Метод Гаусса

Рассмотрим задачу решения системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & \ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & \ldots & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Известно, что система имеет единственное решение, если ее матрица невырожденная (т. е. определитель матрицы отличен от нуля). В случае вырожденности матрицы система может иметь бесконечное число решений (если ранг матрицы и ранг расширенной матрицы, полученной добавлением к столбца свободных членов равны) или не иметь решений вовсе (если ранг матрицы и расширенной матрицы не совпадают).

Систему можно записать в матрично-векторной форме А Х = В,

где А - матрица коэффициентов системы, содержащая n строк и n столбцов;

В - заданный вектор правых частей;

Х - искомый вектор.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{14}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности треугольному) виду.

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1k}x_k + \ldots + \lambda_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2k}x_k + \ldots + \lambda_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{mk}x_k + \ldots + \lambda_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{15}$$

где $k \le n$, $\lambda_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$.

Коэффициенты λ_{ii} называются *главными элементами системы*.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных и этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Первый этап (**Прямой ход**).

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если элемент $a_{11} = 0$, то первым в системе (14) запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (14), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого используя элементарные преобразования системы. Для этого умножим обе части

первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + {}_{m3}^{(1)}\, x_3 + \ldots + {}_{mn}^{(1)}\, x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$, $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{2,m}$ – новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)}$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (14) к ступенчатому виду (15) появятся нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i^{(s)}$, а $b_i^{(s)} \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (**Обратный ход**).

Данный этап заключается в решении полученной ступенчатой системы (15). Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении системы (15) выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$:

$$x_k = b_m - \frac{\lambda_{m(k+1)}}{\lambda_{mk}} x_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_{mn}}{\lambda_{mk}} x_n .$$

Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы (15) и выражаем x_{k-1} через x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$. Аналогично находим $x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Придавая свободным неизвестным x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Замечание:

Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $n = k$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, и далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

Решите систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

Решение. Решение ведем методом Гаусса с помощью матрицы коэффициентов системы, приводя ее первые три столбца к треугольному виду.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$. Первую строку прибавляем ко второй, а затем умножаем на минус единицу и прибавляем к третьей строке, получаем

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$. Вторую строку умножаем на минус два и прибавляем к третьей строке. Получаем

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$. На основе последней матрицы записываем полученную систему уравнений, деля последнее уравнение на минус десять. Получаем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Подставляем во второе уравнение вместо неизвестной x_3 ее значение 1. Получаем $x_2 = -1$. Подставляем значения неизвестных x_1, x_2 в первое уравнение и находим $x_1 = 2$. Ответ $(2;-1;1)$

Проверка:

Решите системы уравнений

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ отв. $(1, -1, 1)$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ отв. $(1, 2, 1)$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$ отв. $(-1, -1, 2)$.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ отв. $(1, 2, -1)$.

Ответы

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ отв. $(1, -1, 1)$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ отв. $(1, 2, 1)$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$ отв. $(-1, -1, 2)$.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ отв. $(1, 2, -1)$.