Вероятность

Опыт (испытание)
Случайное событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. (A, B, C,…)
Достоверное событие
Невозможное событие

$$0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1$$

Схема случаев

События A_1, A_2, …, A_n называются ***несовместными*** , если они взаимно исключают друг друга, т.е. никакие два из них не могут появиться вместе.

События A_1, A_2, …, A_n образуют ***полную группу***, если они исчерпывают собой все возможные исходы, то есть не может быть так, чтобы в результате опыта ни одно из них не произошло.

События A_1, A_2, …, A_n называются ***равновозможными***, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность (вероятность) появления каждого из них.

Если события A_1, A_2, …, A_n обладают всеми тремя свойствами, то есть а) несовместны б) образуют полную группу и в) равновозможные, то они называются случаями, а про опыт говорят, что он сводится к схеме случаев.

Расчет вероятности для схемы случаев:

$$P(A) = \frac{m_a}{n}$$

Пример 1. В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Пример 2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Число сочетаний из ***к*** *элементов по* ***s:***

$$C_k^s = \frac{k * (k-1) * \cdots * (k-s+1)}{1 * 2 * \cdots * s}$$

$$C_k^s = C_k^{k-s}$$

Пример 3. В партии из N изделий M бракованных. Из партии выбирается наугад k изделий. Определить вероятность того, что среди этих k изделий будет ровно m бракованных.

Решение. Общее число случаев n = C_N^k . Найдем m_D — число случаев, благоприятных событию D = {ровно m дефектных изделий в контрольной партии}.

Найдем число способов, какими из M дефектных изделий можно выбрать m для контрольной партии; оно равно C_M^m Но ото еще не все: к каждой комбинации дефектных изделий нужно присоединить комбинацию из k — m доброкачественных; это можно сделать C_{N-M}^{k-m} способами. Каждая комбинация из m дефектных изделий может сочетаться с каждой комбинацией из k — m доброкачественных; число тех и других комбинаций надо перемножить.

Поэтому число благоприятных событию D случаев равно $m_D = C_M^m * C_{N-M}^{k-m}$;

P(D) = $\frac{C_M^m * C_{N\_M}^{k-m}}{C_N^k}$

Вероятность и частота

Частотой события в серии из N опытов называется отношение числа опытов , в которых это событие произошло, к общему числу произведённых опытов. Частоту события ещё называют статистической вероятностью

$$\mathrm{P}^*(\mathrm{A}) = \frac{M_a}{N}$$

Пусть производится некоторый опыт (эксперимент, испытание) со случайным исходом. Рассмотрим множество Q всех возможных исходов опыта; каждый его элемент $q \in Q$ будем называть элементарным событием, а все множество Q — пространством элементарных событий.

Любое событие A в теоретико-множественной трактовке есть некоторое подмножество множества Q: $A \in Q$.

Дадим определения:

Суммой двух событий А и В называется событие С, состоящее в выполнении события А или события В, или обоих событий вместе

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий А и В называется событие D, состоящее в совместном выполнении события А и события В.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном выполнении всех этих событий.

Противоположным по отношению к событию А называется событие $\overline{A}$, состоящее в непоявлении А и, значит, дополняющее его до Q .

Основные правила теории вероятности

1. <u>Правило сложения вероятностей</u>

Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий (всё равно какое именно), равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или} \ldots \text{ или } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

а) Если события $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

б) Если A – событие, а $\overline{\mathrm{A}}$ – противоположное ему событие, то $P(A)+P(\overline{\mathrm{A}}) = 1$, то есть сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Основные правила теории вероятности

2. Правило умножения вероятностей

Вероятность совмещения двух событий (то есть совместного появления и того и другого) равна вероятности одного из них, умноженной на вероятность другого, вычисленную при условии, что первое произошло.

$$P(A \text{ и } B) = P(A) * P(B/A),$$

где $P(B/A)$ – условная вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло.

$$P(A \text{ и } B) = P(B) * P(A/B)$$

а) События называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$. В противном случае A и B называются зависимыми.

б) События называются независимыми в совокупности, если

$$P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и} \ldots \text{ и } A_n) = P(A_1) * P(A_2) * \ldots * P(A_n)$$

в) Пусть несовместные события таковы, что $P(\bigcup_{m=1}^{M} H_m) = 1$. Тогда имеет место формула полной вероятности $P(A) = \sum_{m=1}^{M} P(A|H_m) P(H_m)$

Пример 1. Из урны, содержащей 4 белых и 3 черных шара вынимаются (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Представим событие C = {оба шара белые) как произведение двух событий: где A = {первый шар белый}, B = {второй шар белый}.

Найдем вероятность события C по формуле **P(A и B) = P(A)*P(B/A)**

Очевидно P (A) = 4/7. Найдем P(B\A). Для этого предположим, что событие A уже произошло, т. е. первый шар был белым. После этого в урне осталось 6 шаров, из которых 3 — белые:

p (B\A)= 3/6 = 1/2.

Отсюда P(C)=(4/7)*(1/2)=2/7.