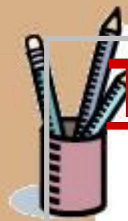
Тригонометр
ия
10 класс



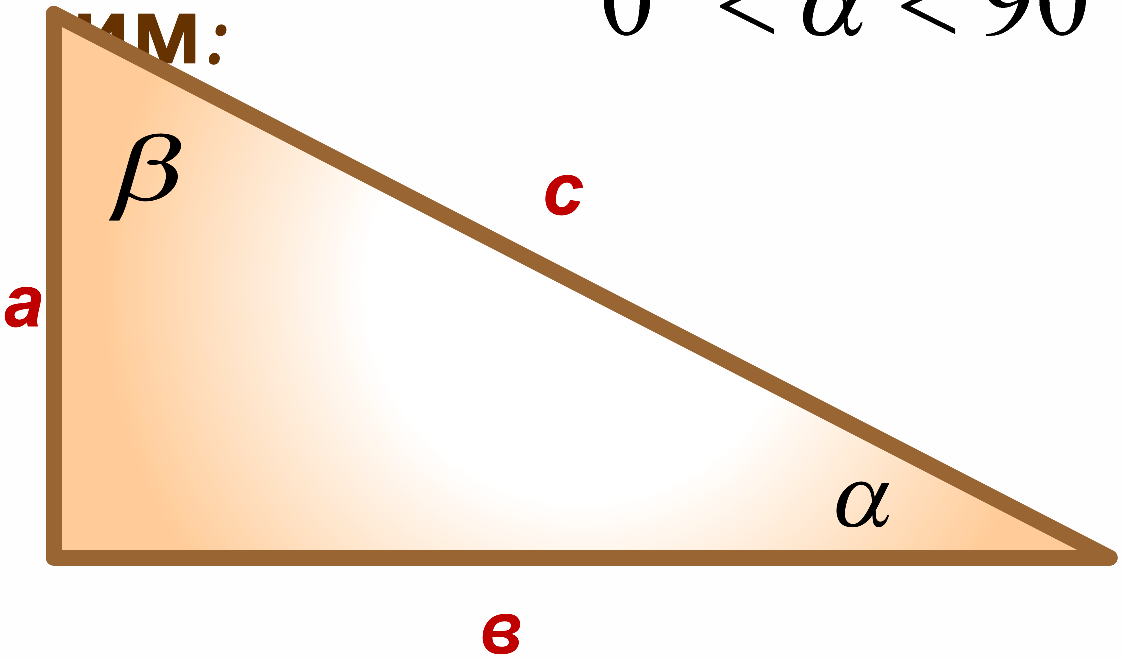
<u>Тригонометрия</u> – математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела, при измерении расстояний до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, при контроле системы навигации, в теории музыки, акустике, оптике, электронике, теории вероятностей, статистике, биологии, медицине (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтике, химии, сейсмологии, метеорологии, океанологии, картографии, архитектуре, экономике, электронной технике, машиностроении, компьютерной графике.

Синус, косинус , тангенс и котангенс угла

Вспомним:

$$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

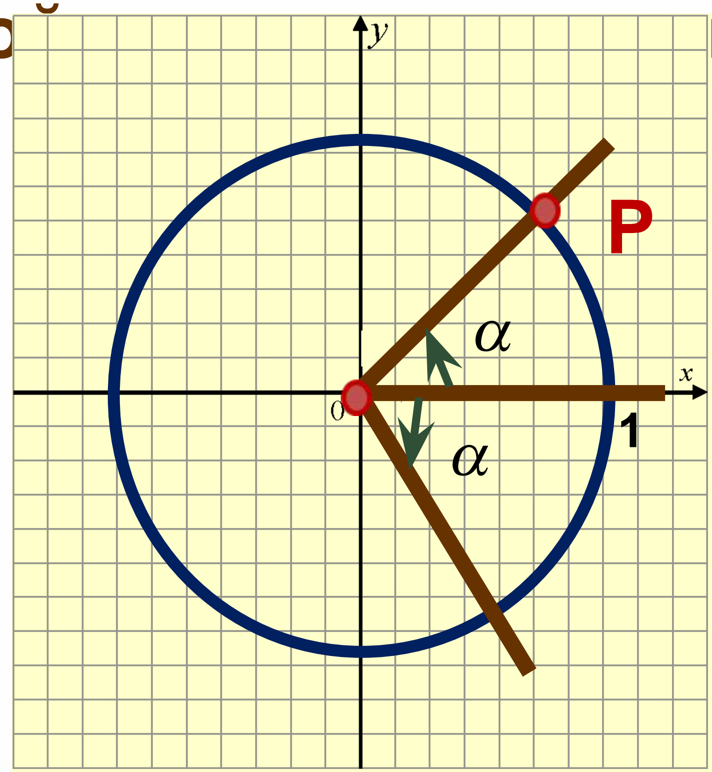
$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

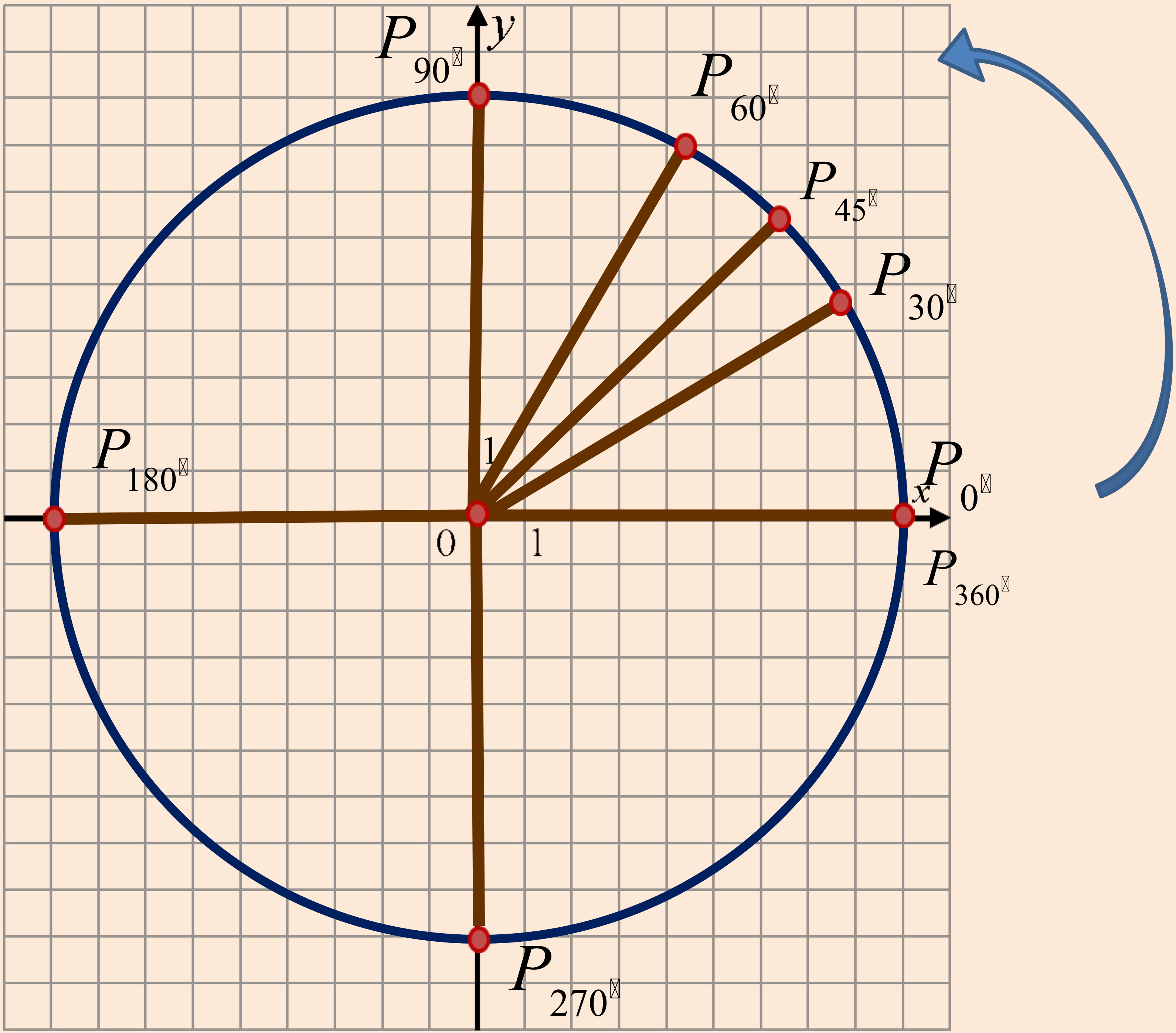
Тангенс — отношение противолежащего

Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенно кружностью обозначим



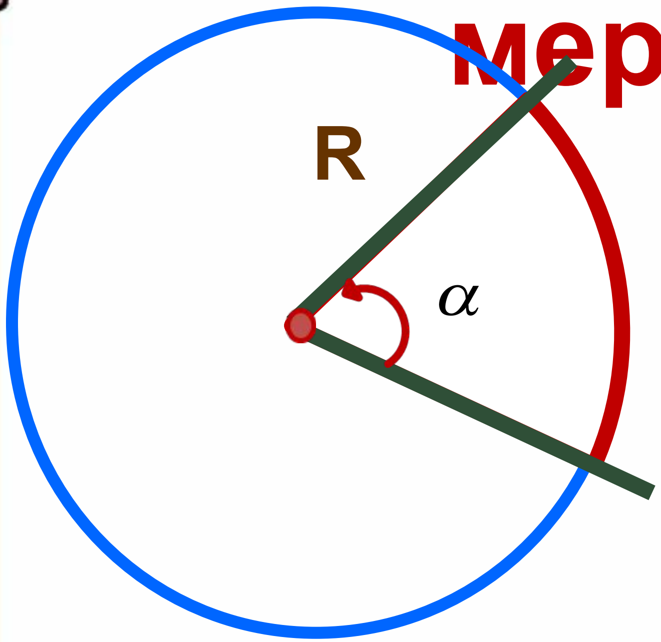
$$\alpha > 0$$

$$\alpha < 0$$



y
x
0
1
1
P_{90}
P_{60}
P_{45}
P_{30}
P_{0}
P_{360}
P_{180}
P_{270}

Радианная мера угла



α центральный угол

R – радиус

Если R = C,
то центральный угол равен
одному радиану

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности

$$1 рад \approx 57^{\circ}$$

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{180} \qquad n^{\circ} = \frac{\alpha \cdot 180^{\circ}}{\pi}$$

$$n = 60^{\circ} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

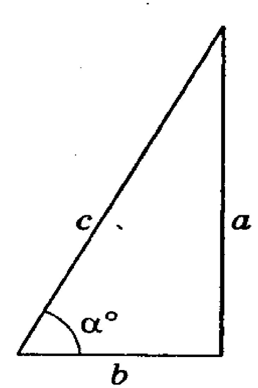
$$\alpha = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \qquad n^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = \frac{\pi \cdot 180^{\circ}}{4 \cdot \pi} = \frac{180^{\circ}}{4} = 45^{\circ}$$

$$60^{\circ} = \frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$$

Самостоятельная работа

- **Вариант 1**

- 1. Представьте угол 740^o в виде $ά° + 360°n$, где n – целое число,
- $0<ά<180^0$.
-
- 2. Точка Р – конечная точка поворота на 50^o. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_1, которая получается из точки Р симметрией относительно оси ординат.
-
- 3. Переведите угол 150^o из градусной меры в радианную.
-
- 4. Переведите угол 1,25π из радианной меры в градусную.
-
- 5. Допишите равенство $...^0 = \frac{\pi}{2}$
-
- 6. Запишите формулу перехода от радиан к градусам.
-
- 7. Запишите, как найти через стороны треугольника косинус угла ά. (рис)



- **Вариант 2**

- Представьте угол $–710^o$ в виде $a° + 360°n$, где n – целое число, $0<ά<180°$.
-
- 2. Точка P – конечная точка поворота на 50^o. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_1, которая получается из точки P симметрией относительно оси абсцисс.
-
- 3. Переведите угол 135^o из градусной меры в радианную.
-
- 4. Переведите угол 2,5π из радианной меры в градусную.
-
- 5. Допишите равенство $…^0 = \frac{\pi}{4}$

6. Запишите формулу перехода от радиан к градусам.

7. Запишите, как найти через стороны треугольника синус угла ά.(рис)

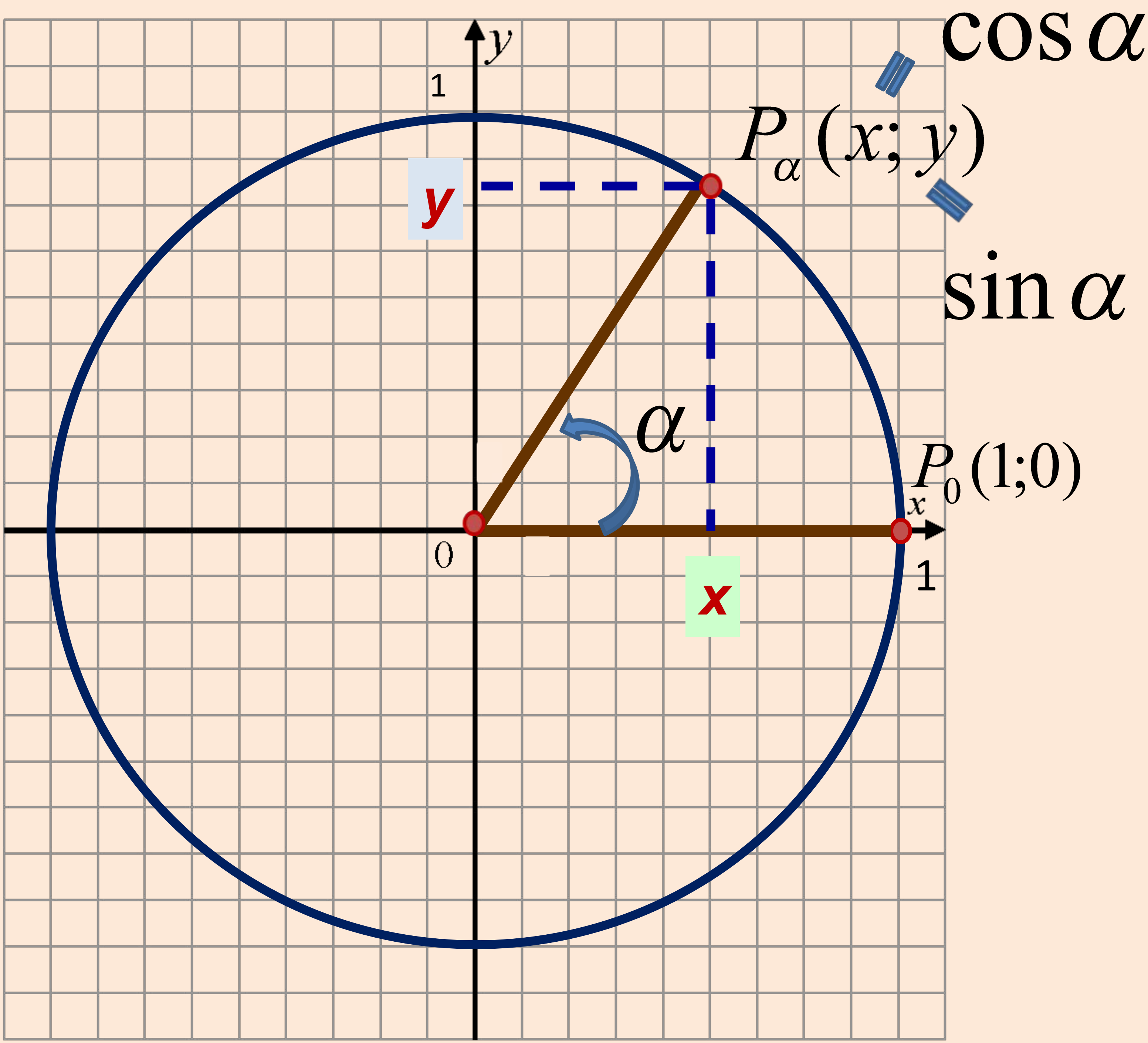
Ответы

Вариант 1

- №1 $740^0=360^0\cdot 2+20^0$
- №2 130^0
- №3 $\frac{5\pi}{6}$
- №4 225^0
- №5 90^0
- №6 $ά_{\text{рад}} = \frac{ά \cdot 180°}{\pi}$
- №7 $\frac{b}{c}$

Вариант 2

- №1 $-710^0 = 10^0 - 2\cdot 360^0$
- №2 -50^0
- №3 $\frac{3\pi}{4}$
- №4 450^0
- №5 45^0
- №6 $ά^0 = \frac{ά \cdot \pi}{180}$ рад
- №7 $\frac{a}{c}$



cos α
Pα (x; y)
sin α
y
1
y
α
P0 (1;0)
x
0
1
x

Синус угла определяется как ордината точки P_α

$$\sin\alpha = y$$

Косинус — абсцисса точки P_α

$$\cos\alpha = x$$

Тангенс – отношение ординаты к абсциссе точки P_α

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Котангенс – отношение абсциссы к ординате точки P_α

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

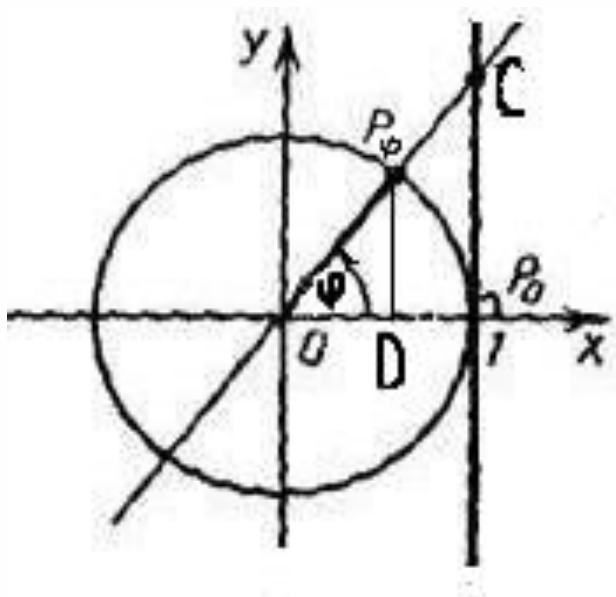
Понятие **синуса** встречается уже в *III* в. до н. э.
и имел название джива (тетева лука), в *IX* в. заменено на арабское слово джайб (выпуклость), *XII* в. заменено на латинское
синус (изгиб, кривизна).

Косинус – это дополнительный синус.

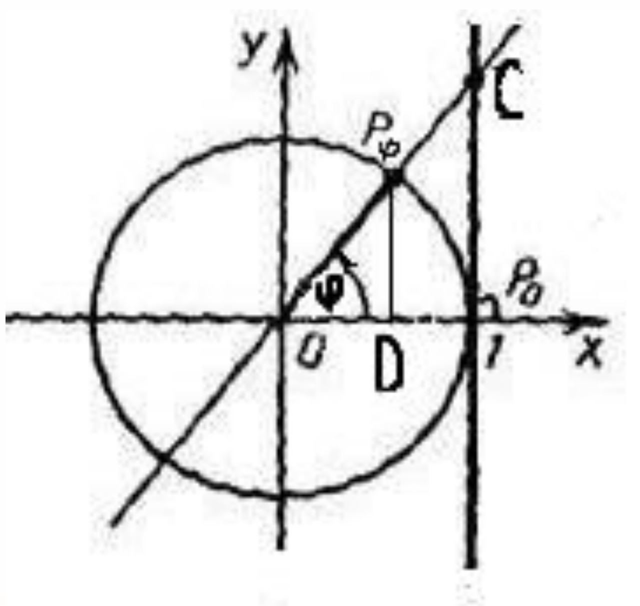
Тангенс переводится с латинского как «касающийся»

- В курсе геометрии вы познакомились с тангенсом острого угла, равным частному синуса и косинуса этого угла:
- $\mathbf{tg}\,\varphi = \sin\varphi / \cos\varphi$
- С помощью этого равенства можно определить тангенс любого угла φ, косинус которого отличен от нуля.
- *Тангенсом угла назывется частное синуса к косинусу этого угла.*
- *Для углов, косинусы которых равны 0, т. е. углов вида* $\pi/2 + \pi n$ (n – любое число), тангенс не существует.

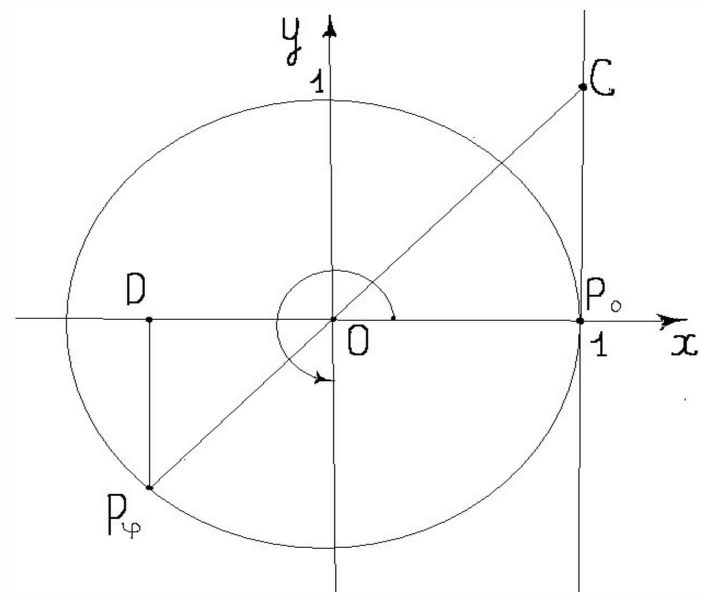
- На рисунке к единичной окружности в точке P_0 проведена касательная; P_φ – конечная точка поворота на угол φ; C – точка пересечения касательной и прямой OP_φ.
- Ордината точки C равна тангенсу угла **φ**



Докажем это. Заметим сначала, что tg φ и ордната точки C одинаковы по знаку. Так, если P_{φ} – точка I или III координатной четверти, то sin φ и cosφ или оба положительны…

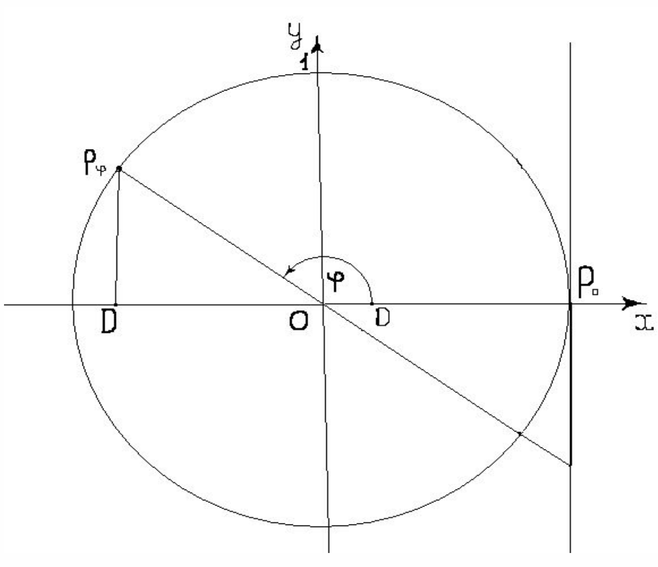


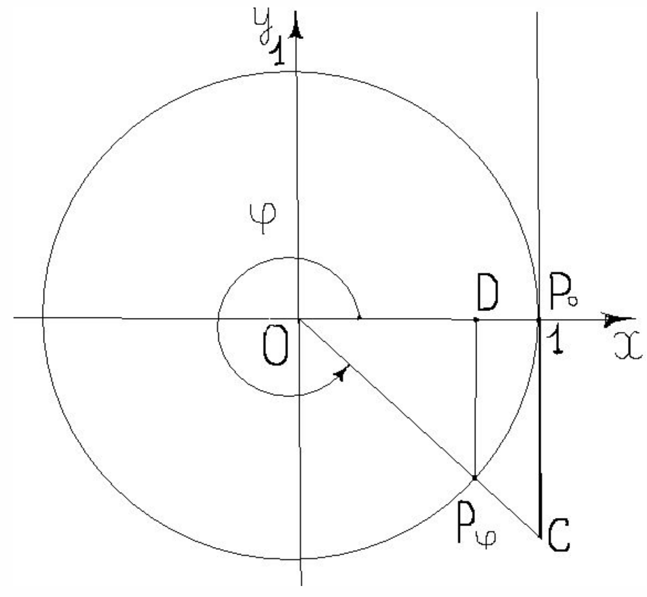
- или оба отрицательны.

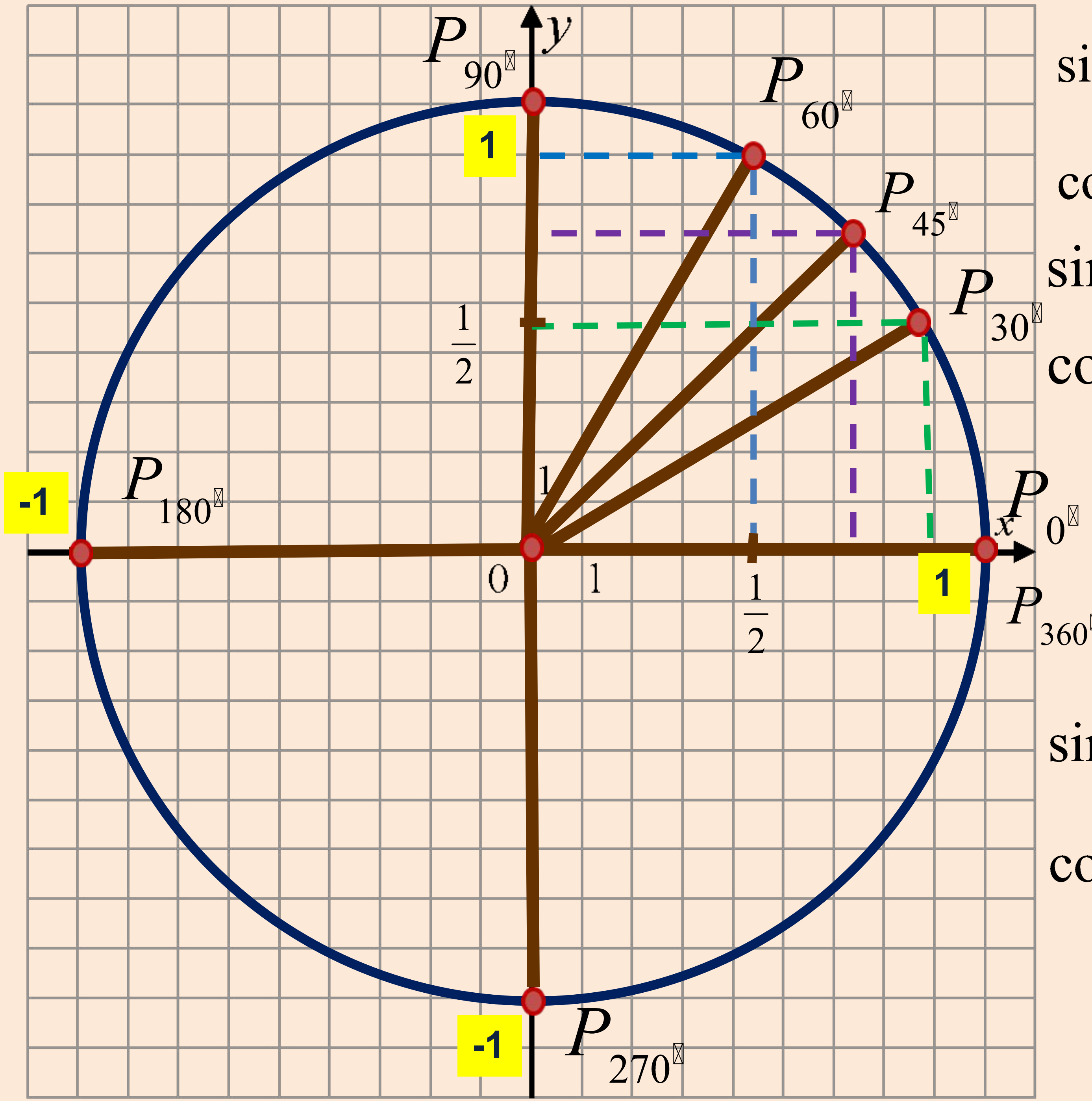


- Значит, их частное tg φ положительное. Точка С в этих случаях расположена в верхней полуплоскости и, следовательно, имеет положительную ординату.

- Если же точка P_{φ} находится во II или в IV координатной четверти, то знаки sin φ и cosφ различны, следовательно, tg φ отрицателен. Точка С при этом находится в нижней полуплоскости и имеет отрицательную ординату.







$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ \approx 0{,}9$$

$$\sin 45^\circ \approx 0{,}7$$

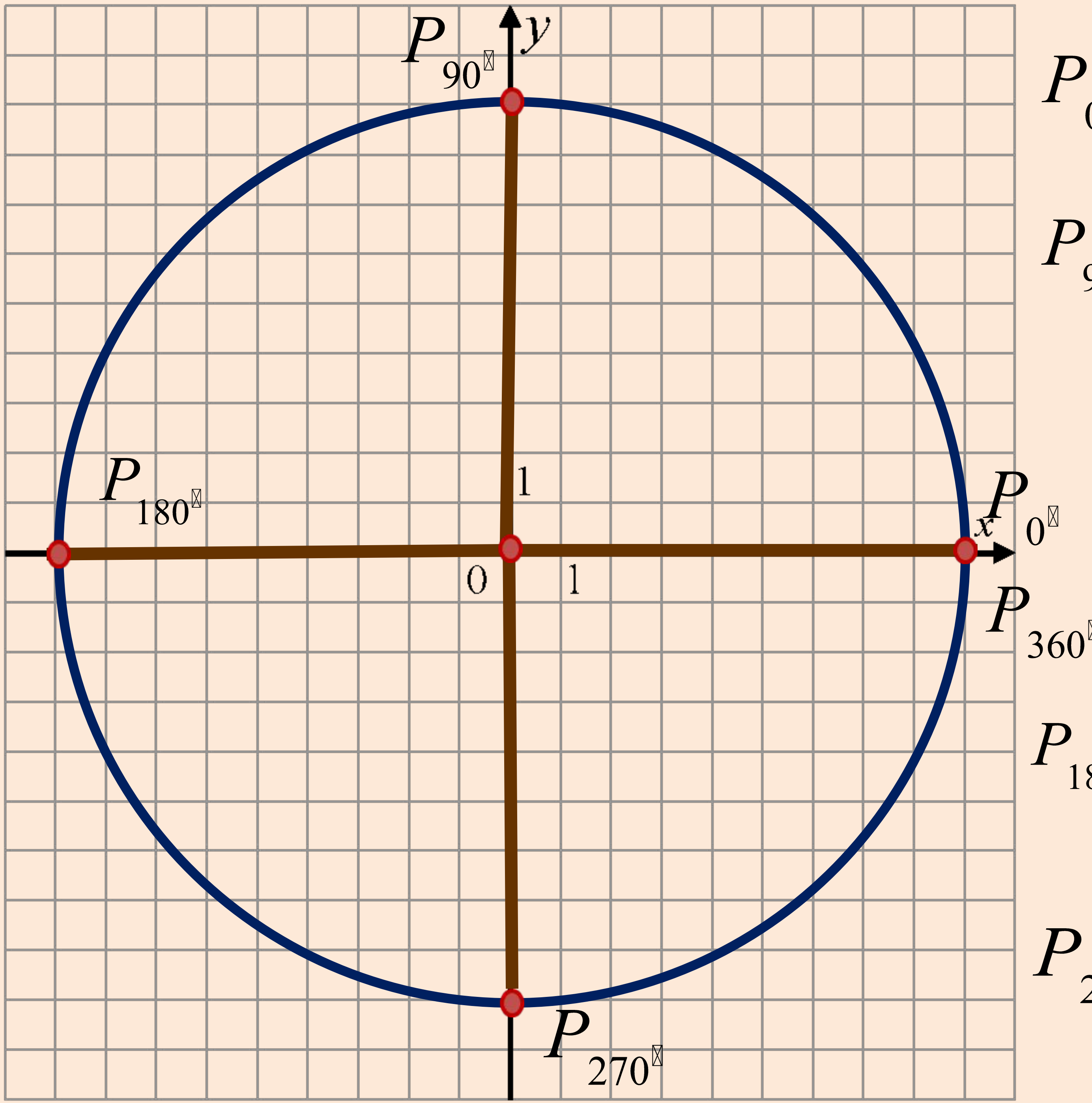
$$\cos 45^\circ \approx 0{,}7$$

$$\sin 60^\circ \approx 0{,}9$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Запомни

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



$P_{0°}$**(1; 0)**

$P_{90°}$**(0; 1)**

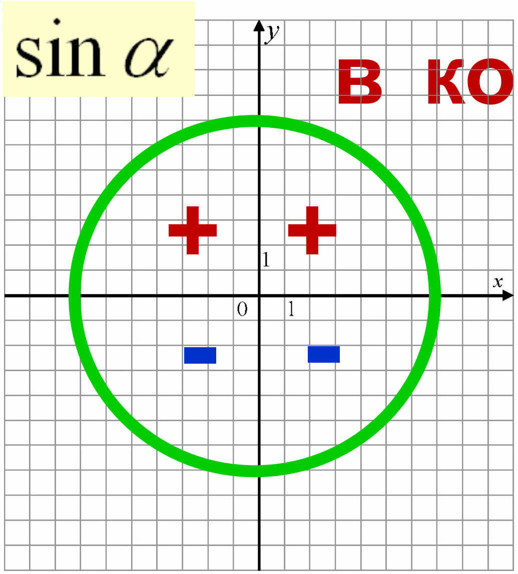
$P_{180°}$**(-1; 0)**

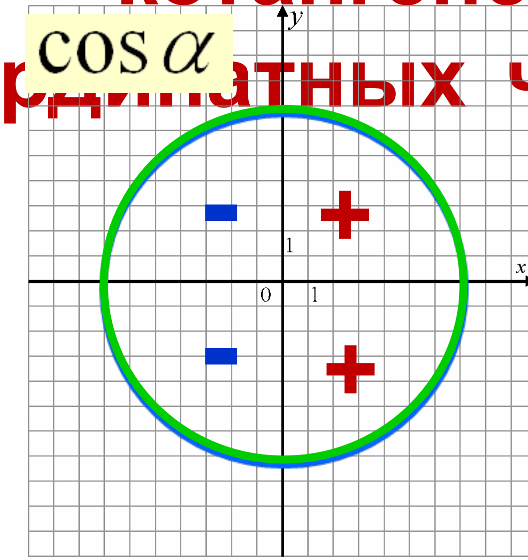
$P_{270°}$**(0;-1)**

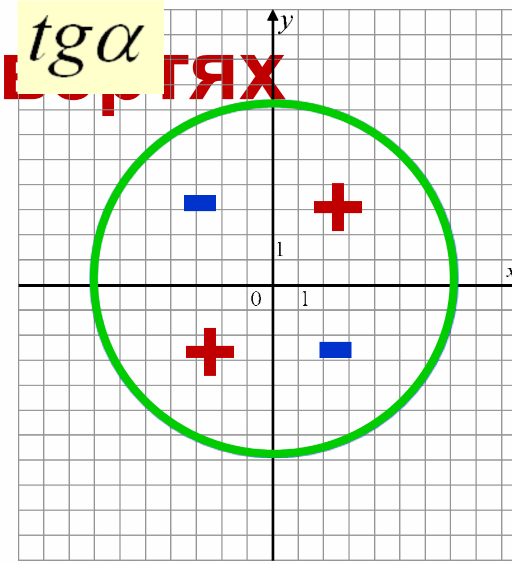
Провер

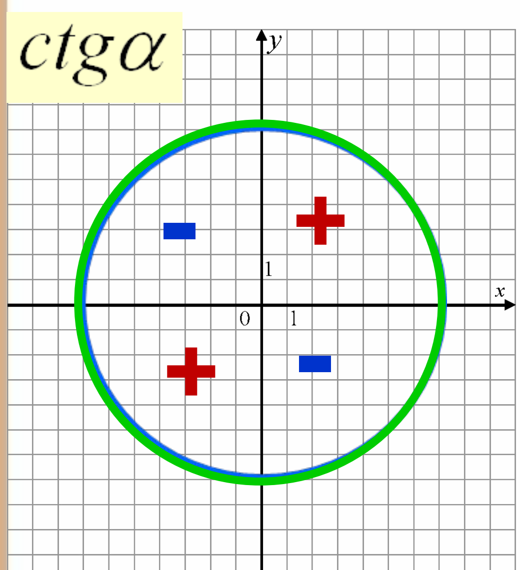
	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	0	-	0	-

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях









$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

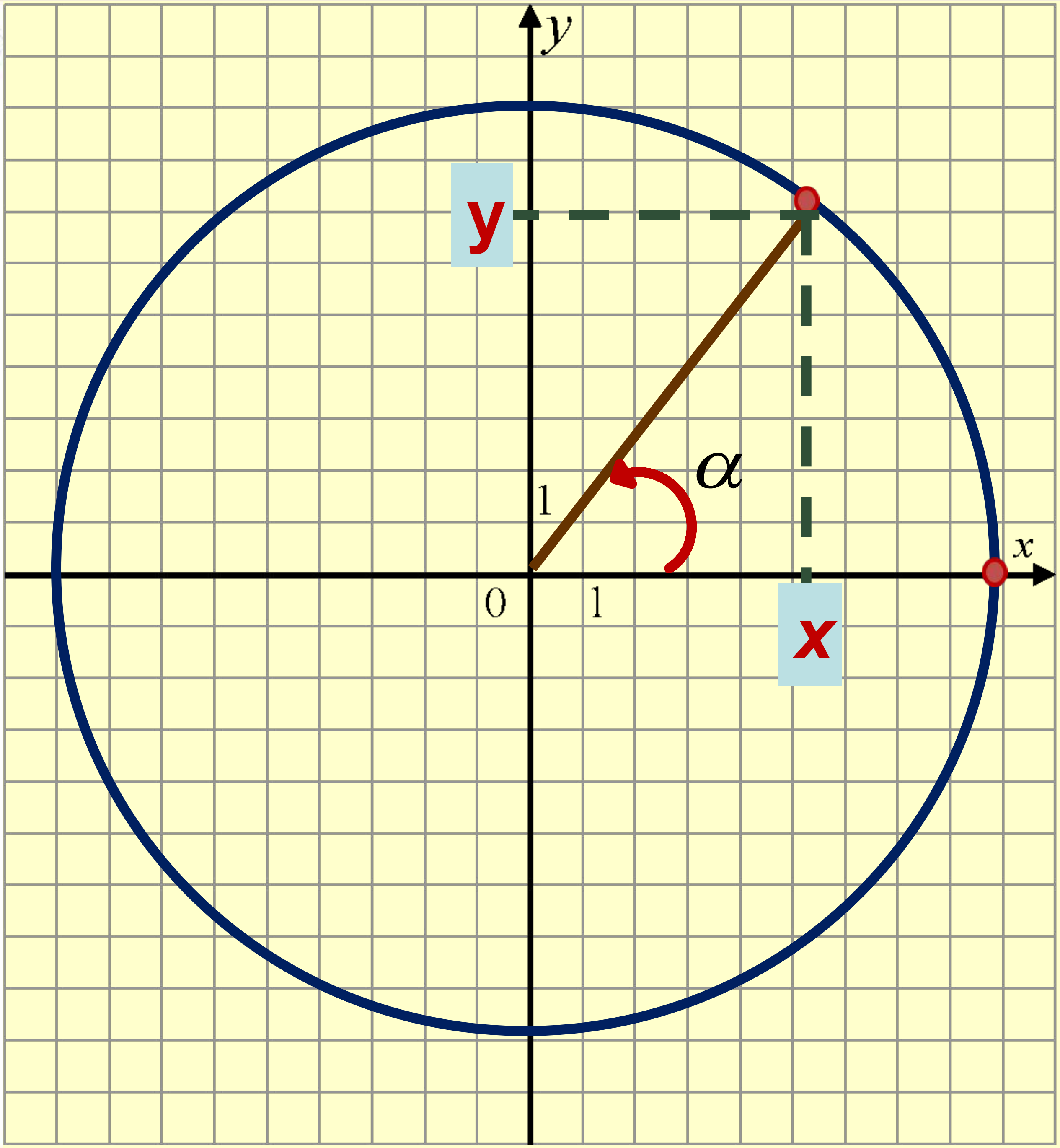
$$\cos 236^\circ < 0$$

$$tg 127^\circ < 0$$

$$ctg 195^\circ > 0$$

Периодичность тригонометрических функций

При изменении угла на целое число оборотов
значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса
не изменяются



$$\sin\alpha =$$

$$= \sin(\alpha + 360^\circ) =$$

$$= \sin(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$

$$= \sin(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$

$$\cos\alpha =$$

$$= \cos(\alpha + 360^\circ) =$$

$$= \cos(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$

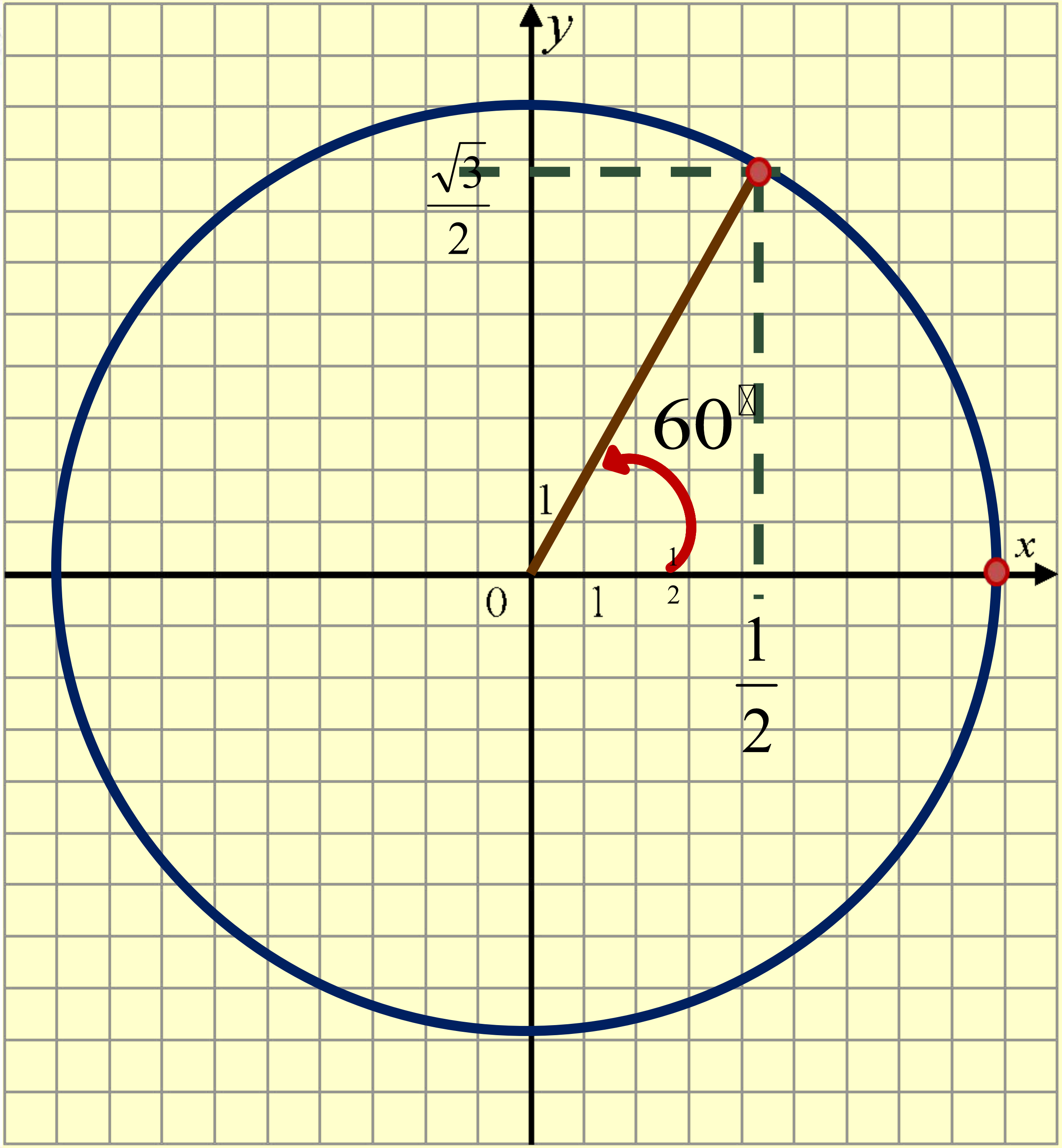
$$= \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$

$$tg\alpha =$$

$$= tg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$

$$ctg\alpha =$$

$$= ctg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 420° = ?$

$\cos 420° = ?$

$\sin 420° =$

$= \sin(60° + 360°) =$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 780° =$

$= \sin(60° + 2 \cdot 360°) =$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 420° =$

$= \cos(60° + 360°) =$

$= \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 780° =$

$= \cos(60° + 2 \cdot 360°) =$

$= \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\sin 765^\circ =$$
$$= \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ =$$
$$= \cos(30^\circ + 3\cdot 360^\circ) =$$
$$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4\cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2\cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2{,}5\pi = \sin(0{,}5\pi + 2\pi) = \sin 0{,}5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos(-\frac{9\pi}{4}) = \cos(2\frac{1}{4}\pi) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{13\pi}{6} = tg(2\frac{1}{6}\pi) = tg(\frac{\pi}{6} + 2\pi) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg(-\frac{7\pi}{3}) = -ctg(2\frac{1}{3}\pi) = -ctg(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Домашнее задание
№6.3 А(1-5), Б(1-5), В(1-5)

9) $-415°$; 10) $-520°$.

Спасибо за внимание!