

Метод Гаусса

Рассмотрим задачу решения системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Известно, что система имеет единственное решение, если ее матрица невырожденная (т. е. определитель матрицы отличен от нуля). В случае вырожденности матрицы система может иметь бесконечное число решений (если ранг матрицы и ранг расширенной матрицы, полученной добавлением к столбца свободных членов равны) или не иметь решений вовсе (если ранг матрицы и расширенной матрицы не совпадают).

Систему можно записать в матрично-векторной форме $A X = B$,

где A - матрица коэффициентов системы, содержащая n строк и n столбцов;

B - заданный вектор правых частей;

X - искомый вектор.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных и этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Первый этап (**Прямой ход**).

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если элемент $a_{11} = 0$, то первым в системе (14) запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (14), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого используя элементарные преобразования системы. Для этого умножим обе части

первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем

умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы.

Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

Второй этап (**Обратный ход**).

Данный этап заключается в решении полученной ступенчатой системы (15). Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении системы (15) выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$:

$$x_k = b_m - \frac{\lambda_{m(k+1)}}{\lambda_{mk}} x_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_{mn}}{\lambda_{mk}} x_n.$$

Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы (15) и выражаем x_{k-1} через $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Аналогично находим x_{k-2}, \dots, x_2, x_1 .

Придавая свободным неизвестным $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Замечание:

Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $n = k$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n , из предпоследнего уравнения x_{n-1} , и далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные x_{n-2}, \dots, x_2, x_1 .

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

Решите систему
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение. Решение ведем методом Гаусса с помощью матрицы коэффициентов системы, приводя ее первые три столбца к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Первую строку прибавляем ко второй, а затем

умножаем на минус единицу и прибавляем к третьей строке, получаем

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Вторую строку умножаем на минус два и прибавляем

к третьей строке. Получаем

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}.$$

На основе последней матрицы записываем

полученную систему уравнений, деля последнее уравнение на минус десять. Получаем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 3x_3 = 2. \text{ Подставляем во второе уравнение вместо неизвестной} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

x_3 ее значение 1. Получаем $x_2 = -1$. Подставляем значения неизвестных x_1, x_2 в первое уравнение и находим $x_1 = 2$. Ответ $(2; -1; 1)$

Проверка:

Решите системы уравнений

1.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$
 отв. $(1, -1, 1)$.
2.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$
 отв. $(1, 2, 1)$.
3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$
 отв. $(-1, -1, 2)$.
4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$
 отв. $(1, 2, -1)$.

Ответы

1.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \text{ отв. } (1, -1, 1).$$
2.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \text{ отв. } (1, 2, 1).$$
3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases} \text{ отв. } (-1, -1, 2).$$
4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases} \text{ отв. } (1, 2, -1).$$