Матричный метод решения СЛАУ (с помощью обратной матрицы)

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $|A| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных, т.е. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$.

Так мы получили решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом.

Пример решения СЛАУ матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

1. Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13$,

то систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить матричным методом. С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено как:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T=\frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^T=$$

$$=-\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7.$$

3. Осталось вычислить матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ -\frac{2}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$.

Задание

- Законспектируйте теоретический материал презентации
- По аналогии с примером решите СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$