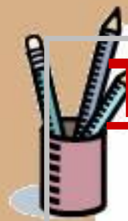
Тригонометр
ия
10 класс



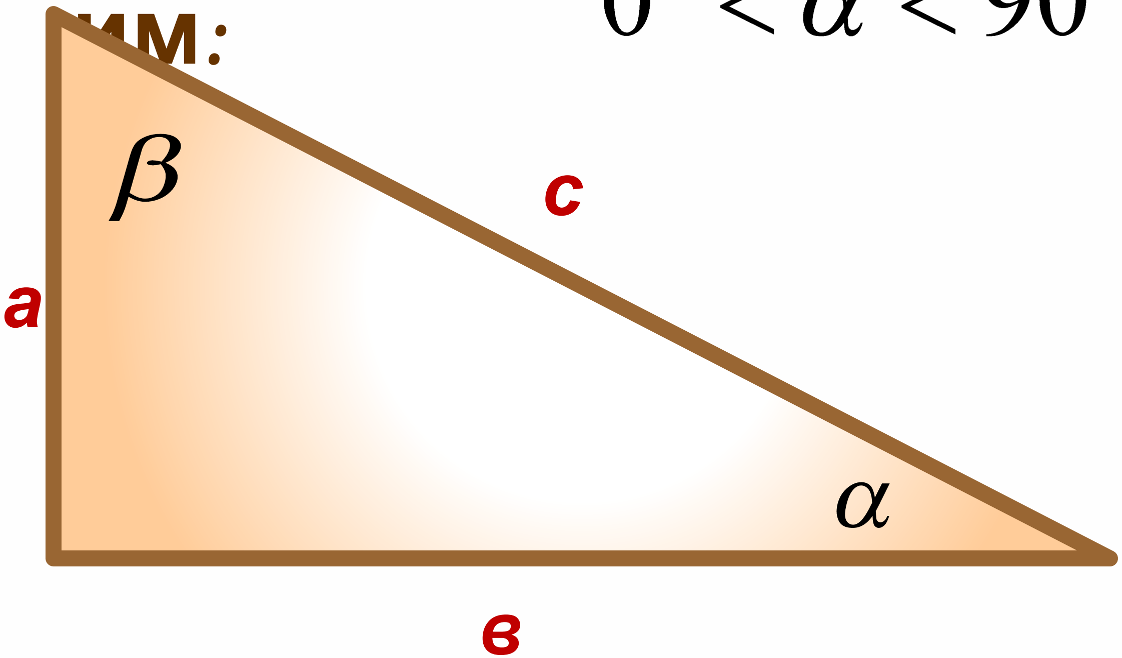
Тригонометрия – математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела, при измерении расстояний до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, при контроле системы навигации, в теории музыки, акустике, оптике, электронике, теории вероятностей, статистике, биологии, медицине (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтике, химии, сейсмологии, метеорологии, океанологии, картографии, архитектуре, экономике, электронной технике, машиностроении, компьютерной графике.

Синус, косинус , тангенс и котангенс угла

Вспомним:

$$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

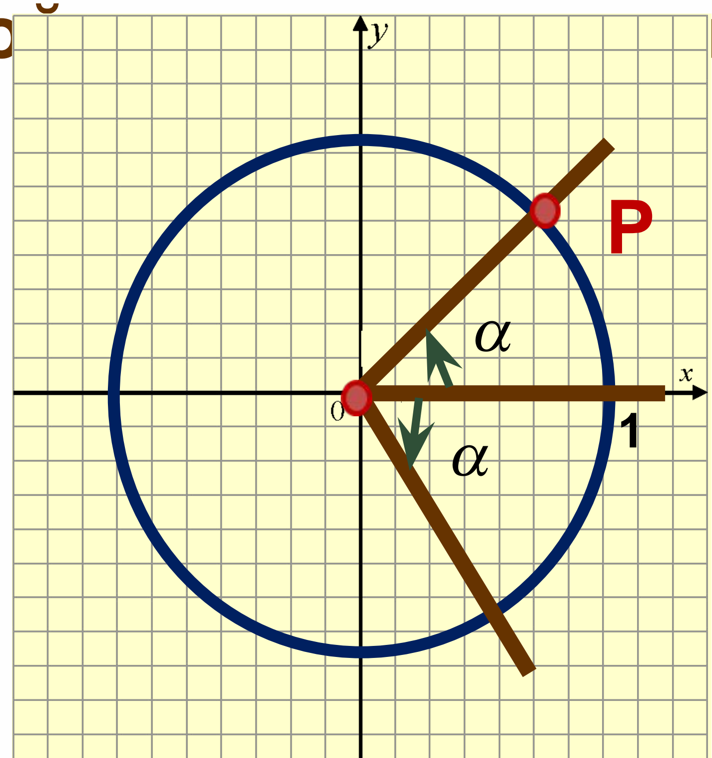
$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

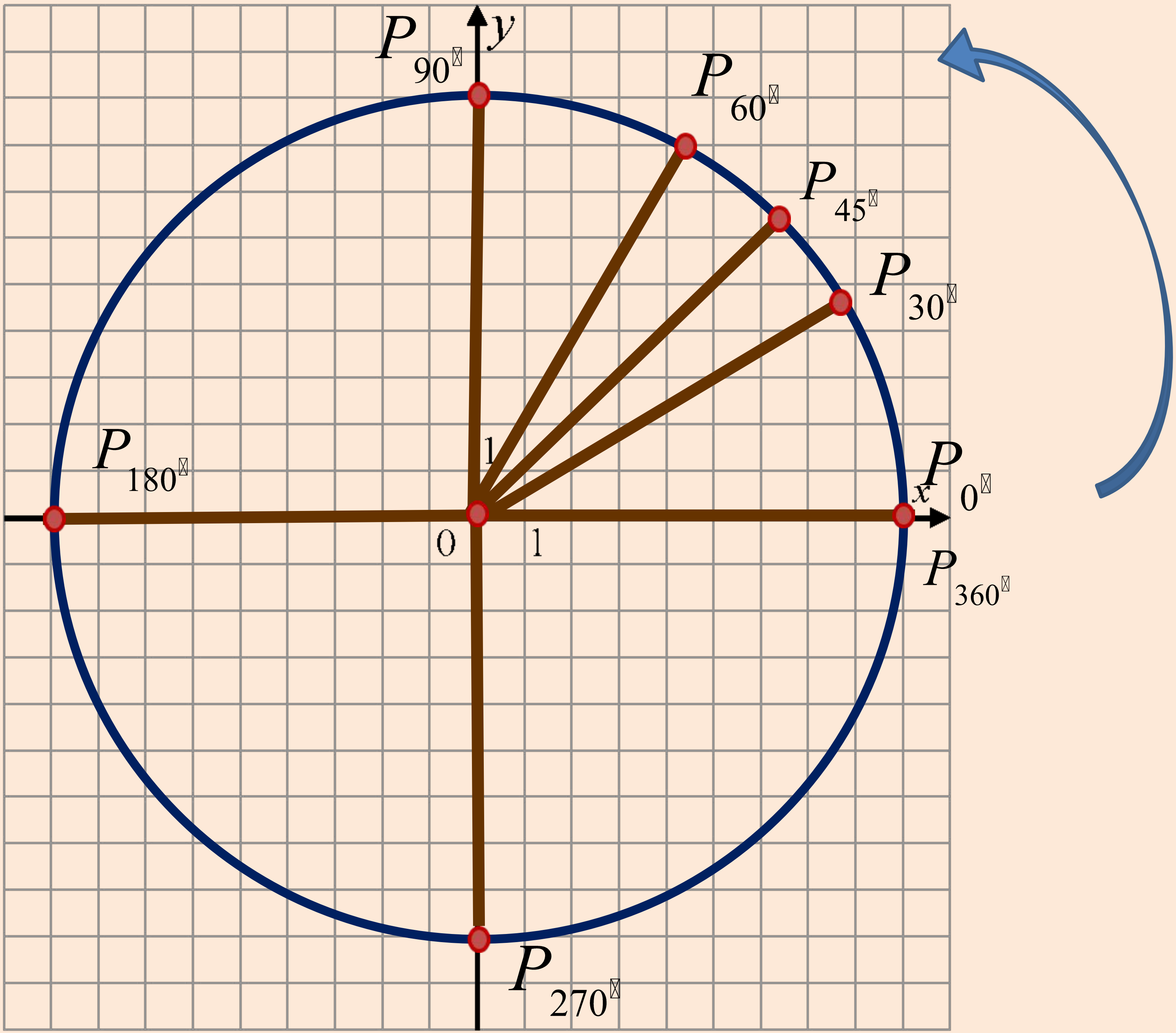
Тангенс — отношение противолежащего

Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенно кружностью обозначим



$$\alpha > 0$$

$$\alpha < 0$$

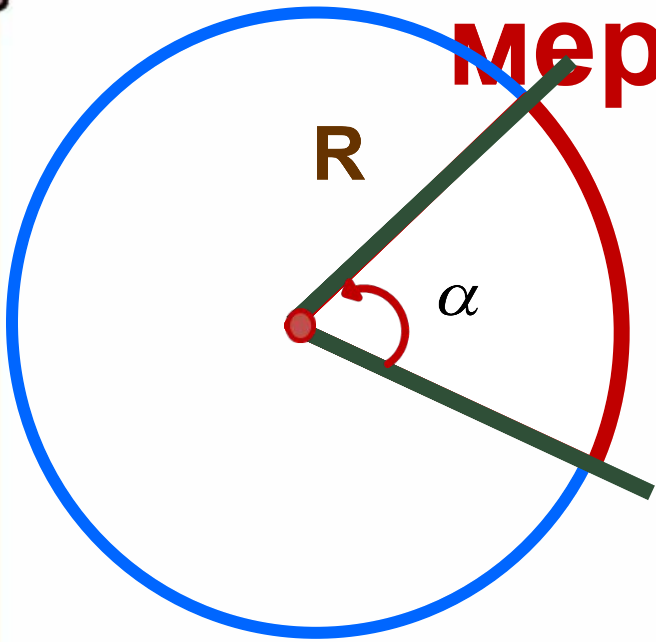


$P_{90°}$
y
$P_{60°}$
$P_{45°}$
$P_{30°}$
$P_{180°}$
1
$P_{0°}$
x
0
1
$P_{360°}$
$P_{270°}$

Радианная мера угла

α – центральный угол

R – радиус



**Если R = C,
то центральный угол равен
одному радиану**

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности

$$1\,рад \approx 57^\circ$$

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{180}$$

$$n^{\circ} = \frac{\alpha \cdot 180^{\circ}}{\pi}$$

$$n = 60^{\circ}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

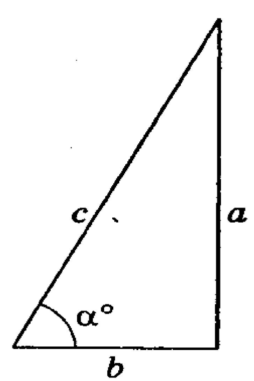
$$n^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = \frac{\pi \cdot 180^{\circ}}{4 \cdot \pi} = \frac{180^{\circ}}{4} = 45^{\circ}$$

$$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$$

Самостоятельная работа

- **Вариант 1**
- 1. Представьте угол 740^o в виде $ά° + 360°n$, где n – целое число,
- $0<ά<180^0$.
- 2. Точка Р – конечная точка поворота на 50^o. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_1, которая получается из точки Р симметрией относительно оси ординат.
- 3. Переведите угол 150^o из градусной меры в радианную.
- 4. Переведите угол 1,25π из радианной меры в градусную.
- 5. Допишите равенство $...^0 = \frac{\pi}{2}$
- 6. Запишите формулу перехода от рад
- к градусам.
- 7. Запишите, как найти через стороны треугольника косинус угла ά. (рис)



- **Вариант 2**
- Представьте угол $–710^o$ в виде $a° + 360°n$, где n – целое число, $0<ά<180°$.
- 2. Точка P – конечная точка поворота на 50^o. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_1, которая получается из точки P симметрией относительно оси абсцисс.
- 3. Переведите угол $135\ ^o$ из градусной меры в радианную.
- 4. Переведите угол 2,5π из радианной меры в градусную.
- 5. Допишите равенство $…^0 = \frac{\pi}{4}$

6. Запишите формулу перехода от радиан к градусам.

7. Запишите, как найти через стороны треугольника синус угла ά.(рис)

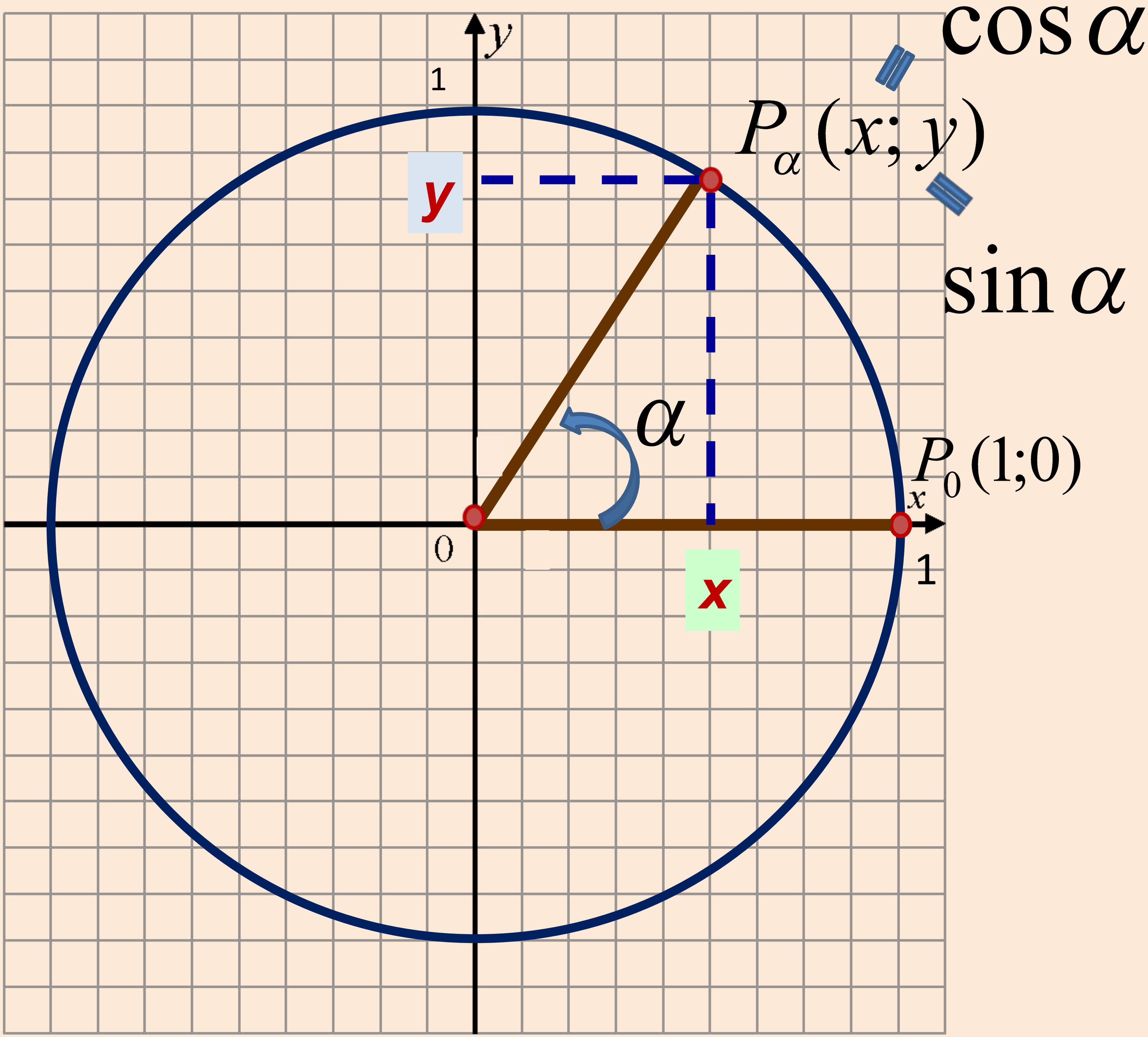
Ответы

Вариант 1

- №1 $740^0=360^0\cdot 2+20^0$
- №2 130^0
- №3 $\frac{5\pi}{6}$
- №4 225^0
- №5 90^0
- №6 ά $_{рад}$ = $\frac{ά \cdot 180°}{\pi}$
- №7 $\frac{b}{c}$

Вариант 2

- №1 $-710^0 = 10^0 - 2\cdot 360^0$
- №2 -50^0
- №3 $\frac{3\pi}{4}$
- №4 450^0
- №5 45^0
- №6 $ά^0 = \frac{ά \cdot \pi}{180}$ рад
- №7 $\frac{a}{c}$



cos α
=
$P_\alpha(x; y)$
=
sin α
y
1
α
$P_0(1;0)$
x
0
1
y
x

Синус **угла определяется как ордината точки**

$$\sin\alpha = y_{P_\alpha}$$

$$\cos\alpha = x_{P_\alpha}$$

Косинус **— абсцисса точки**

$$tg\alpha = \frac{y}{x}_{P_\alpha}$$

Тангенс **– отношение ординаты к абсциссе точки**

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}_{P_\alpha}$$

Котангенс **– отношение абсциссы к**

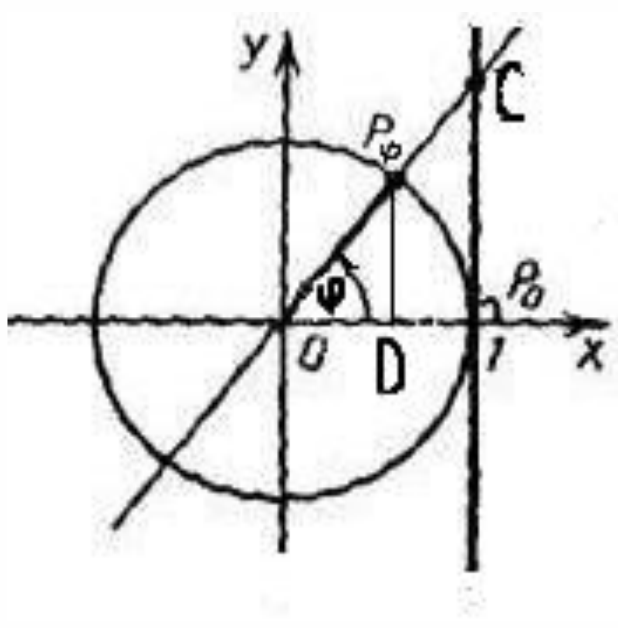
Понятие синуса встречается уже в III в. до н. э.
и имел название джива (тетева лука), в IX в. заменено на арабское слово джайб (выпуклость), XII в. заменено на латинское синус (изгиб, кривизна).

Косинус – это дополнительный синус.

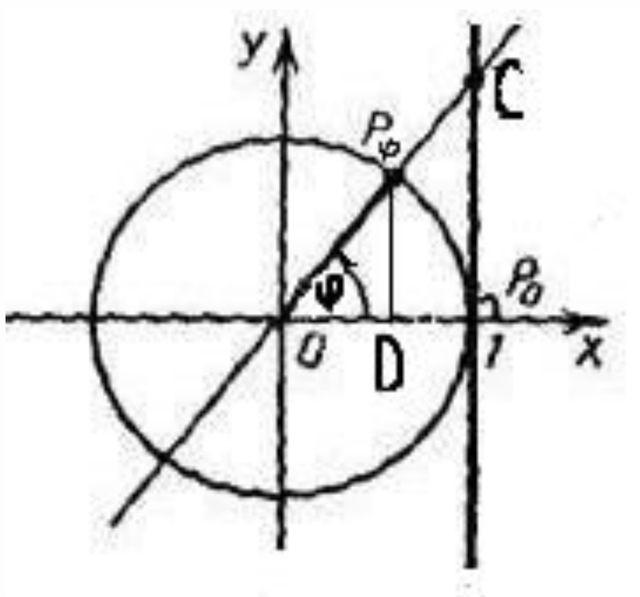
Тангенс переводится с латинского как «касающийся»

- В курсе геометрии вы познакомились с тангенсом острого угла, равным частному синуса и косинуса этого угла:
- **tg φ = sin φ/cosφ**
- С помощью этого равенства можно определить тангенс любого угла φ, косинус которого отличен от нуля.
- *Тангенсом угла называется частное синуса к косинусу этого угла.*
- *Для углов, косинусы которых равны 0, т. е. углов вида* π/2 + πn (n – любое число), тангенс не существует.

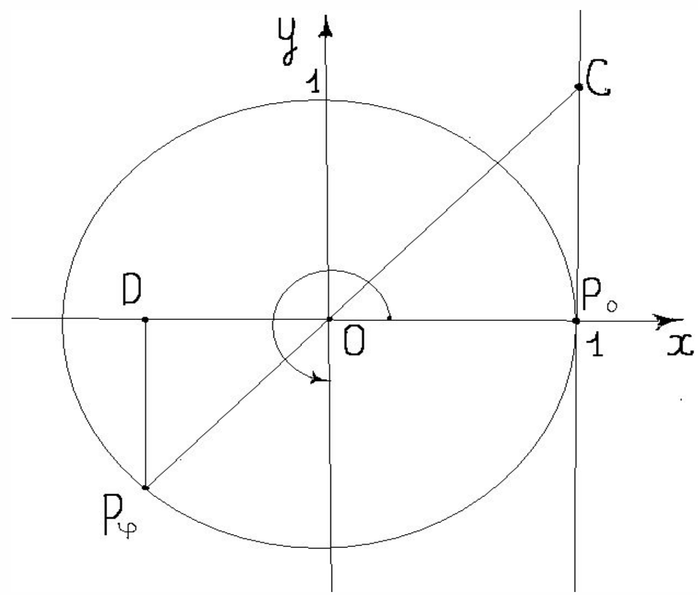
- На рисунке к единичной окружности в точке P_0 проведена касательная; P_φ – конечная точка поворота на угол φ; С – точка пересечения касательной и прямой ОР $_{\varphi}$.
- Ордината точки С равна тангенсу угла **φ**



Докажем это. Заметим сначала, что tg φ и ордната точки C одинаковы по знаку. Так, если P_{φ} – точка I или III координатной четверти, то sin φ и cosφ или оба положительны…

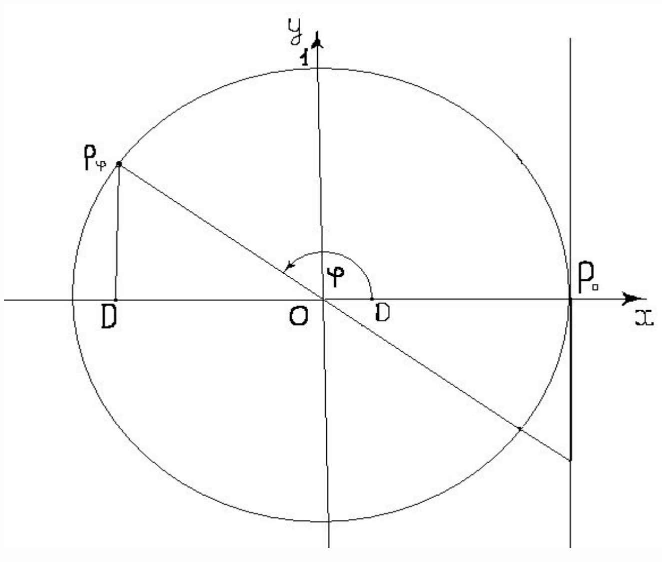


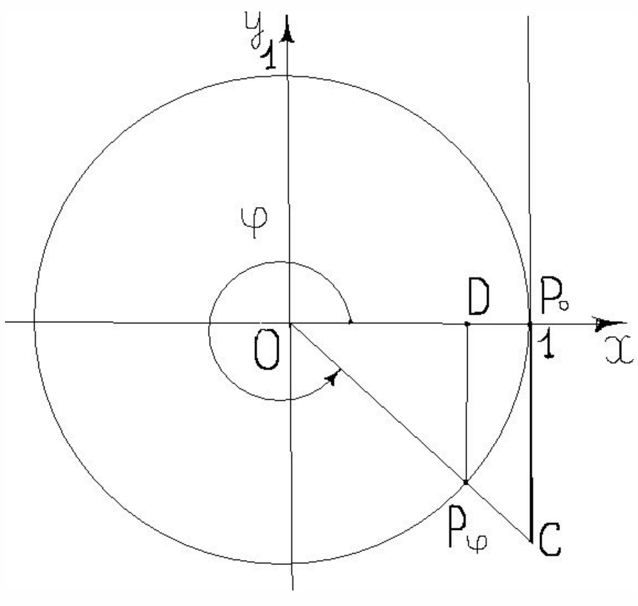
- или оба отрицательны.

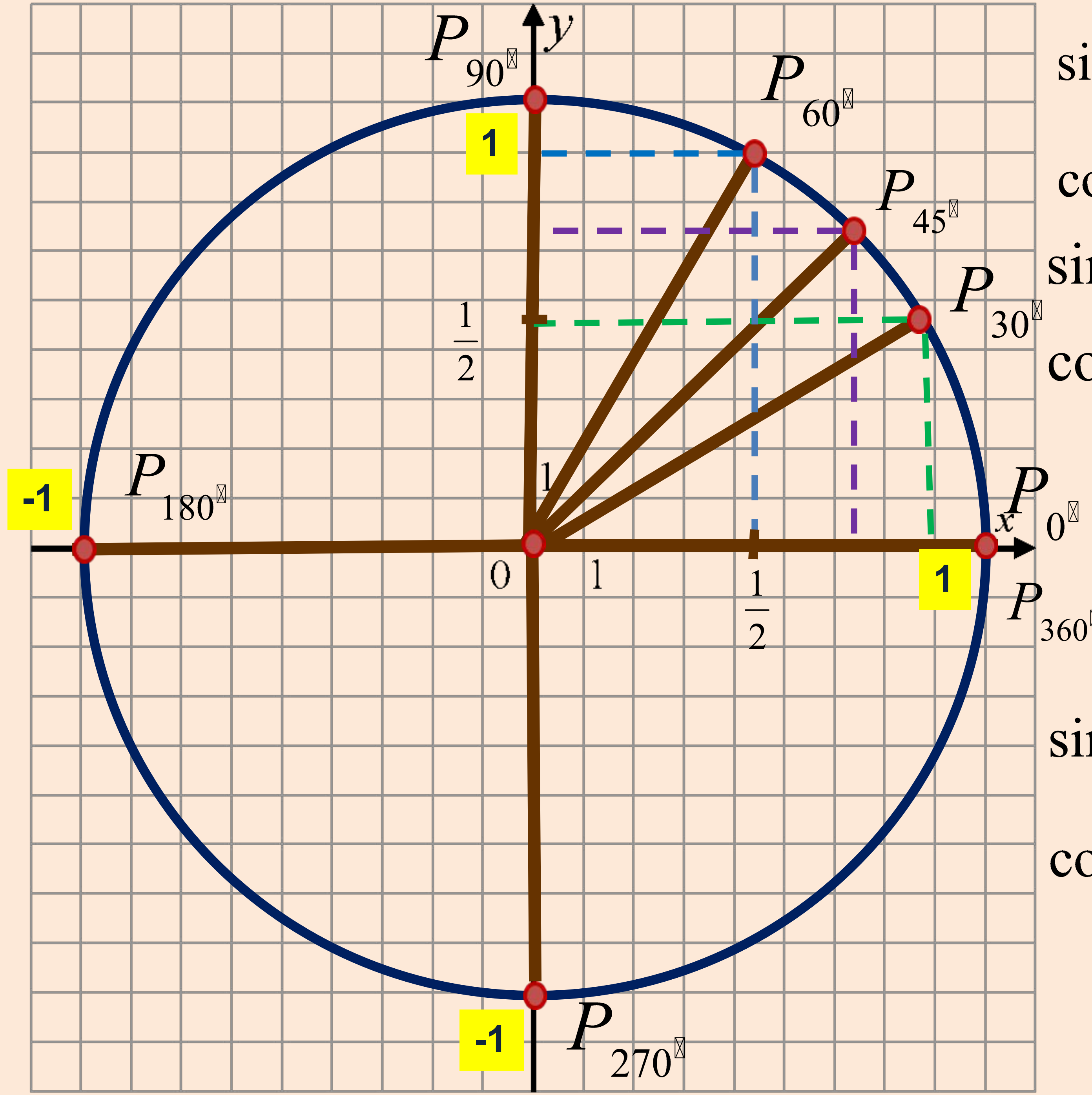


- Значит, их частное tg φ положительное. Точка С в этих случаях расположена в верхней полуплоскости и, следовательно, имеет положительную ординату.

- Если же точка P_{φ} находится во II или в IV координатной четверти, то знаки sin φ и cosφ различны, следовательно, tg φ отрицателен. Точка С при этом находится в нижней полуплоскости и имеет отрицательную ординату.







$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ \approx 0{,}9$$

$$\sin 45^\circ \approx 0{,}7$$

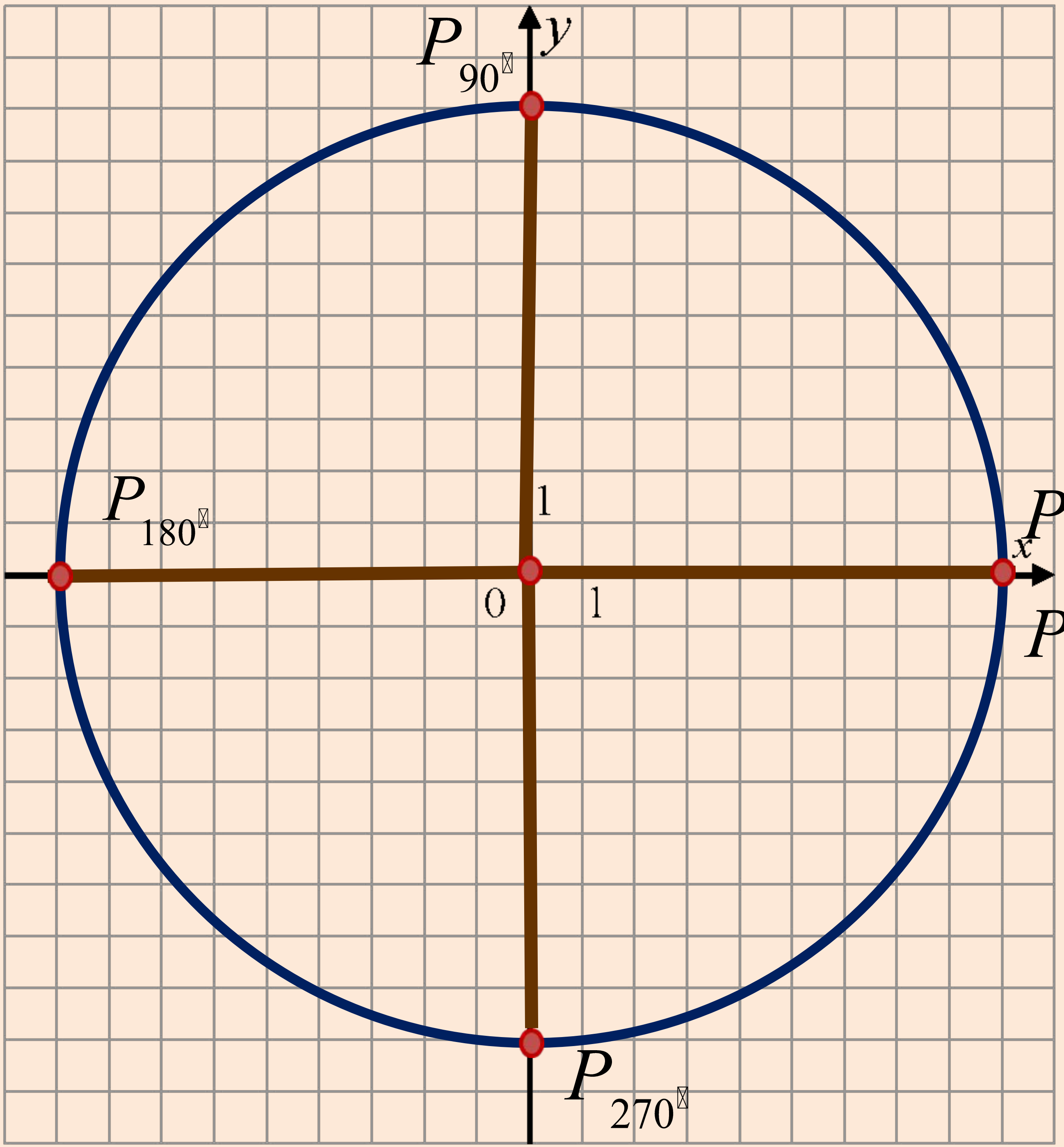
$$\cos 45^\circ \approx 0{,}7$$

$$\sin 60^\circ \approx 0{,}9$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Запомни

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



P_{0°**(1; 0)**

P_{90°**(0; 1)**

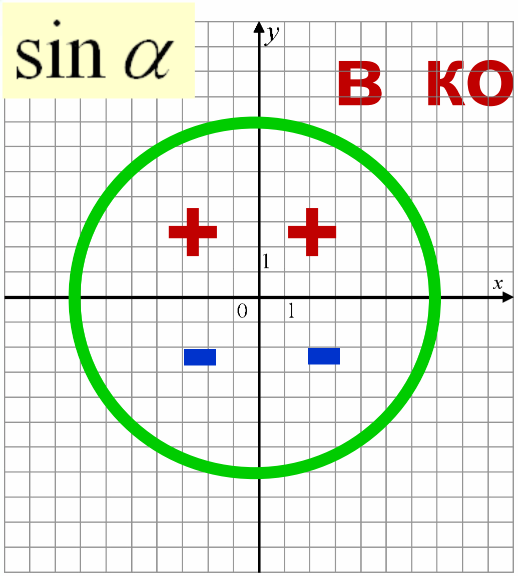
P_{180°**(-1; 0)**

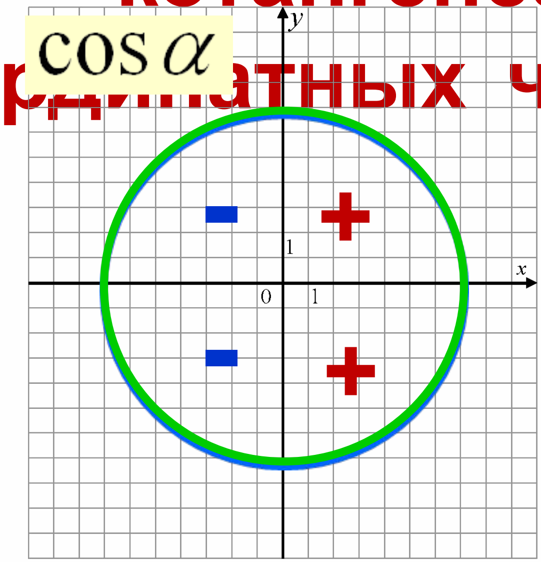
P_{270°**(0;-1)**

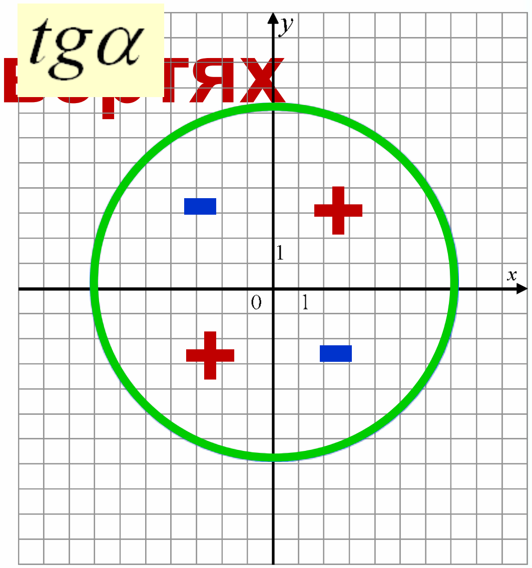
Провер

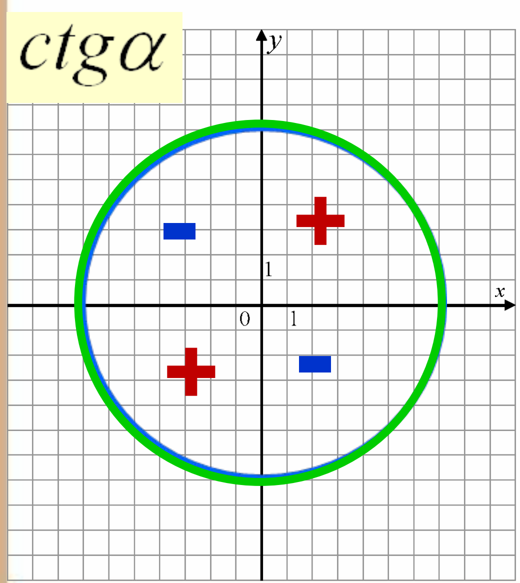
	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	0	-	0	-

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях









$\sin 68^{\circ} > 0$

$\sin 153^{\circ} > 0$

$\sin 249^{\circ} < 0$

$\sin 315^{\circ} < 0$

$\cos 76^{\circ} > 0$

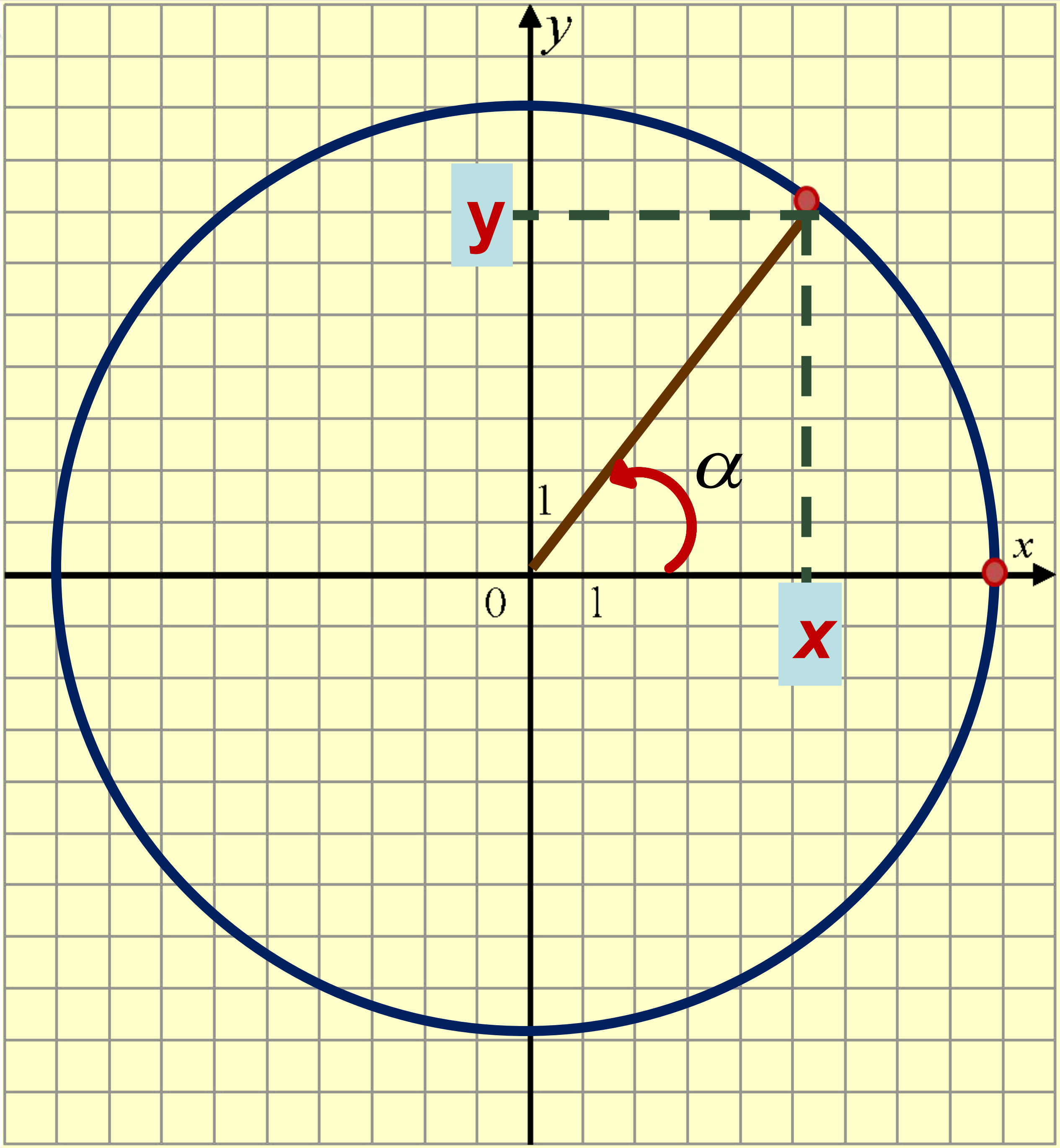
$\cos 236^{\circ} < 0$

$tg 127^{\circ} < 0$

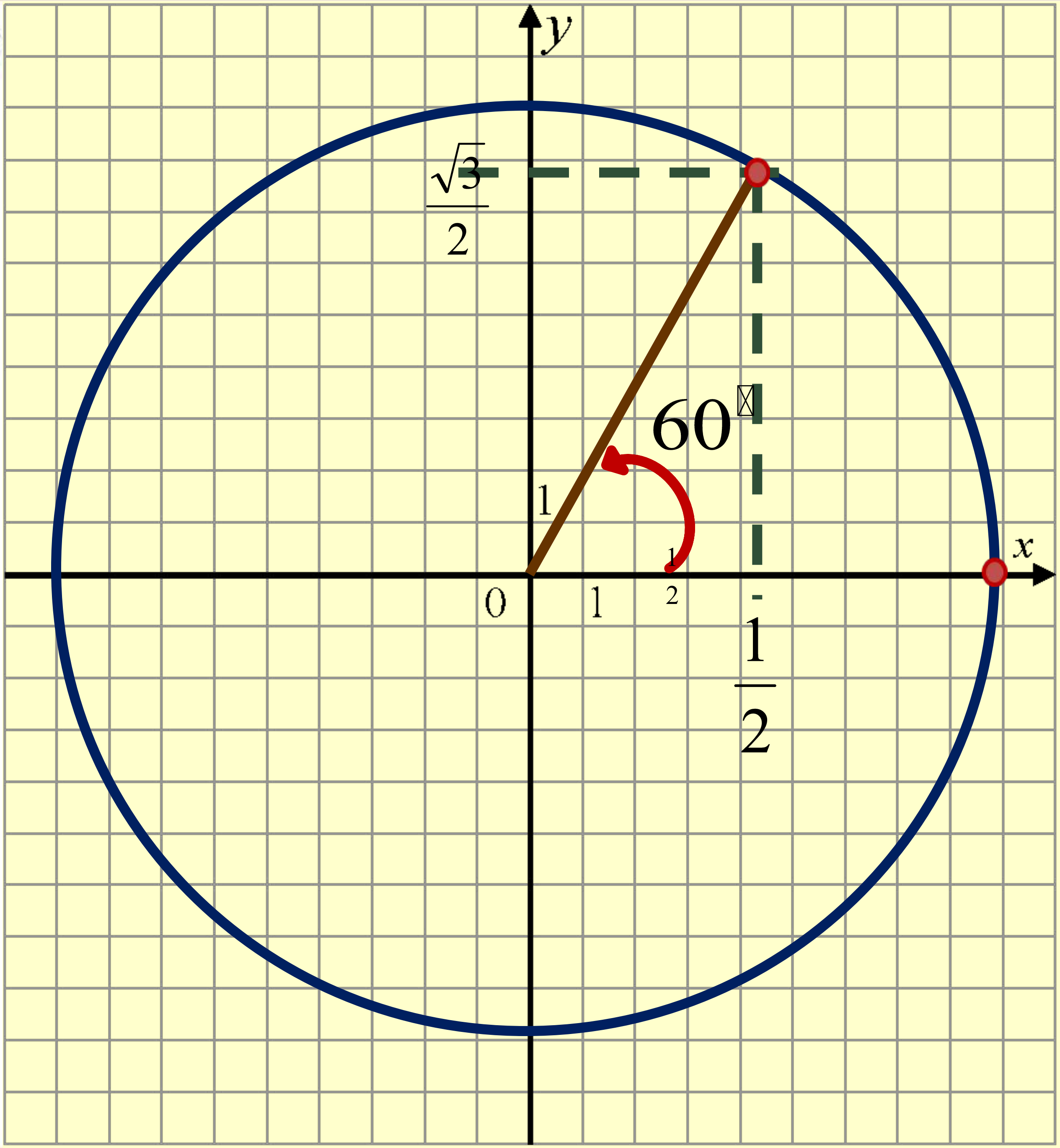
$ctg 195^{\circ} > 0$

Периодичность тригонометрических функций

При изменении угла на целое число оборотов
значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса
не изменяются



$$\sin\alpha =$$
$$= \sin(\alpha + 360^\circ) =$$
$$= \sin(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$
$$\cos\alpha =$$
$$= \cos(\alpha + 360^\circ) =$$
$$= \cos(\alpha + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ)$$
$$tg\alpha =$$
$$= tg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$
$$ctg\alpha =$$
$$= ctg(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$



$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 420^\circ = ?$

$\sin 780^\circ = ?$

$\cos 420^\circ = ?$

$\cos 780^\circ = ?$

$\sin 420^\circ =$

$= \sin(60^\circ + 360^\circ) =$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 780^\circ =$

$= \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 420^\circ =$

$= \cos(60^\circ + 360^\circ) =$

$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 780^\circ =$

$= \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$

$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\sin 765^\circ = \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ = \cos(30^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4\cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2\cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2{,}5\pi = \sin(0{,}5\pi + 2\pi) = \sin 0{,}5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{13\pi}{6} = tg\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = tg\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -ctg\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = -ctg\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Домашнее задание
№6.3 А(1-5), Б(1-5), В(1-5)

9) $-415°$; 10) $-520°$.


Спасибо за
внимание!