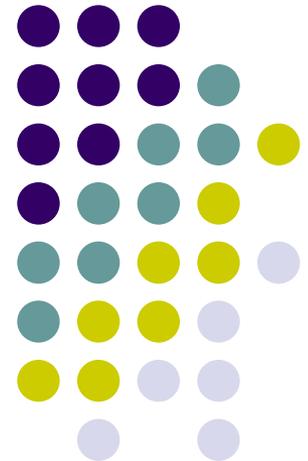


# Сложное сопротивление

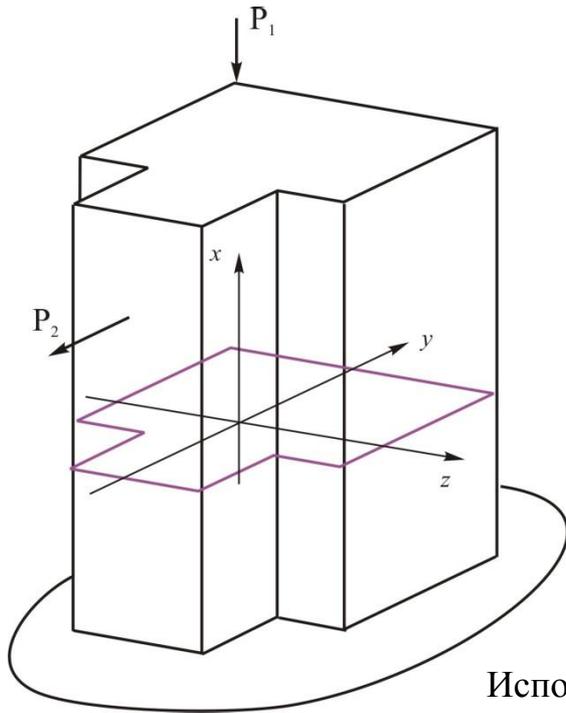
*Лекция 7.  
Совместное действие  
растяжения-сжатия  
и изгиба.*



# НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ



Этот случай сложного сопротивления часто встречается в инженерной практике в процессе эксплуатации колонн, опор мостов, путепроводов, виадуков и других подобных строительных конструкций, обладающих малой гибкостью.



Пусть некоторая колонна нагружена силой  $P_1$ , действующей вдоль её продольной оси и приложенной не в центре тяжести поперечного сечения, и системой поперечных сил (в рассматриваемом случае силой  $P_2$ ).

Выделим произвольное поперечное сечение, в котором будут действовать внутренние силовые факторы: продольная сила и два изгибающих момента  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Влиянием поперечных сил

$Q_y$ ,  $Q_z$  будем пренебрегать, потому, что в большинстве случаев на прочность колонны оно незначительно.

От действия продольной силы и изгибающего момента в выбранном сечении возникают нормальные напряжения, которые могут быть представлены в виде следующих соотношений:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \frac{M_y \cdot z}{J_y} \quad \sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z}$$

Используя принцип независимости действия сил, запишем формулу для определения нормальных напряжений от совместного действия продольной силы и изгибающих моментов

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} \quad (1)$$

# УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ



Здесь:  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  - значения продольной силы и изгибающих моментов в рассматриваемом поперечном сечении;

$A$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  - соответственно, площадь и осевые моменты инерции относительно главно-центральных осей поперечного сечения;

$z$  и  $y$  - координаты точки, в которой определяются напряжения

Очевидно, условие прочности балки, испытывающей кривой изгиб, выполняется, если модуль максимальных нормальных напряжений, описываемых формулой (1), не будет превышать расчетного сопротивления:

$$\left| \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} \right| \leq R \quad (2)$$

В процессе реализации формулы (2) важно выбрать положение опасного сечения и опасной точки.

При выборе **опасного сечения** учитывают максимальные значения всех внутренних силовых факторов.

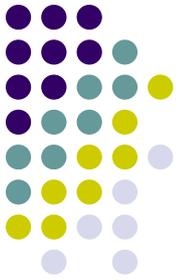
Если это условие реализуется в одном сечении, то оно и является опасным, если в разных, то необходимо проверить все сечения, в которых каждый из силовых факторов достигает максимальной величины.

## ОПАСНАЯ ТОЧКА

Как и в случае кривого изгиба опасной точкой в опасном сечении будет являться точка, наиболее удаленная от нулевой линии. А нулевой линией будем называть геометрическое место точек в плоскости поперечного сечения колонны, в которых нормальные напряжения (см. равенство (1)) равны нулю.

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0$$

# УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ



Разделим левую и правую части этого уравнения на первое слагаемое:

$$1 + \frac{M_y \cdot z}{J_y} \cdot \frac{A}{N} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot \frac{A}{N} = 0$$

Или:

$$\frac{z}{\left(-\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{N}{M_z} \cdot \frac{J_z}{A}\right)} = 1$$

Получили уравнение прямой, записанное в отрезках, которые она отсекает на осях “z” и “y”:

$$\frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1$$

Здесь :

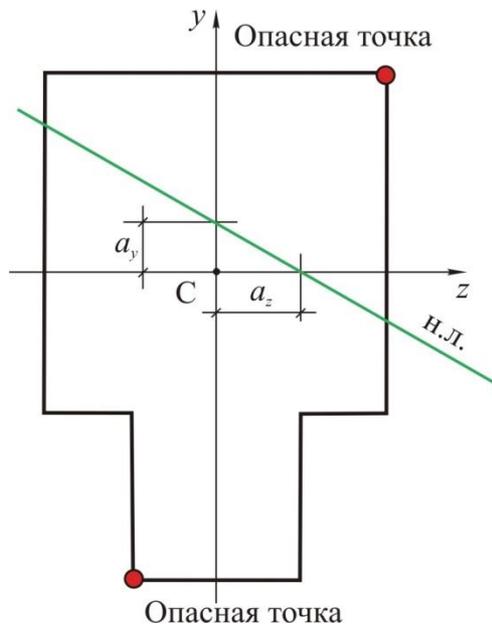
$$a_z = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{A}$$

$$a_y = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{J_z}{A}$$

(2)

Таким образом, если известны значения внутренних силовых факторов, а так же геометрические характеристики поперечного сечения, по формулам (2) определяются отрезки по осям, через которые проводят нулевую линию. Напомним, нулевая линия делит поперечное сечение на сжатую и растянутые части.

Теперь, можно определить положения опасных точек, как наиболее удалённых от нулевой линии.

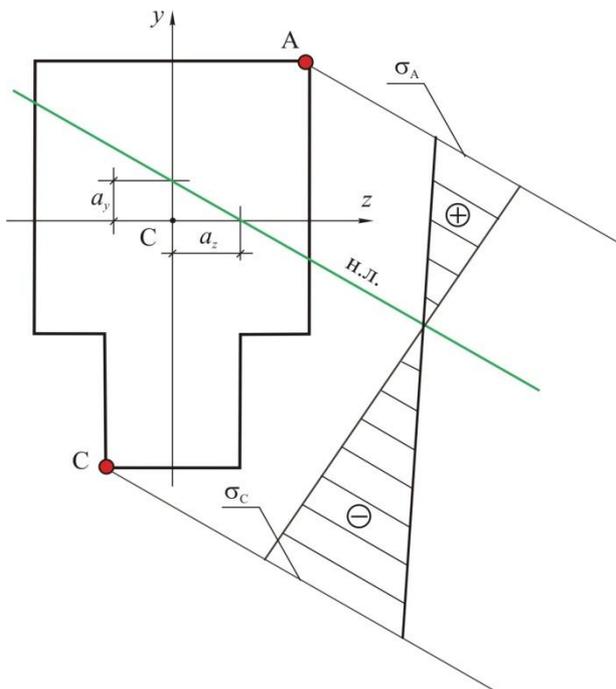


# УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

В итоге, условие прочности для колонны, находящейся в условиях совместного действия растяжения-сжатия и изгиба, может быть представлена в виде:

$$\left| \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z_{om}}{J_y} + \frac{M_z \cdot y_{om}}{J_z} \right| \leq R \quad (3)$$

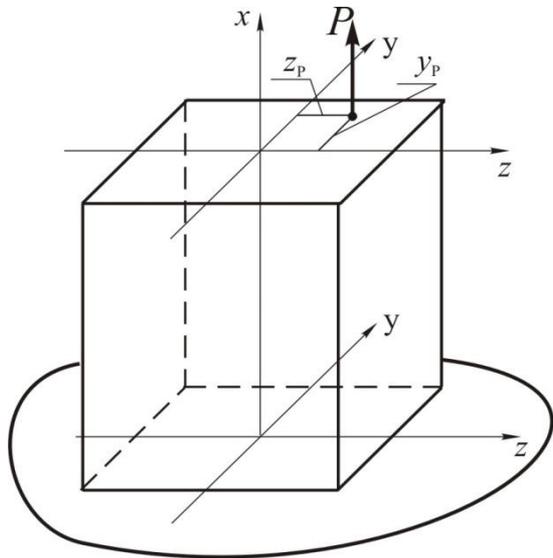
Так же, как и при косом изгибе, возможно построение пространственной или линейной эпюры в опасном поперечном сечении колонны.



# ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

## (СЖАТИЕ) КОЛОННЫ

Рассмотрим частный случай совместного действия растяжения (сжатия) и изгиба: на колонну действует только одна сила, которая направлена вдоль продольной оси стержня и приложена не к центру тяжести поперечного сечения.



Пусть на колонну действует сила "Р", которая приложена в точке, которая имеет координаты  $y_p$ ,  $z_p$ . Эту точку в дальнейшем будем называть "силовой точкой".

От действия такой нагрузки в любом поперечном сечении колонны будут действовать продольная сила и изгибающие моменты:

$$N = P, \quad M_y = P \cdot z_p, \quad M_z = P \cdot y_p$$

Тогда соотношение (1) можно преобразовать к виду:

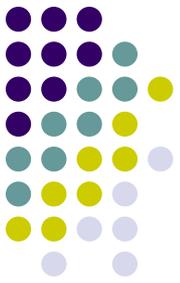
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot z_p \cdot z}{J_y} + \frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_z} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{z_p \cdot z}{\left(\frac{J_y}{A}\right)} + \frac{y_p \cdot y}{\left(\frac{J_z}{A}\right)} \right)$$

Введем понятия радиусов инерции:  $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$ ,  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$  и получим окончательно

$$\sigma = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} \right)$$

(4)

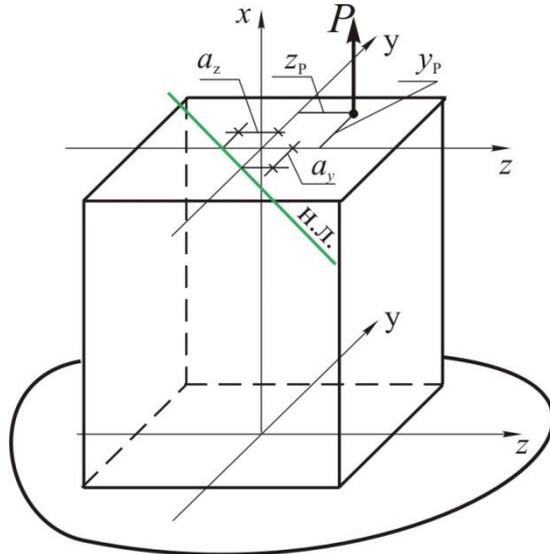




# ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

## НЕ) КОЛОННЫ

Найдем положение нулевой линии от действия такой нагрузки:



$$\sigma = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} \right) = 0$$

Или:

$$1 + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} = 0$$

$$\frac{z}{\left( -\frac{i_y^2}{z_P} \right)} + \frac{y}{\left( -\frac{i_z^2}{y_P} \right)} = 1$$

Окончательно:

$$\frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1$$

(5)

Здесь отрезки, отсекаемые нулевой линией по осям:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P}$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}$$

(6)