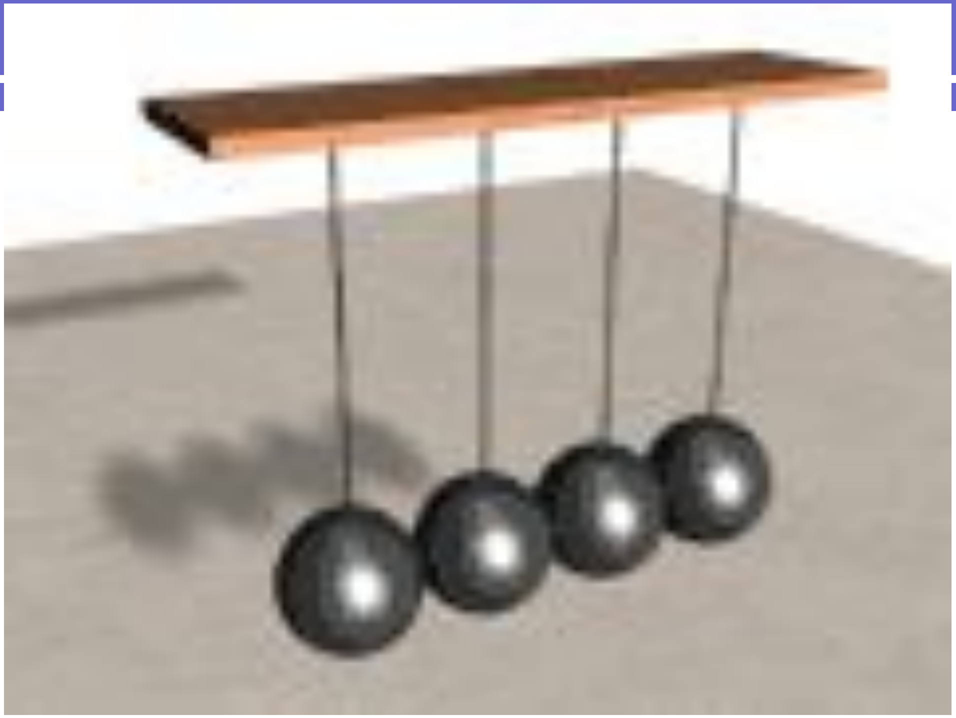
- **Периодические - повторяются через равные промежутки времени.**
  - **Гармонические - описываются законом синуса или косинуса.**
  -

Механические колебания



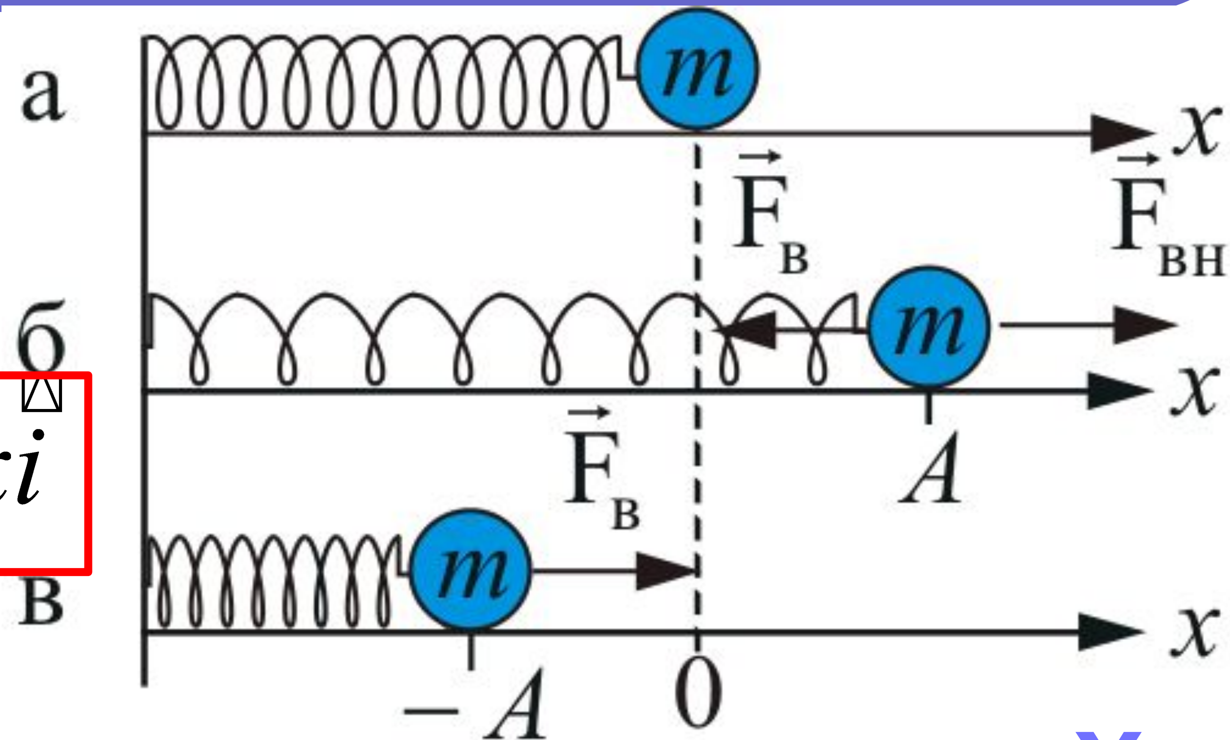
Опыт Кавендиша

Механические колебания



При **абсолютно упругом ударе** шаров (нет потерь энергии) скорость и угол отклонения крайних шаров одинаковы, промежуточные шары - в покое.

Движение шарика (без трения)



Закон Гука:

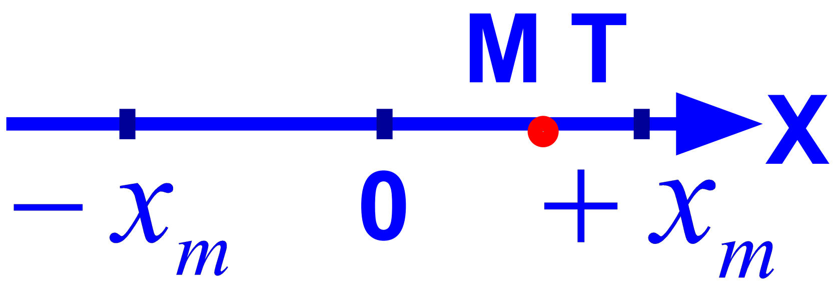
$$\boxed{\vec{F}_y = -kx\vec{i}}$$

0 $\vec{i}$ X

$\vec{F}_{вн}$ - внешняя сила,

$\vec{F}_в$ - внутренняя сила (упругости)

Механические колебания

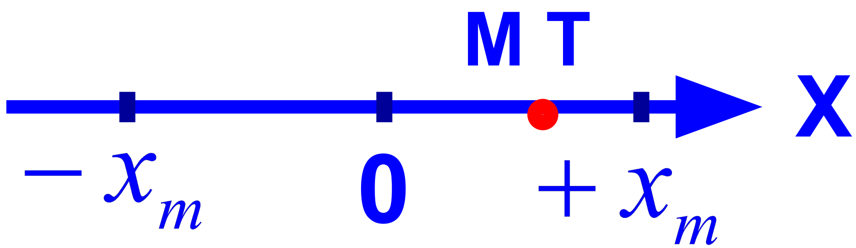


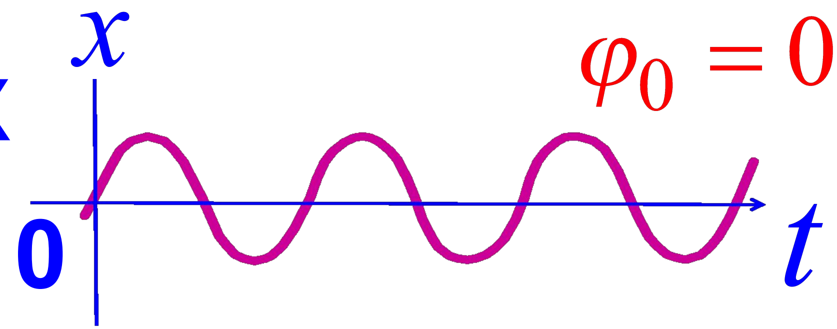
$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

x **- координата (смещение) МТ в момент времени t;**

x_m **- максимальное смещение (амплитуда колебаний);**

Механические колебания





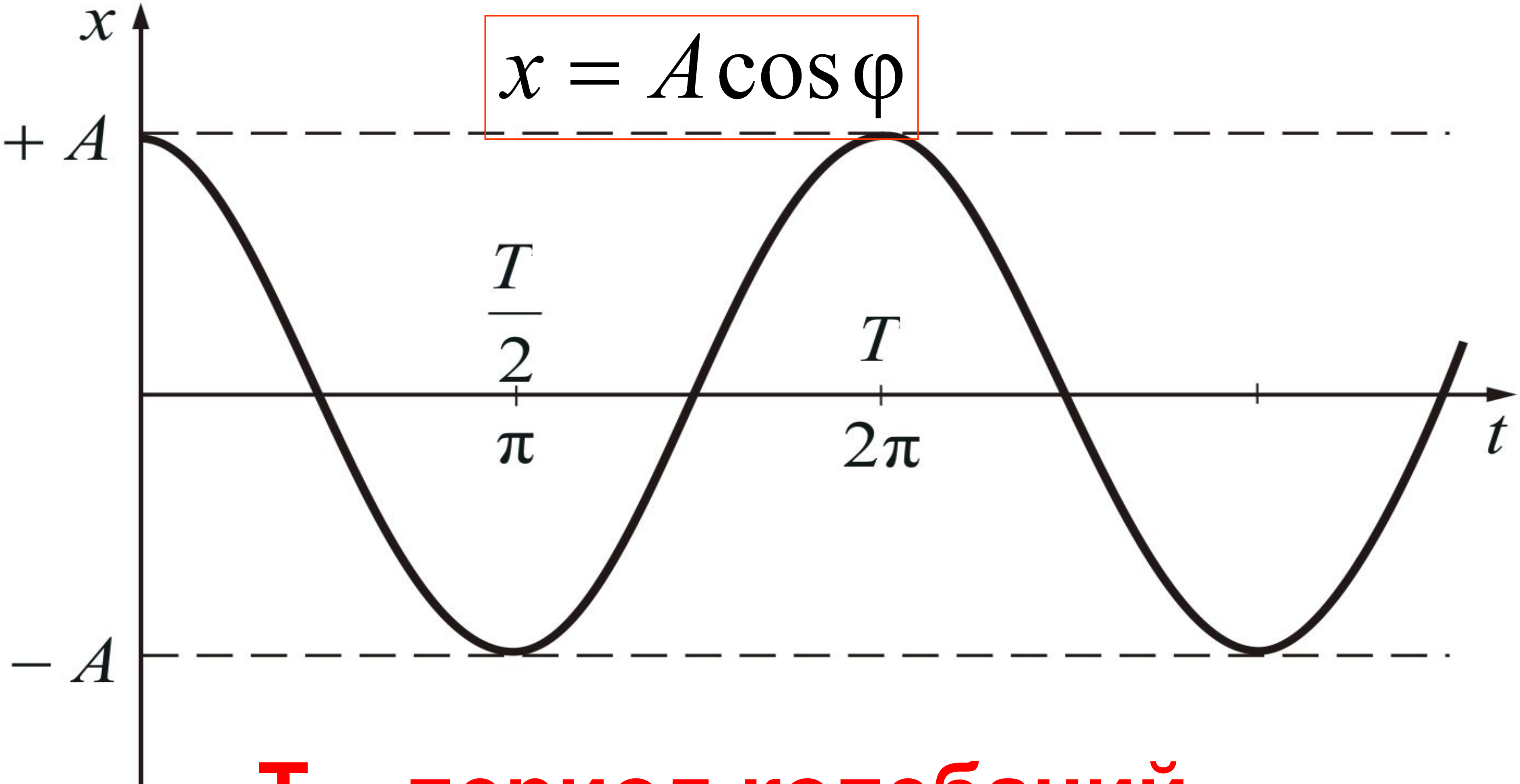
$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ω - циклическая частота;

φ_0 - начальная фаза колебаний;

$\omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний;

$$x = A\cos\varphi$$



T – период колебаний,
φ – фаза колебаний,
A – амплитуда колебаний.

Скорость и ускорение

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = x' = \left(x_m \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)\right)' =$$

$$= x_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = \upsilon_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) -$$

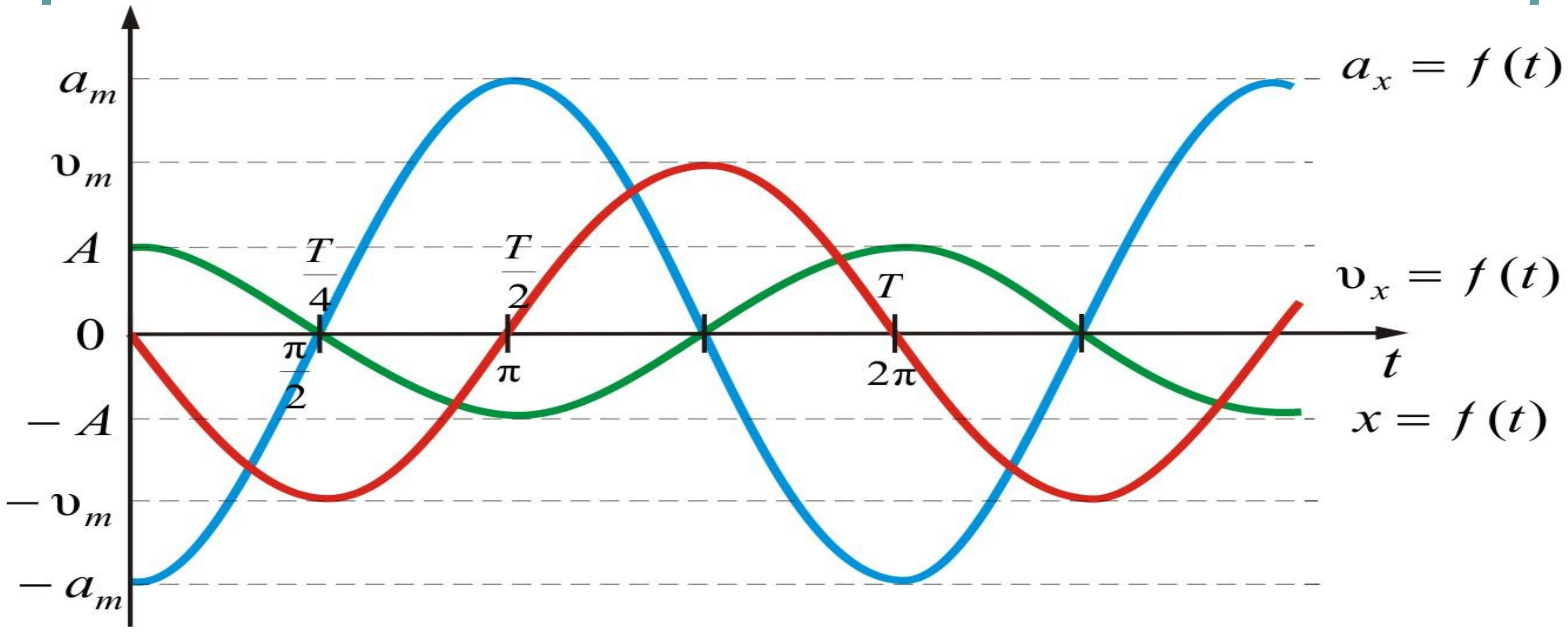
скорость МТ, совершающей ГК;

$$a_x = \upsilon_x' = -x_m \omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) =$$

$$= -a_m \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) -$$ **ускорение МТ.**

Графики смещения, скорости и ускорения

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \phi) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \phi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$



Из графиков следует:

- скорость колебаний максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия;
- при максимальном смещении скорость равна нулю;
- ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.

Уравнение динамики гармонических колебаний

Второй закон Ньютона в проекции на ось ОХ:

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x.$$

Сила **пропорциональна** ***смещению*** **и всегда направлена к положению равновесия. Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.**

Этому условию удовлетворяют ***упругие силы*****. Силы иной природы, удовлетворяющие этому условию -** ***квазиупругие*****.**

Для квазиупругой силы $F_x = -kx,$

где k **– коэффициент квазиупругой силы.**

Учитывая, что $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ **и** $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ **, получим уравнение динамики ГК, вызываемых упругими силами:**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

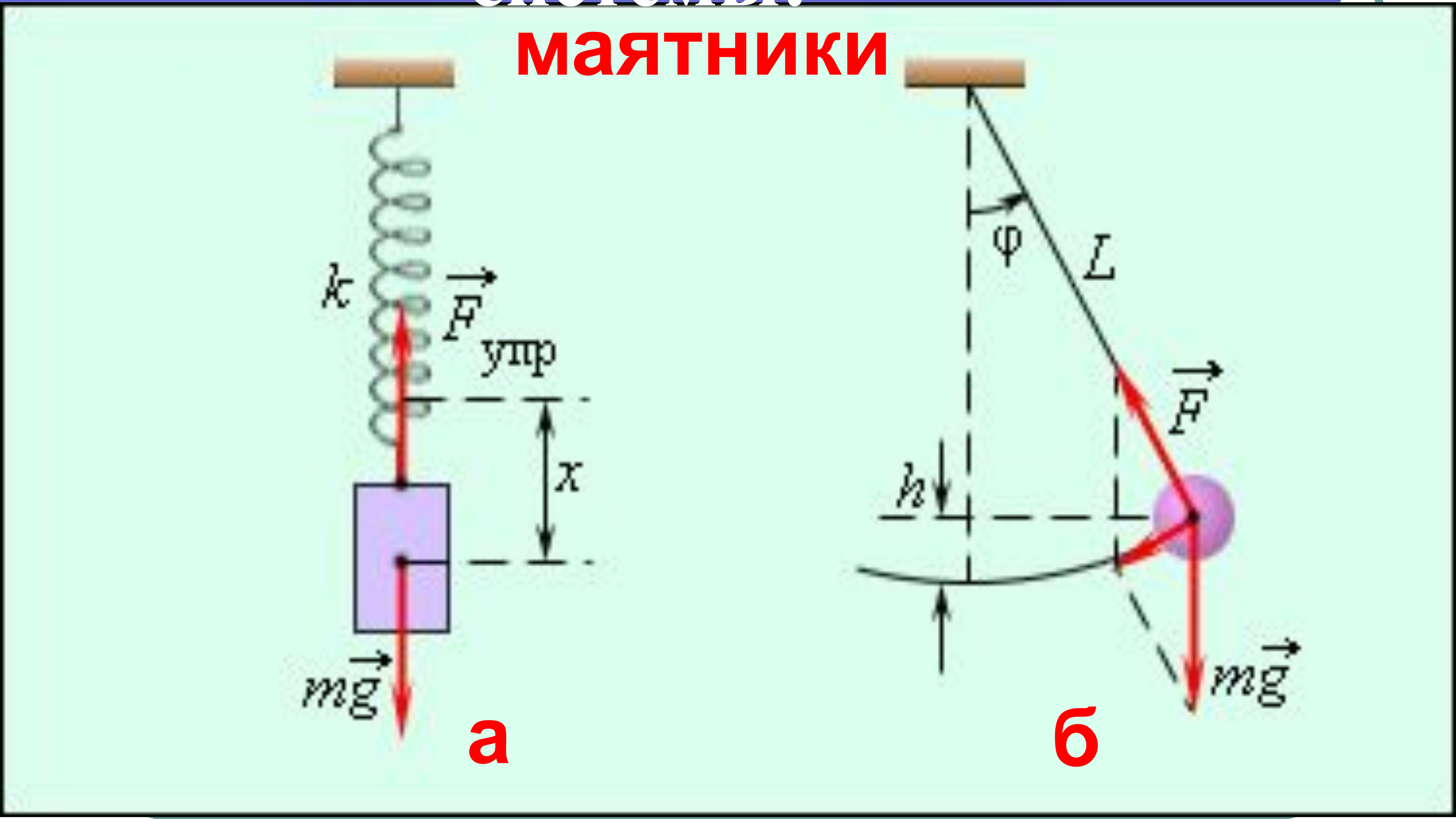
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

- уравнение динамики гармонических колебаний.

Его решение $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ **или**

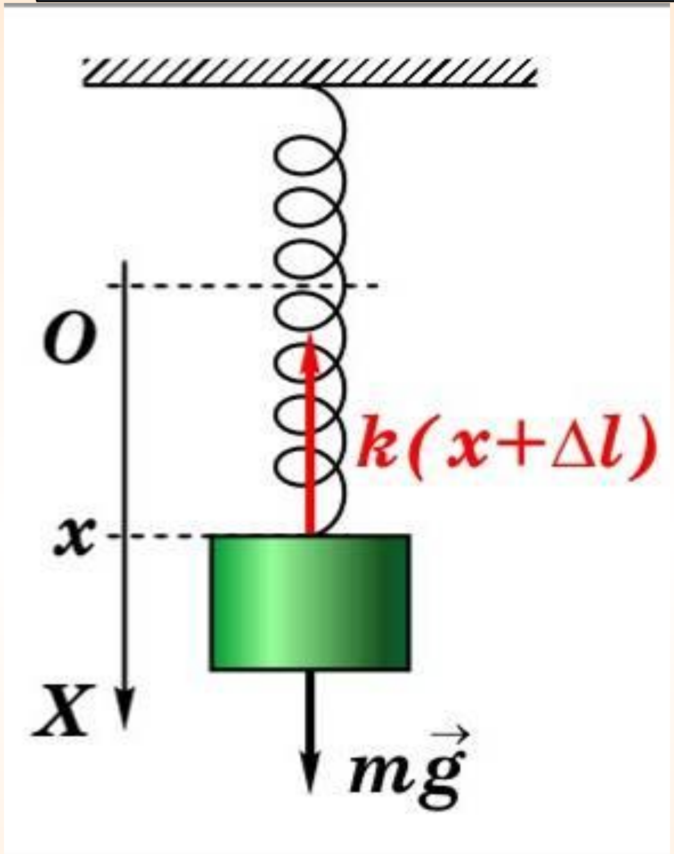
$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Механические колебательные системы:



пружинный(а), математический(б).

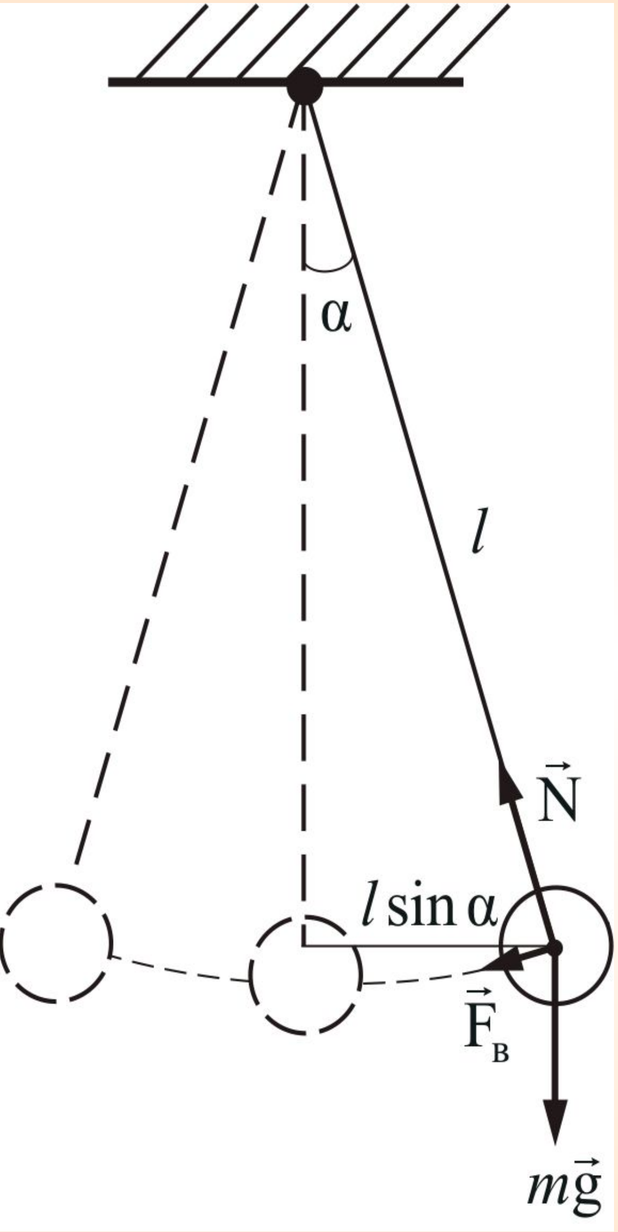
Гармонические осцилляторы



1. Пружинный маятник – груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием **упругой силы**.

Циклическая частота и период собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$



2. Математический маятник – **идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити).**

При отклонении маятника от вертикали, возникает вращающий момент

$$M = -mg\ell\sin\alpha.$$

Уравнение динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon.$$

Момент инерции маятника $J = m\ell^2.$

Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}.$

Обозначим $\dfrac{g}{\ell} = \omega_0^2.$

Для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha.$

Тогда $m\ell^2 \dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell \sin\alpha$ **, или** $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{\ell}\sin\alpha = 0.$

Уравнение движения маятника

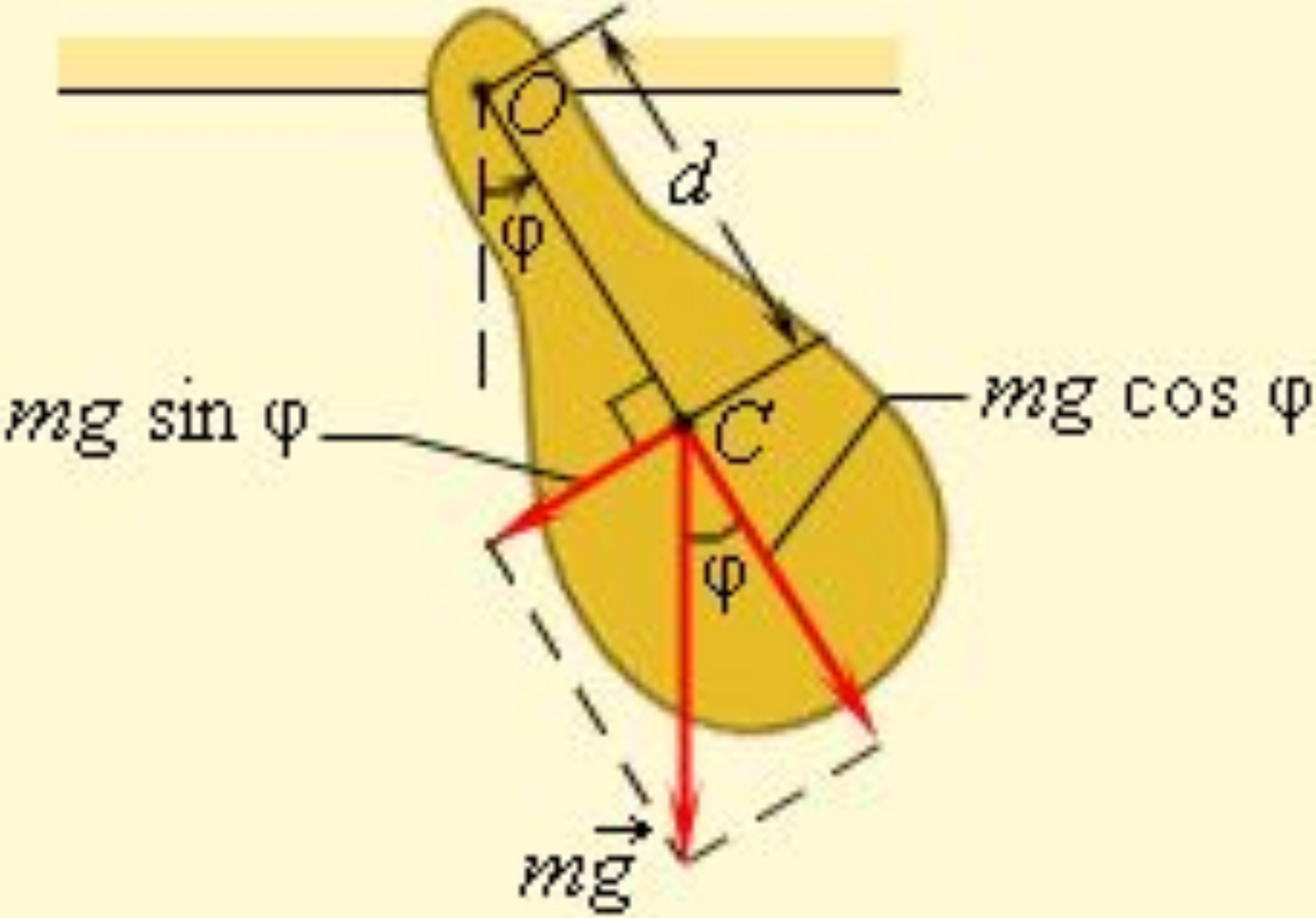
$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

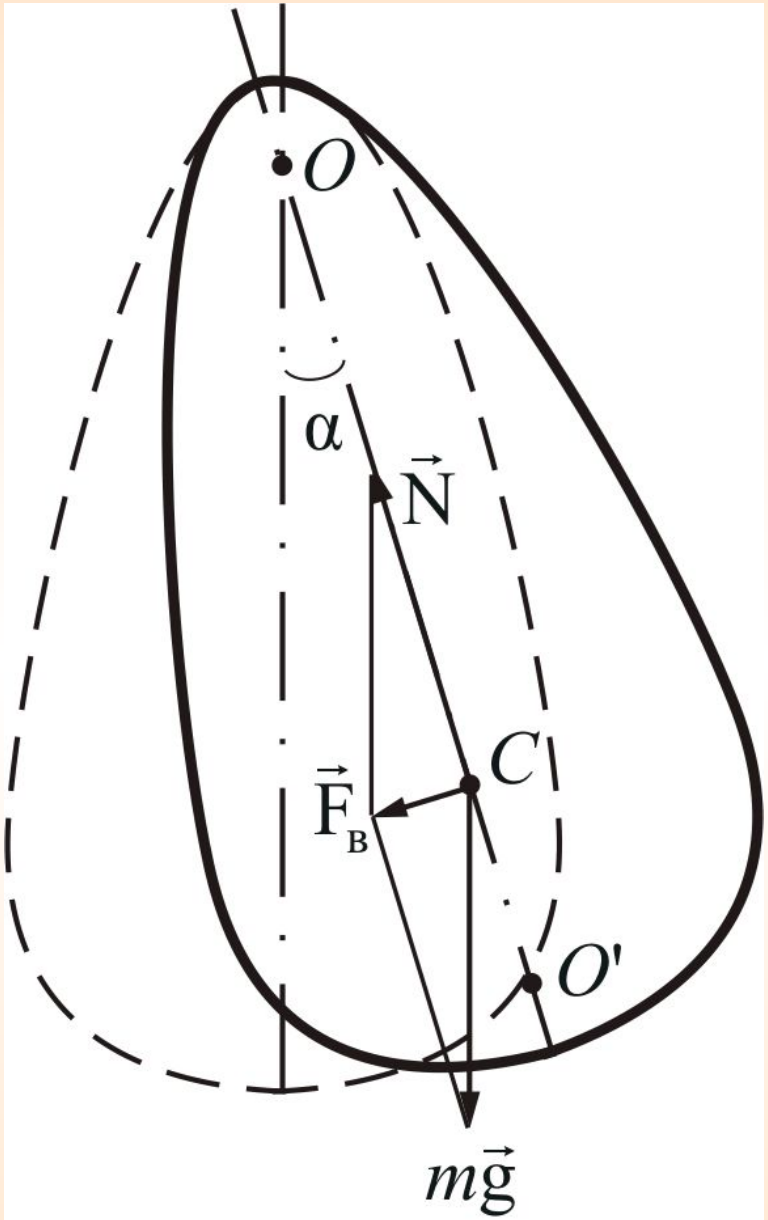
его решение $\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$

Циклическая частота и период собственных колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Физический маятник





3. Физический маятник – **твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O, не совпадающую с центром масс C.**

Вращающий момент силы тяжести

$$M = -mg\ell\sin\alpha,$$

ℓ – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника **O-C**,

$$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell\sin\alpha, \qquad \sin\alpha \approx \alpha,$$

J – **момент инерции маятника относительно точки подвеса *O*.**

Уравнение динамики вращательного движения $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$ **его решение**

$$\alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

Циклическая частота и период собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}.$$

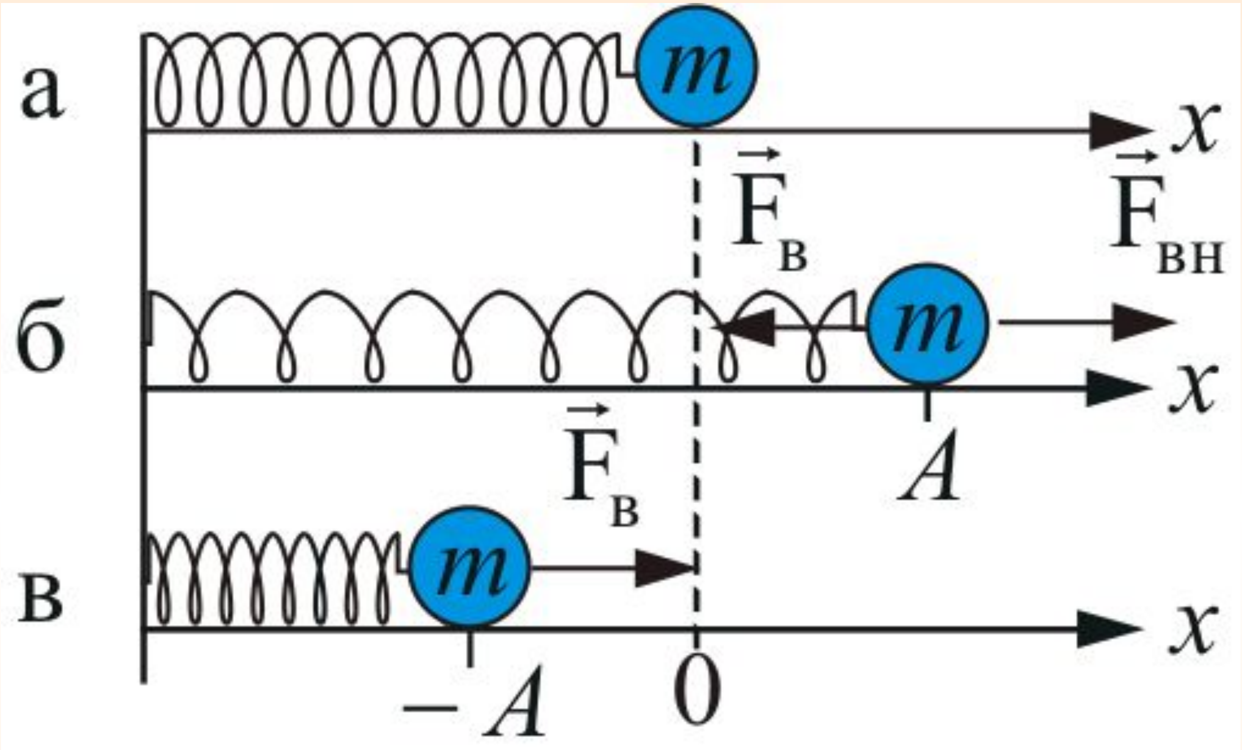
Обозначим $\ell_{\text{пр}} = \dfrac{J}{m\ell}$ **- приведенная длина физического маятника, тогда**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}}}{g}}.$$

$\ell_{\text{пр}}$ **–длина математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.**

Соотношения для математического и физического маятников справедливы для малых углов отклонения (меньше 15°), когда $\square \sin\alpha$ мало отличается от длины хорды $x = \square\alpha$ (меньше, чем на 1%).

Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела W_p, **определяется работой, произведенной возвращающей силой.**

$$F_x = -\frac{dW_p}{dx}, \; dW_p = -F dx = kx dx, \; W_p = k\int_0^x x dx$$

Потенциальная энергия:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} k\, x_m{}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Кинетическая энергия:

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 x_m{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная энергия:

$$W = W_p + W_к = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_m{}^2 = \frac{1}{2} k\, x_m^2.$$

Полная механическая энергия тела, совершающего ГК, пропорциональна квадрату амплитуды.

При ГК, совершающихся под действием консервативных сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но их сумма в любой момент времени постоянна.

Колебательный контур

- Это электрическая цепь, состоя-щая из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L.
- В нем возникают электромагнит-ные колебания: изменяются по гармоническому закону

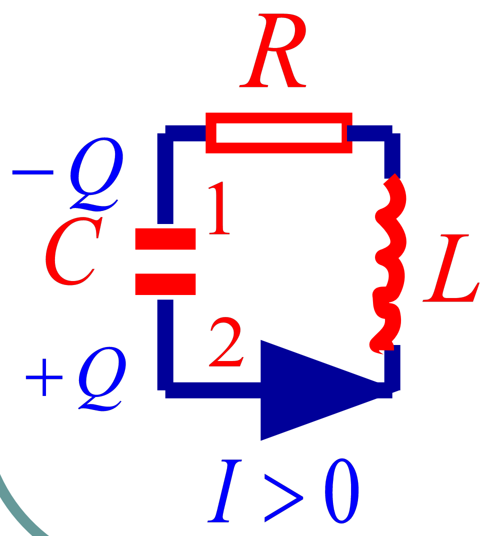
$$Q, I, U, E, B, W_e, W_m.$$

Свободные колебания

Закон Ома для участка 1-R-L-2:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_c;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{Q}{C}; \quad \varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}; \quad I = \frac{dQ}{dt};$$



$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2};$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Незатухающие свободные колебания

$\boxed{R = 0}$ $$\frac{d^2Q}{dt^2} + \boxed{\frac{1}{LC}}Q = 0;$$

ω_0^2

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

$$Q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Затухающие колебания

$$\boxed{R \neq 0}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \boxed{\frac{R}{L}}\frac{dQ}{dt} + \boxed{\frac{1}{LC}}Q = 0;$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + {\omega_0}^2 Q = 0;$$

$$Q = Q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}}.$$

График затухающих колебаний

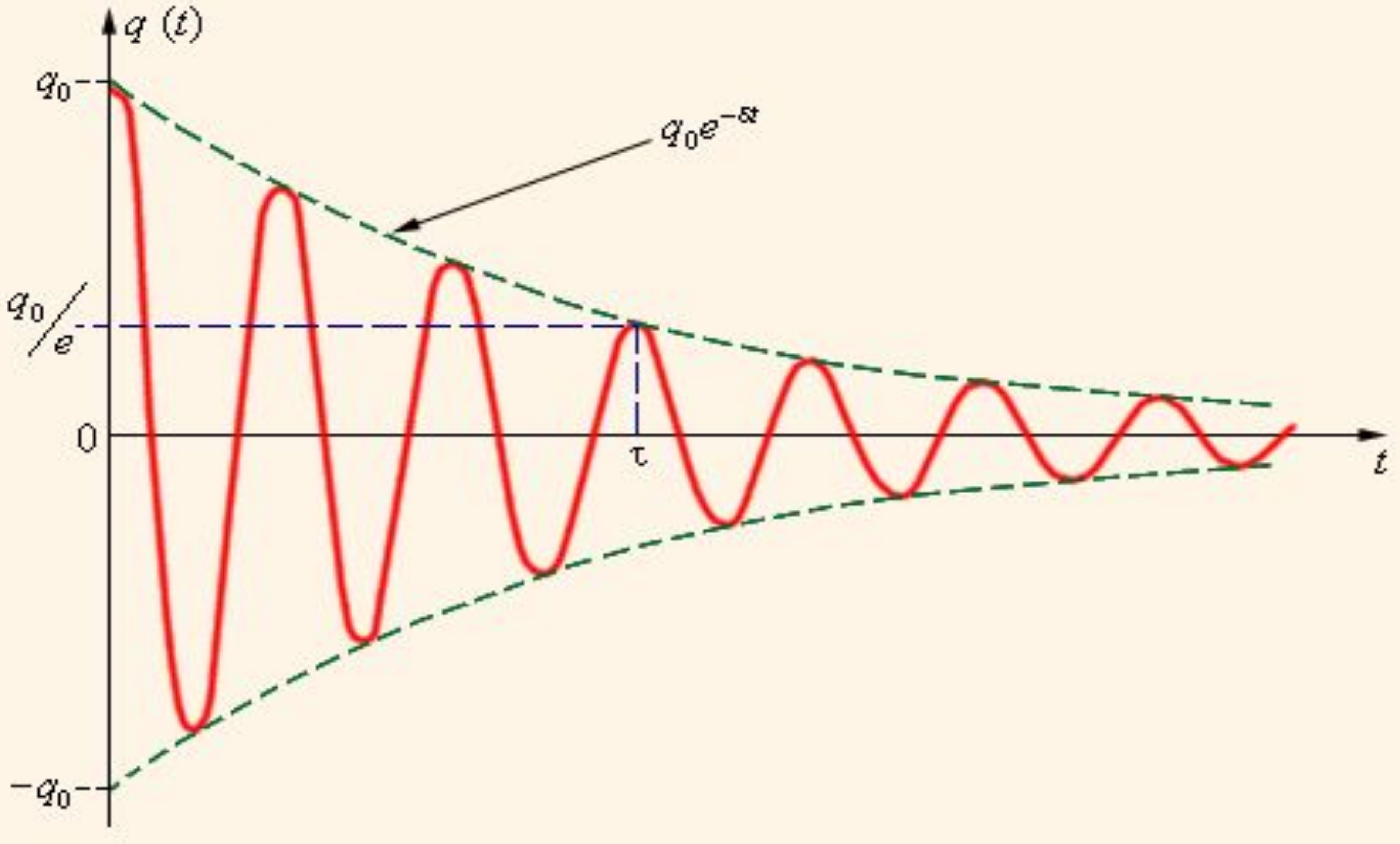
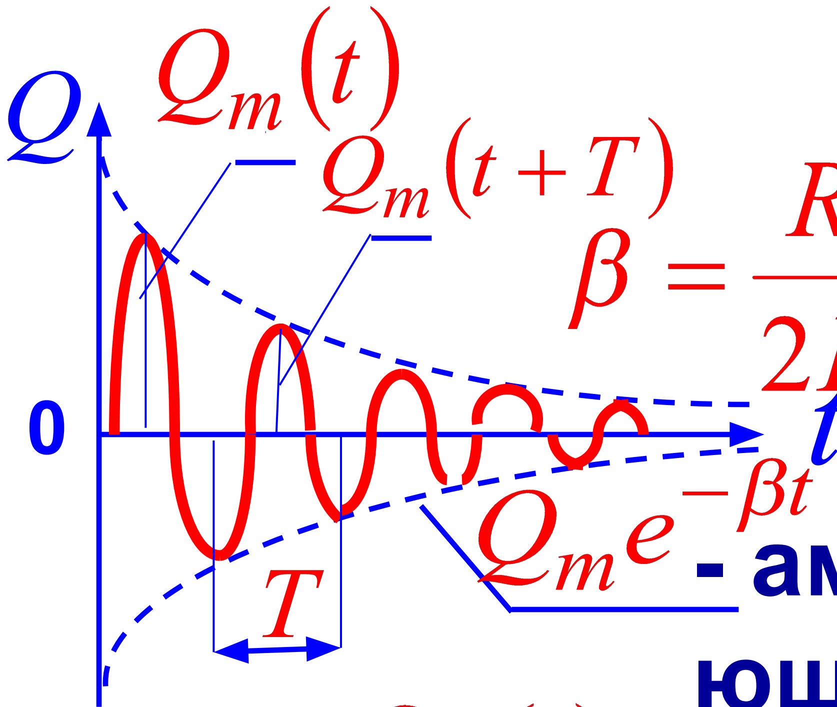


График затухающих колебаний



$$\lambda = \beta T;$$

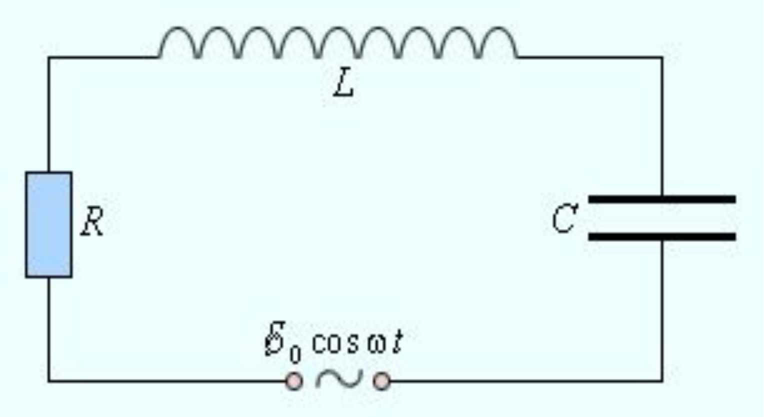
$$\beta = \frac{R}{2L}$$ **- коэффициент затухания;**

- амплитуда затухающих колебаний;

$$\lambda = \ln \frac{Q_m(t)}{Q_m(t+T)}$$ **-логарифмический декремент затухания;**

Вынужденные колебания

Для получения незатухающих колебаний в контур включают источник переменной ЭДС.



$$IR = -\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} + \varepsilon(t);$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos\Omega t;$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0{}^2 Q = \frac{\varepsilon_m}{L}\cos\Omega t$$

$$Q = Q_m \cos(\Omega t + \varphi_0) -$$

решение неоднородного уравнения,

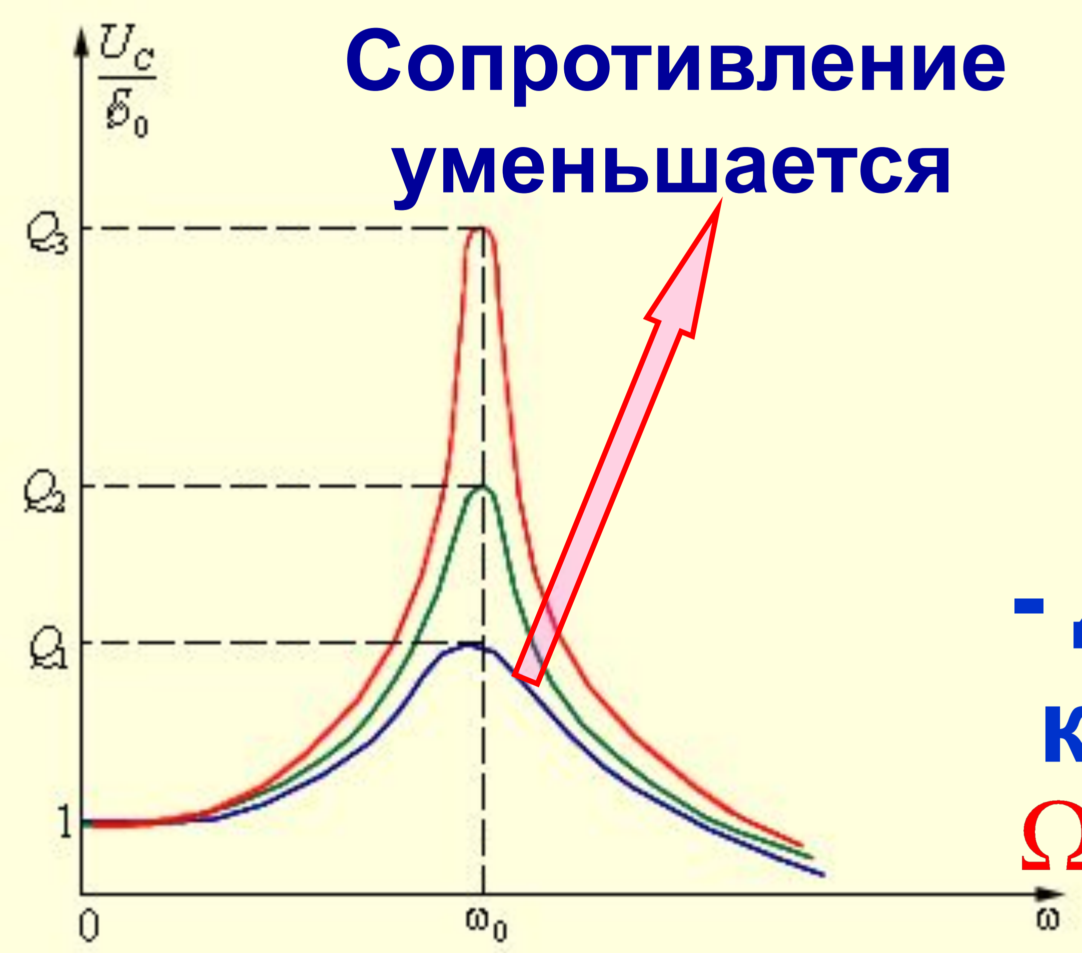
где $$Q_m = \frac{\varepsilon_m}{\Omega\sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2}}$$

- амплитуда,

$$tg\varphi_0 = -\frac{R}{\Omega L - 1/(\Omega C)}$$ **- начальная фаза**

установившихся вынужденных колебаний.

Явление резонанса



$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- добротность контура.

$$\Omega_p \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

- резонансная частота при малых затуханиях примерно равна собственной частоте.