

Решение СЛАУ методом Крамера



Габриэль Крамер

(31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция)

Габриэль Крамер родился 31 июля 1704 года в Женеве (Швейцария), в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. В 1730 году он опубликовал труд по небесной механике.

Крамер является одним из создателей линейной алгебры. Одной из самых известных его работ является «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликованный на французском языке в 1750 году. В ней Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем – метод Крамера.



Метод Крамера применяется для решения СЛАУ, в которых число неизвестных переменных равно числу уравнений

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий основной матрице системы, т. е. составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Метод Крамера

Составим ещё три определителя следующим образом:
заменяем в определителе последовательно 1, 2 и 3
столбцы столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 \cdot 4 - 11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24.$$

Ответ: $x=1$, $y=2$, $z=3$

ВЕРНЕМСЯ ОБРАТНО



Самостоятельная работа

1 вариант

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -24, \\ -2x_1 - 2x_2 - 10x_3 = -48, \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 18. \end{cases}$$

2 вариант

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

Домашнее задание

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$