

The background features a dark blue gradient with faint, light blue mathematical diagrams. On the left, a large circular scale with tick marks and numbers from 140 to 260 is visible. Several circular diagrams with arrows and dashed lines are scattered across the page, suggesting a focus on geometry or trigonometry.

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОС ТИ

СЕМИНАР 1

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

# НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

Обозначим  $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$ , тогда по формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)x^k}{k!} + \dots$$

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \dots$$

Так как  $\sqrt[n]{n} - 1 > 0$ , каждое слагаемое в полученном выражении положительно, следовательно, верна следующая оценка

$$n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Отсюда,

$$a_n^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \text{ или}$$

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Найдем  $n$ , для которых будет выполняться неравенство  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ . Учитывая построенные оценки для  $a_n$ , найдем  $n$  из неравенства

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Таким образом, неравенство  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$  выполняется для всех  $n > n_0 = \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ , что доказывает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

# НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  для  $\forall a \neq 0$ .

Для  $a = 1$ , утверждение очевидно. Пусть  $a > 1$ , тогда  $\sqrt[n]{a} > 1$  и  $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$ .

Воспользуемся формулой бинома Ньютона для  $x > 0$ :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

Представим число  $a$  следующим образом:

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{a} - 1)^2 + \dots > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Неравенство верно, так как  $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$  и все слагаемые в сумме положительны.

Из этого неравенства получим оценку для  $(\sqrt[n]{a} - 1)$ :

$$a > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Чтобы показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , нужно для  $\forall \varepsilon > 0$  указать номер элемента последовательности, начиная с которого, все ее элементы будут удовлетворять неравенству

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

Используя полученную оценку, можем записать:

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{a-1}{\varepsilon},$$

следовательно, начиная с номера  $n_0 = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil$ , все элементы последовательности  $\sqrt[n]{a}$  будут сколь угодно близки к значению 1.

Теперь пусть  $0 < a < 1$ , тогда  $\frac{1}{a} > 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$  по уже доказанному, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АРИФМЕТИКЕ

**Теорема об арифметике пределов последовательности.**

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , тогда:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha a$  для любого действительного числа  $\alpha$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ , если  $b \neq 0$ .

**Пример.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$ .

**Решение.** Числитель и знаменатель дроби стремятся к  $\infty$ , имеем неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ . Разделим числитель и знаменатель на  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Дробь  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно, знаменатель дроби

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

# ПРЕДЕЛЫ С ФАКТОРИАЛАМИ

Факториалом натурального числа  $n$  называется натуральное число  $n!$ , равное произведению чисел от 1 до  $n$ :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Очевидны равенства

$$(n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n + 1) = n! (n + 1)$$

$$(n + 2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n + 1) (n + 2) = n! (n + 1) (n + 2) = (n + 1)! (n + 2).$$

При вычислении пределов последовательностей, содержащих разные факториалы, необходимо выразить все факториалы через самый младший:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!((n+1) - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!((n+1) - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

# ШКАЛА РОСТА

Последовательности  $\ln^a n$  ( $\forall a$ ),  $n^b$  ( $\forall b > 0$ ),  $a^n$  ( $\forall a > 1$ ),  $n!$ ,  $n^n$  являются бесконечно большими.

При  $n \rightarrow \infty$  верна цепочка неравенств

$$\underbrace{\ln^a n}_{\forall a} < \underbrace{n^b}_{\forall b > 0} < \underbrace{a^n}_{\forall a > 1} < n! < n^n,$$

которую называют *шкалой роста*.

Для элементов шкалы можно записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{b} = 0,$$

где  $m$  – меньший элемент,  $b$  – больший элемент шкалы.

Так предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^{20}} = \infty$ , а предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{1,01^n} = 0$ .

# ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА

**Пример.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1}$ .

**Р е ш е н и е.** На бесконечности числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

Для раскрытия неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе  $n$  в старшей степени:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 3 + \frac{10}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)}.$$

Величины  $\frac{10}{n}$ ,  $\frac{4}{n^2}$ ,  $\frac{1}{n^2}$  являются бесконечно малыми при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. стремятся к нулю, следовательно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 3 + \frac{10}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3.$$



# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  называются эквивалентными, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Эквивалентные последовательности обозначаются  $a_n \sim b_n$ .

Например, последовательности  $\{n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ , а так же последовательности  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$  эквивалентны, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Аналогично, многочлен  $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_n$  эквивалентен слагаемому, содержащему старшую степень  $n$ , то есть

$$a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_n \sim a_0 n^k, \text{ так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_n}{a_0 n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \dots + a_n \frac{1}{n^k}}{a_0} = 1.$$

Поэтому при нахождении пределов, содержащих действия с многочленами, слагаемые с младшими степенями можно отбросить (только не в разности эквивалентных!):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2}+n)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2} = 4.$$

# РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример.** Вычислим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1+n}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+2}}$ .

**Р е ш е н и е.** Перейдем к эквивалентным величинам в числителе и знаменателе:

$$4n^2 + 1 \sim 4n^2; \quad 8n^3 + n^2 + 2 \sim 8n^3 \text{ при } n \rightarrow \infty ,$$

и вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1+n}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}}{\sqrt[3]{8n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} .$$

# РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример.** Вычислим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$

**Решение.** В числителе можно перейти к эквивалентным бесконечно большим, но в знаменателе такой переход «превратит» разность бесконечно больших в выражение, тождественно равное нулю:

$$(n+1)^4 - (n-1)^4 \sim n^4 - n^4 = 0 \text{ НЕВЕРНО!}$$

Преобразуем разность в знаменателе, раскрывая степени:

$$\begin{aligned} (n+1)^4 - (n-1)^4 &= \left( (n+1)^2 - (n-1)^2 \right) \left( (n+1)^2 + (n-1)^2 \right) = \\ &= (n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1)) \left( (n+1)^2 + (n-1)^2 \right) = 4n \left( (n+1)^2 + (n-1)^2 \right) \sim 4n \cdot 2n^2 = 8n^3, \end{aligned}$$

и вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - (n-1)^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^3 - (n)^3}{8n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3}{8n^3} = \frac{7}{8}.$$

# РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример.** Вычислим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right)$

**Р е ш е н и е.** Перейти к эквивалентным в знаменателях дробей нельзя, так как при этом:

$$\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n} - \frac{n^3}{n^2} = n - n \equiv 0 \text{ НЕПРАВИЛЬНО!}$$

Преобразуем разность дробей, переходя к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n^2+1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 - n^4 - n^3}{n \cdot n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n^3} = -1. \end{aligned}$$

# РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример.** Вычислим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ .

**Р е ш е н и е.** Перейти к эквивалентным под знаками корней нельзя, так как при этом разность будет тождественно равна нулю, поэтому преобразуем выражения, домножив и разделив на сопряженное относительно разности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} =$$

Произведение в числителе преобразуем в разность квадратов, а в знаменателе перейдем к эквивалентным

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n} = 0.$$

# ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

При подстановке бесконечно большого значения  $n$  в выражение в пределе, получается неопределенность  $[1^\infty]$ .

Важно: в данном случае  $[1^\infty] \neq 1$ , так как в основании не 1, а переменная величина  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , которая при  $n \rightarrow \infty$  принимает значения, сколь угодно близкие к 1, но не равные 1.

Часто второй замечательный предел будем применять в следующей форме.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

где  $a_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

# ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Пример:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$

При подстановке бесконечно большого значения  $n$  в выражение в пределе, получается неопределенность  $[1^\infty]$ , для раскрытия которой воспользуемся вторым замечательным пределом. Перепишем предел в следующем виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-2n)}\right)^n.$$

Преобразуем выражение в показателе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n \cdot \frac{1}{(-2n)} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n} \right)^{\frac{1}{(-2n)} \cdot n}$$

Выражение в скобках  $\left( \left(1 + \frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n} \right) \rightarrow e$ , следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n} \right)^{\frac{1}{(-2n)} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{2n}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

# ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Пример. Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3}{n^2 + 2n - 8} \right)^n$

Р е ш е н и е. При подстановке предельного значения в выражение определяем неопределенность вида  $[1^\infty]$ , для раскрытия которой приведем выражение ко второму замечательному пределу

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3}{n^2 + 2n - 8} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n^2 + 2n - 8) - 2n + 5}{n^2 + 2n - 8} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2n - 5}{n^2 + 2n - 8} \right)^{\left( -\frac{n^2 + 2n - 8}{2n - 5} \right) \cdot \left( -\frac{2n - 5}{n^2 + 2n - 8} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \left( -\frac{2n - 5}{n^2 + 2n - 8} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2n^2 - 5n}{n^2 + 2n - 8}} = e^{-2}. \end{aligned}$$



# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+3}{\sqrt{n^4+1}} \right)^n$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+3}} \right)^n$

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+3} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n!}{2^n + (n+1)!};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}.$$