Методы интегрирования

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Выполнила студентка группы 11с

Попова Дарья

Вычислить первообразные функции мы можем не всегда, но задача на дифференцирование может быть решена для любой функции. Именно поэтому единого метода интегрирования, который можно использовать для любых типов вычислений, не существует.

Основные методы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования*
2. *Метод внесение под знак дифференциала*
3. *Метод замены переменной*
4. *Метод интегрирования по частям*

Метод непосредственного интегрирования

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

- **Основной метод вычисления первообразной функции – это непосредственное интегрирование. Это действие основано на свойствах неопределенного интеграла, и для вычислений нам понадобится таблица первообразных.**

Пример непосредственного интегрирования

$$\int (e^x + 2x - 6)\,dx = \int e^x\,dx + \int 2x\,dx - \int 6\,dx =$$

$$= \int e^x\,dx + 2\int x\,dx - 6\int dx = \boxed{e^x + x^2 - 6x + C}$$

$$\int ctg^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx =$$

$$= \boxed{-ctg\,x - x + C}$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

- Такой метод интегрирования заключается в выражении подынтегральной функции через новую переменную, введенную специально для этой цели. В итоге мы должны получить табличный вид интеграла или просто менее сложный интеграл.
- Этот метод очень полезен, когда нужно интегрировать функции с радикалами или тригонометрические функции.

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной t с помощью подстановки $x=\varphi(t)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx=\varphi'(t)dt$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через t и dt, имеем

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int F(t)dt.$$

После того как интеграл относительно новой переменной t будет найден, с помощью подстановки $t=\psi(x)$ он приводится к переменной x.

Пример. Вычислить $\int \cos(3x+2)dx$

Решение. Делая в этой формуле подстановку $u=3x+2$,
получим

$$\int \cos(3x+2)d(3x+2)=\sin(3x+2)+C$$

откуда найдем

$$\int \cos(3x+2)dx=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$$

Метод интегрирования по частям

Если функции u=u(x); v=v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a,b], то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (5)$$

Пример интегрирования по частям

$$1.\ \int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

$$2.\ \int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int x\,de^{2x}=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

$$3.\ \int x^2\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int x^2 d(\cos 2x)=-\frac{1}{2}\left(x^2\cos 2x-\int \cos 2x\,dx^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int x\,d(\sin 2x)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\left(x\sin 2x-\int \sin 2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Интегрирование по частям – метод для решения интегралов от произведения двух элементарных функций.

Главная сложность применения такого метода – это необходимость выбирать, какую часть брать за дифференциал, а какую – за функцию u(x).

Подведём итоги

I. Непосредственное интегрирование – интегрирование с помощью свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

II. Интегрирование по частям. **Теорема.** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и интеграл $\int udv$, причем

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

III. Замена переменной. **Теорема.** Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и $\varphi: T \to X$. Тогда если на множестве X функция $y = f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то на множестве T справедлива формула

$$\boxed{\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !