24.05.21.

Тема:
Обратная функция.
Равносильность уравнений.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/tnX9Oss6BKc
https://youtu.be/5tNAKQ3KtZM

Теоретическая часть:
Прочитать и понять.
Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Взаимно обратные функции

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко приходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

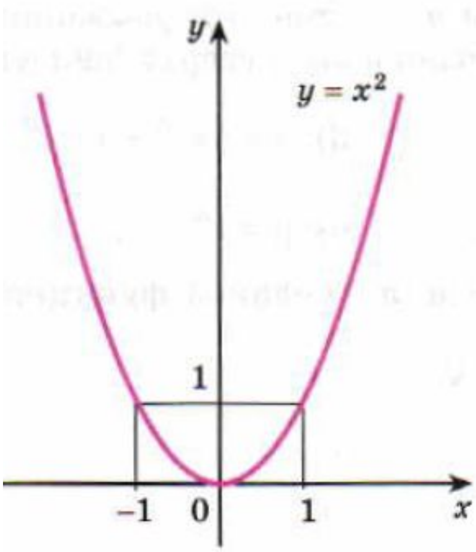

Рис. 14

Например, функция $y = 2x - 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y = 2x - 2$ относительно x.

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y = 1$ она принимает при $x = 1$ и при $x = -1$ (рис. 14).

Задача Найти функцию, обратную к функции

$$y = 3x + 5.$$

Решая это уравнение относительно x, получаем $x = \frac{1}{3}(y - 5)$. В этой формуле поменяем местами x и y:

$$y = \frac{1}{3}(x - 5).$$

Вообще, если обратимая функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для неё обратной $y = \frac{1}{3}(x - 5)$ функции. Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Задача 2 Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x-2}$.

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = 2 + \frac{1}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y = 2 + \frac{1}{x}$. ◁

Теорема 2. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

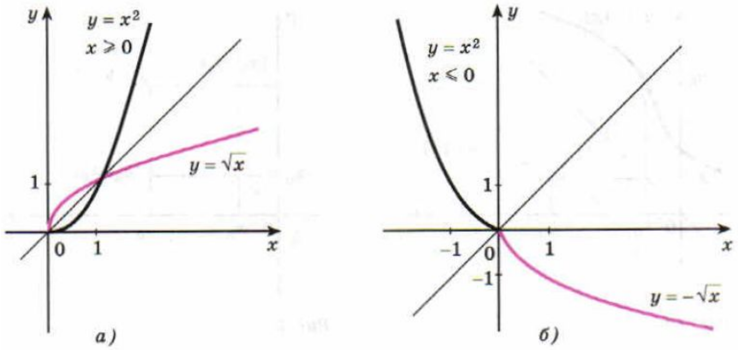

Рис. 18

Равносильные уравнения и неравенства

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.
Уравнения, не имеющие корней, также являются равносильными.

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x = 3$. Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1 = 2$, $x_2 = -5$. Уравнения $2x = 4$ и $3x^2 = 12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x = 2$, а второе — корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.
Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;
2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Задача Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2)$$

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трёх дробей, т. е. на $(x-1)(x-2)$, получим

$$2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4, \qquad (3)$$

откуда $x^2-x-2=0$, $x_1=2$, $x_2=-1$.

Проверка. 1) При $x=2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=2$ не является корнем данного уравнения.

2) При $x=-1$ левая часть уравнения равна

$$\frac{2\cdot(-1)}{-1-2}-\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{2}{3},$$

правая часть равна

$$\frac{4}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{2}{3}.$$

Ответ $x=-1$.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Задача Решить уравнение $x^2 - 4 = 7x - 14$.

► Преобразуем данное уравнение так:

$$(x + 2)(x - 2) = 7(x - 2),$$

откуда $(x + 2 - 7)(x - 2) = 0$, т. е. $(x - 5)(x - 2) = 0$, следовательно, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Если обе части уравнения (4) разделить на $x - 2$, то получится уравнение $x + 2 = 7$, которое имеет только один корень $x = 5$, т. е. произойдёт потеря корня $x = 2$, и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Практическая часть.

132 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x + 4$;

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; 4) $y = \frac{3x-1}{2}$;

5) $y = x^3 + 1$; 6) $y = x^3 - 3$.

139 Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$;

2) $\frac{1}{5}(2x - 1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$;

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$;

4) $(x - 5)^2 = 3(x - 5)$ и $x - 5 = 3$;

5) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x-1} = 0$;

6) $|x - 2| = -3$ и $3^x = (-1)^3$?

142 Решить уравнение:

1) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1}$; 2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$;

3) $(x - 3)(x - 5) = 3(x - 5)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$.