УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Читает

Дружинин Виктор Владимирович

Лекции 36 часов

Практика 36 часов

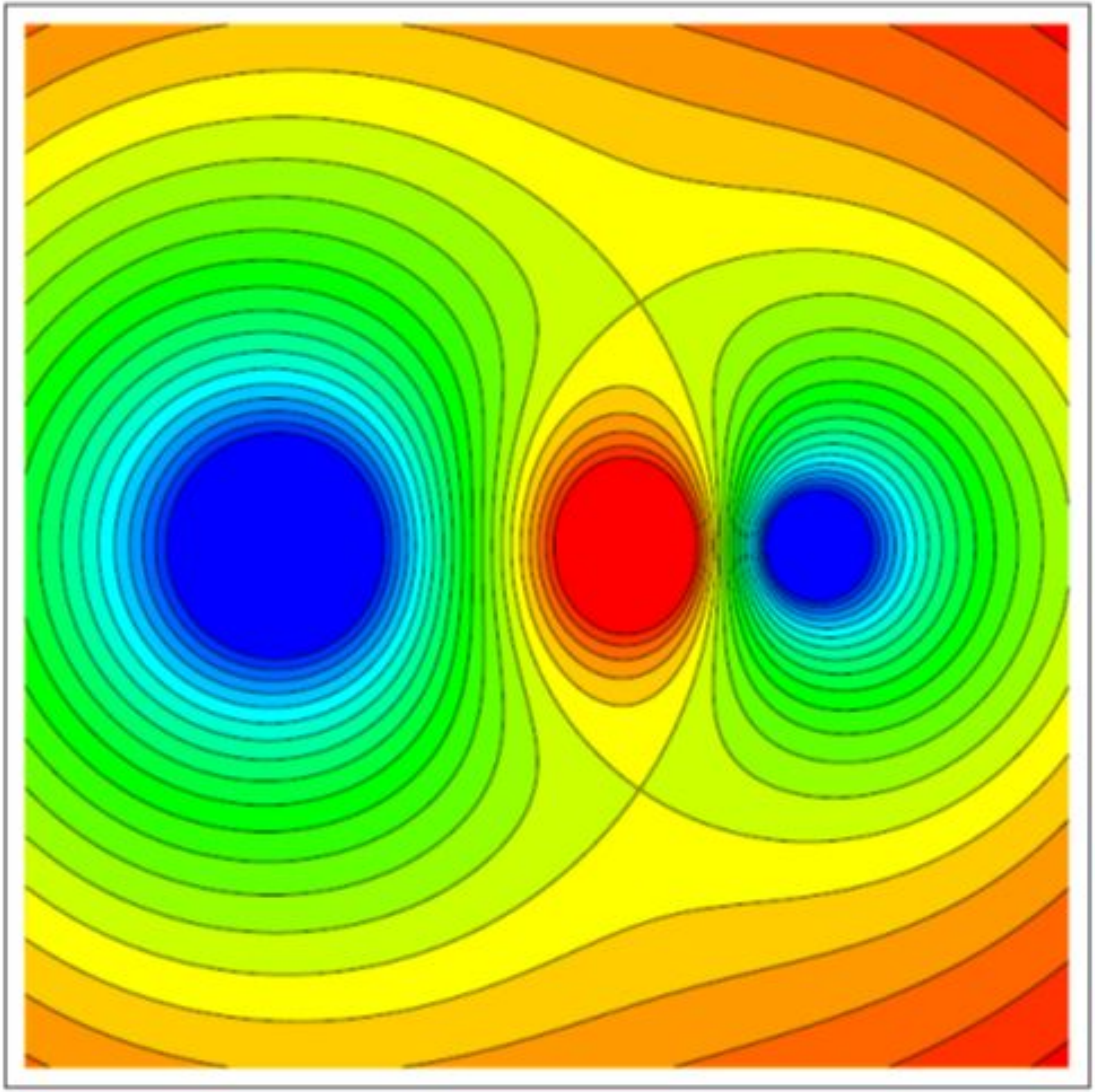
Контрольная работа, домашнее задание,

Экзамен.

Литература

1. А. Н. Тихонов и А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1972 г. Наука, ГРФМЛ.
2. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике., М. 1972, Наука, ГРФМЛ.

И. Г. Араманович, В.И. Левин. Уравнения математической физики, М., Наука, 1964 г.



Предметом математической физики является разработка методов решения задач, возникающих при изучении явлений внешнего мира. Реальные процессы характеризуются величинами, зависящими, в общем случае, от координат и времени. Соотношения между этими величинам, записанные в математических терминах, составляют математическую модель данного процесса. Указанные соотношения являются следствием законов природы и представляют собой дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные уравнения, а также набор дополнительных условий (граничных, начальных), учитывающих специфические свойства системы. Математическая модель лишь приближенно отражает эволюцию системы, так как невозможно учесть все факторы, определяющие ее поведение.

Мы будем решать дифференциальные уравнения в частных производных. В предыдущем третьем семестре мы решали обыкновенные дифференциальные уравнения, когда неизвестная функция засвистела только от одной переменной. Например,

$$y^{//} + 2y^{/} + y = 0.$$

В этом случае мы составляли характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0$$

Находили его корни $k_1 = k_2 = -1$ и составляли общее решение ДУ

$$y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-x}.$$

Решение есть функция $y(x)$ от одной переменной x.

Если надо найти функцию, зависящую от двух или более переменных $u(x, y, z, t)$, что чаще всего и требуется в повседневной практике, то надо брать уже частные производные и соответствующие уравнения называются **уравнениями в частных производных** или **уравнениями математической физики**. Оба термина эквивалентны.

Приведем несколько УМФ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Найдем его решения. $u(x.y) = 0$. Тривиальное решение.

$u(x.y) = e^{x-y}$. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x-y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x-y}. \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$u(x.y) = x = y. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$u(x.y) = sin(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos(x-y), \frac{\partial u}{\partial y} = -cos(x-y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Любая функция $u(x.y) = f(x-y)$ является решением этого уравнения.

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Его решение может иметь вид $u(x.y) = e^{xy}$. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$. Уравнение переходит в тождество. Любая функция $u(x.y) = f(xy)$ является решением этого уравнения.

Характерной особенностью УМФ является то, решение может быть много, причем это разные функции. В

обыкновенных ДУ частное решение определялось одной функцией, а размножение шло за счет произвольной константы

В большинстве стандартных курсов по уравнениям математической физики обычно ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В данном курсе помимо линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков мы рассмотрим также нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Гамильтона-Якоби, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега де Вриза (КДВ) и др.

Общим решением называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых об щее решение зависит от произвольных постоянных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения m, а количество переменных каждой функции равно n−1. Фиксация произвольных функций (возможно и неполная) происходит за счет граничных условий. Уравнение вместе с граничными условиями называется задачей.

Если одна из координат, скажем x_1, имеет смысл времени t, то уравнение (1.1) называют эволюционным. Для того чтобы найти решение эволюционных уравнений, требуется помимо граничных условий задавать также начальные условия (такую задачу называют задачей Коши).

Приведем несколько примеров уравнений в частных производных.

Пример 1.1 . Простейшее линейное однородное уравнение первого порядка в плоскости (x, y) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ имеет общее решение $u(x, y) = f(y)$, где f произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие $u(0, y) = \sin y$, то функцию $f(y) = \sin y$ легко найти, и мы получим частное решение.

В математической физике важную роль играют линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование многих физических процессов приводит к линейным уравнениям второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

Тут $u(x)$ неизвестная функция, коэффициенты, $a_{ij}(x)$ $b_i(x)$ $c(x), f(x)$ заданные дифференцируемые функции. Эти уравнения делятся на три класса: гиперболические, параболические и эллиптические. Классификация происходит следующим образом. Если есть квадратичная форма

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i \mu_i^2$$

и $s = n,\ r \cdot s \neq 0$ уравнение гиперболическое, $s < n$ уравнение параболическое, $r = n, s = 0$ уравнение эллиптическое. Примеры из аналитической геометрии

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Однородные линейные дифференциальные уравнения в частных производных

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

Почему однородное? Потому что справа стоит ноль, и $u(x, y) = 0$ есть тривиальное решение ДУ.

Почему линейное? Потому что u везде входит в первой степени, коэффициенты не зависят от $u(x, y)$.

Свойства решений таких уравнений. Если $u_1(x, y); u_2(x, y); u_3(x, y); \ldots . u_n(x, y)$ есть частные линейно независимые решения исходного ДУ, то их линейная комбинация

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) +,,, + C_n u_n(x, y)$$

Также является решением этого уравнения. C_k произвольные константы.

В обыкновенных ДУ имелась в такой задаче только лва линейно независимых решения, а тут из сколько хочешь.

Как определить линейную независимость n функций? Жду ответа.

Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических системах координат.

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в трехмерном пространстве виде

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

В двумерном пространстве он записывается в виде

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

В полярной системе координат $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\varphi$$

Поскольку $tg\varphi=\frac{y}{x}$**, то** $\frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$ $\quad\frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{x}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{sin\varphi}{r}\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{cos\varphi}{r}.$$

После ряда таких же манипуляций находим оператор Лапласа о полярной двумерной системе координат

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta u==\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Вывод уравнений колебания струны

Пусть имеется гитарная струна длиной l, концы которой закреплены, а сама струна туго натянута. Если отдельную точку струны оттянуть или ударить по струны, то струна выйдет из положения равновесия и начнет колебаться. При этом она будет издавать гармоничные звуки. Пусть и нас есть двумерная система координат ось OX и ось OU. Сама струна натянута вдоль оси OX, а ее отклонения идут по оси OU. Обозначим отклонение струны через $u(x,t)$. Если мы знаем эту функцию, то мы в любой точке струны x и в любой момент времени t знаем ее отклонение. Для того, чтобы найти эту функцию, мы должны воспользоваться вторым законом Ньютона, что дает уравнение движения

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

Мы умножили элемент массы dm на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и приравняли это действующей на участок струны силе F.

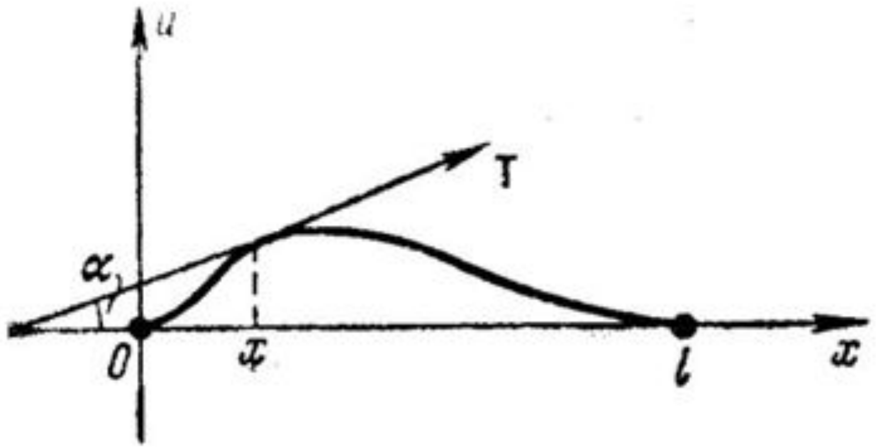


Рис. 1.

Будем изучать только малые колебания струны. Что это значит в математическом выражении. $sin\alpha \approx \alpha$ согласно ряду Маклорена для функции синуса. Отсюда следу-

ет, что $cos\alpha = 0, tg\alpha = \alpha$. Если посмотрим на рис.1, то замечаем, что $(\partial u/\partial x)^2 = \alpha^2 = 0$. Далее попробуем рассчитать длину участка струны M_1M_2. См рис.2

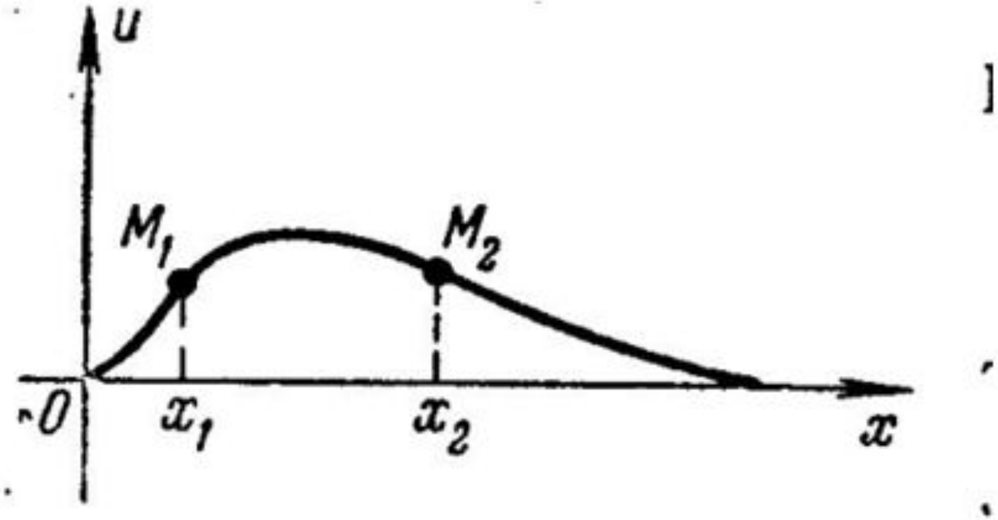


Рис. 2.

Вспомним, как рассчитывается длина кривой линии M_1M_2. Тут надо брать криволинейный интеграл первого рода

$$l_{M_1M_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}\,dx = x_2 - x_1.$$

Что означает это равенство? То, что в нашей модели струна при изгибе не растягивается. Следующим этапом нашего повествования является расчет сил действующих на участок струны M_1M_2. Введем понятие силы натяжения T, которая действует на концы участка. См. рис.3.

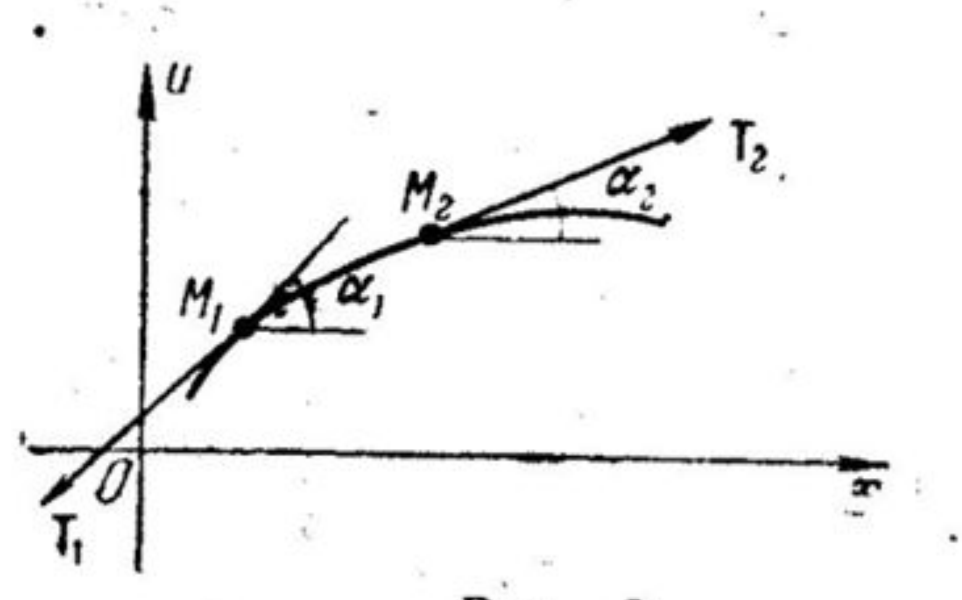


Рис. 3.

Поскольку струна не растягивается, то сумма горизонтальных сил должна быть равна нулю, т.е.

$$-T_1 cos\alpha_1 + T_2 cos\alpha_2 = 0$$

Откуда следует, что $T_1 = T_2 = T_0$. Далее на струне выделим малый участок (см. ри

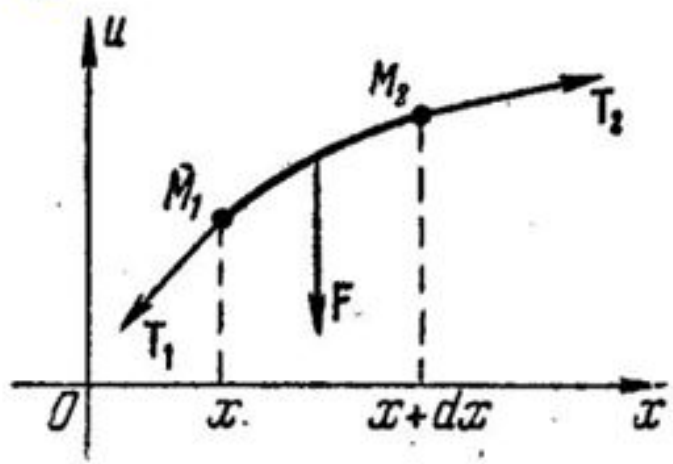


Рис. 4.

И рассчитаем вертикальную силу, т.е. силу, направленную по оси **OU**. Эта сила

$$F = -T_0 sin\alpha_1 + T_0 sin\alpha_2 = T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_2).$$

Так как

$$sin\alpha_2 = tg\alpha_2 = u_x^{/}(x + dx, t), sin\alpha_1 = tg\alpha_1 = u_x^{/}(x, t),$$

то

$$F == T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_2) = T_0\left[u_x^{/}(x + dx, t) - u_x^{/}(x, t)\right] =$$

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx.$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx$$

В результате получаем уравнение параболического типа, которое называется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx$$

Где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$**. Найдем размерность** a**.**

Это $\sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{кг/м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Итак, константа a имеет размерность скорости, и это реально есть скорость звука, издаваемого струной.

Наше ухо не воспринимает скорость звука напрямую. Но косвенно воспринимает. Физика дает длина волны $\lambda = aT$, где T – период колебаний, a – скорость звука. С другой стороны, период колебаний T связан с частотой колебаний ν – размерность $(1/\text{с})$ = Гц. Герц указывает число колебаний за одну секунду. Человеческое ухо воспринимает колебания воздуха в интервале от ν =16 Гц – граница инфразвука, до $\nu = 2 \cdot 10^4$ Гц – граница ультразвука.

Поскольку $a = \lambda/T = \lambda\nu$, то $\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Этой формулой пользуются все музыканты настраивая струну на

нужную частоту. Если берем верхнюю струну на гитаре, которая толще других, и у которой, следовательно, линейная плотность ρ больше, то она дает низкие частоты. Если мы будем натягивать струну, то ее частота возрастает.

Таблицы 2-47 а и б. Частота колебаний некоторых музыкальных тонов

В таблицах даны выраженные в герцах частоты всех тонов равномерно темперированной гаммы на протяжении семи октав: контроктавы (C_{-1}), большой октавы (C), малой октавы (c), первой, второй, третьей и четвертой октавы (обозначения соответственно c_1, c_2, c_3 и c_4) для двух частот нормального тона la_3 (a_1 в первой октаве c_1): 1) частота la_3 равна 435 *гц* (табл. 2-47а) и 2) частота la_3 равна 440 *гц* (табл. 2-47б).

Таблица 2-47а

Тон	Октавы						
	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
c (до)	32,33	64,66	129,33	258,65	517,30	1034,6	2069,2
cis	34,25	68,51	137,02	274,03	548,06	1096,1	2192,3
d (ре)	36,29	72,58	145,16	290,32	580,65	1161,3	2322,6
dis	38,45	76,90	153,80	307,59	615,18	1230,4	2460,7
e (ми)	40,74	81,47	162,94	325,88	651,76	1303,5	2607,1
f (фа)	43,16	86,31	172,63	345,26	690,52	1381,0	2762,1
fis	45,72	91,45	182,90	365,79	731,58	1463,2	2926,3
g (соль)	48,44	96,89	193,77	387,54	775,08	1550,2	3100,3
gis	51,32	102,65	205,29	410,58	821,16	1642,3	3284,7
a (ля)	54,37	108,75	217,5	435,01)	870,0	1740,0	3480,0
ais	57,61	115,22	230,43	460,85	921,71	1843,4	3686,9
h (си)	61,03	122,07	244,13	488,27	976,54	1953,1	3906,1

Итак, мы разобрались с буквой a в волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это гиперболическое уравнение широко используется при рассмотрении различных колебаний. Внешних сил нет, поэтому колебания называются свободными.

Мы с вами уже заметили, что решений этого уравнения может быть бесконечное количество, поэтому надо ввести некоторые ограничения. Эти ограничения носят названия: начальные и граничные условия.

Что такое начальные условия? Они указывают на состояние струны перед началом колебаний. Обозначим это время через $t = 0$. При этом, так как тут входит вторая производная по времени, надо учитывать и положения точек струны в этот момент

$$u|_{t=0} \equiv u(x,0) = f(x),$$

и начальные скорости точек струны

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv u_t^{/}(x,0) = F(x).$$

Тут $f(x)$ и $F(x)$ заданные функции.

Но это не все. Надо еще знать граничные условия. Они показывают, что происходит на концах струны во все время колебаний. Вначале рассмотрим самый простейший случай: струна с закрепленными концами. Математически эти условия запишутся так

$$u|_{x=0} \equiv u(0,t) = 0,$$

$$u|_{x=l} \equiv u(l,t) = 0.$$

На самом деле могут быть и другие граничные условия.

Переходим к решению этого уравнения в частных производных. Тут применяется метод Фурье - метод разделения переменных. Будем искать неизвестную. функцию $u(x,t)$ в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

каждая из которых зависит только от x и от t. Если мы сейчас возьмем вторые производные от этой функции, то получим следующий результат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.$$

Если мы сейчас подставим эту функцию в исходное уравнение, то получим следующий результат

$$X \cdot T^{//} = a^2 X^{//} \cdot T$$

Деля обе части равенства на $X(x)T(t)$ получаем такое уравнение

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^{//}}{T} = \frac{X^{//}}{X}.$$

Поскольку левая часть этого уравнения зависит только от t, а правая часть зависит только от x , то это возмож-

но, если обе части этого равенства равны некоторой константе, т.е.

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^{//}}{T}=\frac{X^{//}}{X}=c.$$

Эту константу мы пока не знаем, но будем определять. Итак имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X^{//}(x)-cX(x)=0;\quad T^{//}-ca^2T(t)=0$$

К какому классу относятся эти уравнения? Это ДУ второго порядка, линейные, однородные, с постоянными коэффициентами. Они решаются через характеристическое уравнение.

$$k^2-c=0.$$

Пусть c действительная величина и он равна $c=\beta^2$. Тогда $k=\pm\beta$ и общее решение первого уравнения записывается в виде

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}.$$

Для того, чтобы найти константы C_1 и C_2, используем граничные условия

$$u(0,t) = 0,$$
$$u(l,t) = 0.$$

Они дают такую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\beta l} + C_2 e^{-\beta l} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\beta l} & e^{-\beta l} \end{vmatrix} = e^{-\beta l} - e^{\beta l} \neq 0,$$

Поэтому решение этой такое $C_1 = C_2 = 0$. Это означает, что никаких колебаний нет. Но на практике они есть.

Если взять $c = 0$, то $X(x) = C_1 + xC_2$. Тогда граничные условия дают

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 l = 0 \end{cases}$$

Опять получаем $C_1 = C_2 = 0$. Этот вариант снова не подходит. Остается последний случай $c = -\beta^2$. Характеристическое уравнение приобретает вид

$$k^2 + \beta^2 = 0$$

И корни являются комплексными числами

$$k_1 = i\beta;\ k_2 = -i\beta.$$

$$X(x) = C_1 cos(\alpha x) + C_2 sin(\alpha x).$$

Снова подставляем граничные условия. Левое дает

$$X(0) = C_1 cos(\beta 0) + C_2 sin(\beta 0) = 0.$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$ и

$$X(x) = C_2 sin(\beta x).$$

Правое граничное условие дает

$$X(l) = C_2 sin(\beta l) = 0.$$

Когда это может быть? Когда $\beta l = k\pi, k = \pm 1; \pm 2;. \pm 3; \dots$

Нулем k не может быть, так как это требует $\alpha = 0$, а этот вариант мы уже отвергли. Итак, $\beta = \frac{k\pi}{l}$ и

$$X_k(x) = C_k sin(\frac{k\pi x}{l}).$$

Мы получили бесчисленное множество решений координатной части функции $u_k(x,t) = X_k(x)T(t)$.

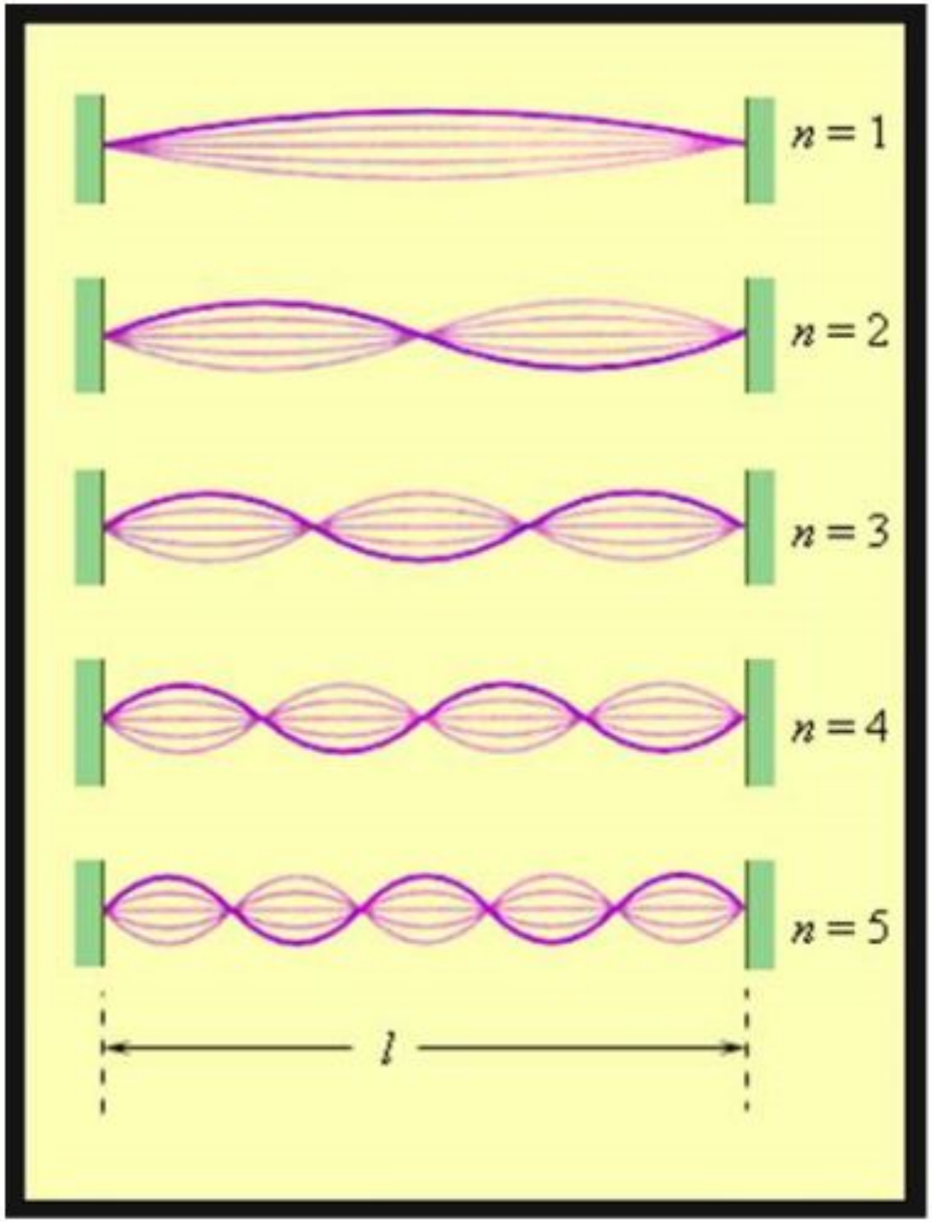
При $k = 1$ получаем $X_1(x) = C_1 sin(\frac{\pi x}{l})$.

При $k = 2$ получаем $X_1(x) = C_1 sin(2\frac{\pi x}{l})$

При $k = 3$ получаем $X_1(x) = C_1 sin(3\frac{\pi x}{l})$

При $k = 4$ получаем $X_1(x) = C_1 sin(4\frac{\pi x}{l})$

Струна может изгибаться только так



n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5
l

После этого результата обратимся ко второму обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T^{//}}{T} = -\beta^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

$$T^{//} + a^2\cdot\beta^2\cdot T = 0.$$

$$T_k(t) = B_k cos\left(k\frac{\pi at}{l}\right) + D_k sin\left(k\frac{\pi at}{l}\right).$$

Тут B_k **и** D_k **произвольные постоянные.**

После этого мы можем записать частное решение волнового уравнения колебаний закрепленной струны

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$$

$$= sin(\frac{k\pi x}{l})\left(a_k cos\left(k\frac{\pi at}{l}\right) + b_k sin\left(k\frac{\pi at}{l}\right)\right)$$

Это есть собственные колебания струны. Обозначим $k\frac{\pi a}{l} = \omega_k$. Найдем размерность $\omega_k \to \frac{\text{м}}{\text{см}} = \frac{1}{\text{с}}$. Размерность круговой частоты. Есть просто частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ и есть круговая частота $\omega = 2\pi\,\nu = \frac{2\pi}{T}$.

$$u_k(x,t) = sin(\frac{k\pi x}{l})\left(a_k cos(\omega_k t) + b_k sin(\omega_k t)\right).$$

Общее решение колебаний струны с закрепленными концами есть сумма этих частных решений

$$u(x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(a_k cos(\omega_k t) + b_k sin(\omega_k t)\right).$$

Мы получили бесконечную сумму функций, т.е. функциональный ряд. Надо найти, входящие в него коэффициенты a_k и b_k. Для этого нам понадобятся начальные условия, т.е. начальный изгиб струны и начальные скорости точек струны. Ранее мы их задали. Начнем с изгиба струны.

$$u|_{t=0} \equiv u(x,0) = f(x),$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(a_k cos(\omega_k 0) + b_k sin(\omega_k 0)\right). =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)(a_k) = f(x).$$

Для синусов существует такой интеграл ортогональности

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{l}{2n\pi}\int_0^l \left[1-\cos^2\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right] d\,\frac{n\pi x}{l} = \frac{ln\pi}{2n\pi} = \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = 0, m \neq n$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \delta_{m,n}\frac{l}{2}$$

Вот этим последним соотношением мы и будем пользоваться, для нахождения коэффициентов a_k и b_k. Рассмотрим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)(a_k) = f(x).$$

Умножим его на $sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ и проинтегрируем по всей струне

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\int_0^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$$

$$=\int_0^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)f(x)dx.$$

Что мы видим в левой части этого равенства? Буква m фиксирована, а буква k пробегает все возможные значения. В силу ортогональности не равно нулю только одно слагаемое в этой сумме, а именно, когда $m = k$. Отсюда находим конкретное выражение для

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)f(x)dx$$

Далее будем считать, что скорости точек струны перед началом колебаний покоятся, по другому, мы не ударяем по струне.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv u_t^{/}(x,0) = F(x) = 0.$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(a_k cos(\omega_k t) + b_k sin(\omega_k t)\right).$$

$$u_t^{/}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(-a_k\omega_k sin(\omega_k t) + b_k\omega_k cos(\omega_k t)\right).$$

Подставим в эту формулу $t = 0$ **и получим**

$$u_t^{/}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)(b_k\omega_k) = 0.$$

Поскольку ряд бесконечный, единственное решение

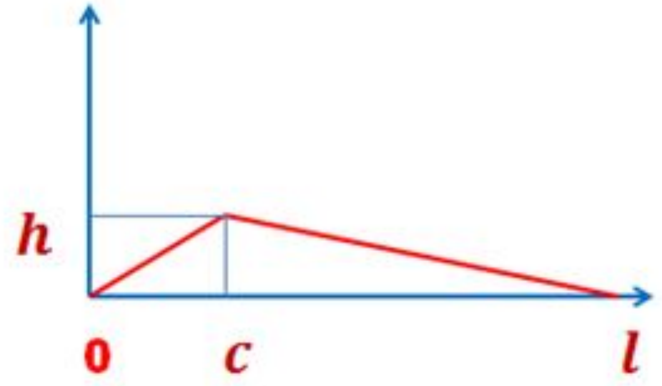
$$b_k = 0.$$

Итак, если мы немного исказили положение струны, но не ударяли по ней, и отпустили, струна начинает колебаться по закону

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) a_k cos(\omega_k t).,$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) f(x)dx \ ,.$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c}, \ 0 \le x \le c \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, c \le x \le l, \end{cases},$$

После этих приготовлений начинаем рассчитывать колебания струны

$$= \frac{2}{l}\int_0^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^c sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\left(\frac{hx}{c}\right)dx +$$

$$+ \frac{2}{l}\int_c^l sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\left(\frac{h(l-x)}{l-c}\right)dx.$$

Такие интегралы берутся по частям. Не будем приводить громоздкие промежуточные расчеты, сразу дадим конечную формулу

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)} sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Что дает эта формула? Она дает амплитуды колебательных мод струны, т.е. состав и интенсивности обертонов. Оказывается тембр струны, т.е. красота звучания струны зависит от точки c.

Рассмотри два варианта: $c = l/2$ и $c = l/3$. Если мы отгибаем струну посередине, то

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)} sin\frac{k\pi c}{l} = \frac{8h}{k^2\pi^2} sin\frac{k\pi}{2}$$

Какие же моды не равны нулю? При $k = 1$ имеем

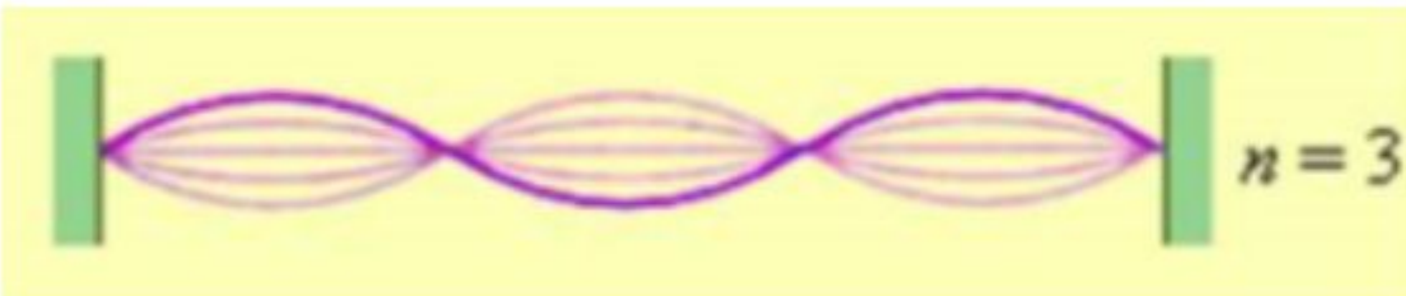
$$a_1 = \frac{8h}{\pi^2} \qquad k\frac{\pi a}{l} = \omega_k \qquad \frac{\pi a}{l} = \omega_1$$

$$u_1(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{\pi a}{l} t\right)$$

Это основной тон струны

При $k = 2$ имеем отсутствие колебаний. При $k = 3$ имеем

$$u_3(x,t) = \frac{8h}{9\pi^2} sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{3\pi a}{l} t\right)$$

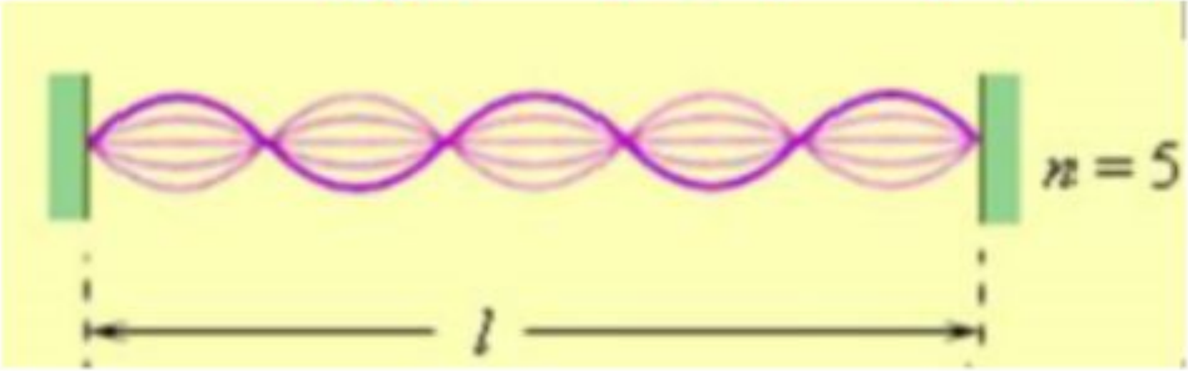


Это первый обертон колеблющейся струны. Амплитуда в девять раз меньше основного тона. А, так как энергия

колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, звук от этой моды будет в «81» раз слабее основного тона, и частота колебаний будет в три раза больше, т.е. это более высокий звук.

При $k = 4$ имеем отсутствие колебаний. При $k = 5$ имеем

$$u_3(x,t) = \frac{8h}{25\pi^2} sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{5\pi a}{l} t\right)$$



Это второй обертон колеблющейся струны. Амплитуда в 25 раз меньше основного тона. А, так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, звук от этой моды будет в «625» раз слабее основного тона, и частота колебаний будет в три раза больше, т.е. это более высокий звук.

Таким образом, при центральном отклонении струны, окраска мелодии слаба, работает фактически один обертон, с утроенной частотой и звуком в сто раз слабее.

Следующий пример связан с отклонение струны при $c = l/3$.

Какие же моды не равны нулю? При $k = 1$ имеем

$$a_1 = \frac{9h}{\pi^2} \qquad k\frac{\pi a}{l} = \omega_k \qquad \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \omega_1$$

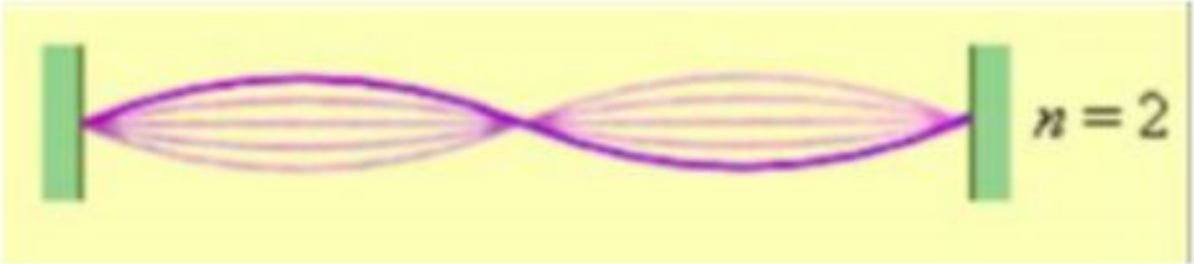
$$u_1(x,t) = \frac{9h}{\pi^2} sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)$$

Это основной тон струны. Частота та же, изгиб струны тот же, одна полуволна.

При $k = 2$ есть колебания.

$$u_2(x,t) = \frac{9h}{4\pi^2} sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{2\pi a}{l}t\right).$$

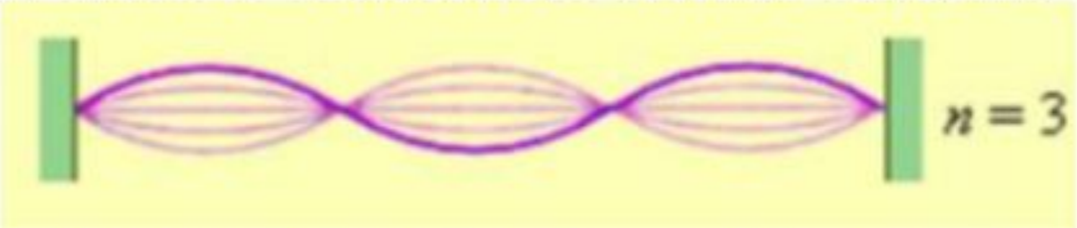
Это первый обертон. Тут две полуволны, частота звука больше в два раза основного звука, По интенсивности этот обертон слабее основного тона в 16 раз.



При $k = 3$ есть колебания.

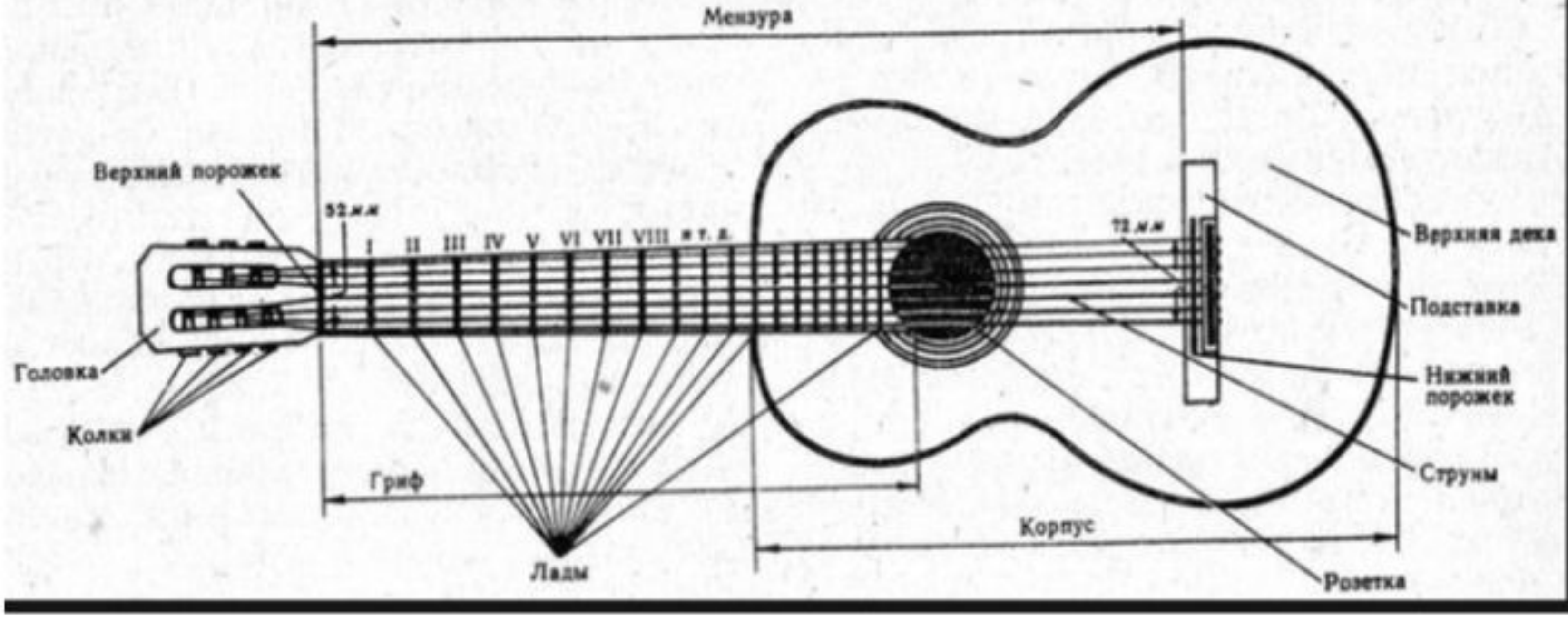
$$u_2(x,t) = \frac{9h}{9\pi^2} sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{3\pi a}{l} t\right).$$

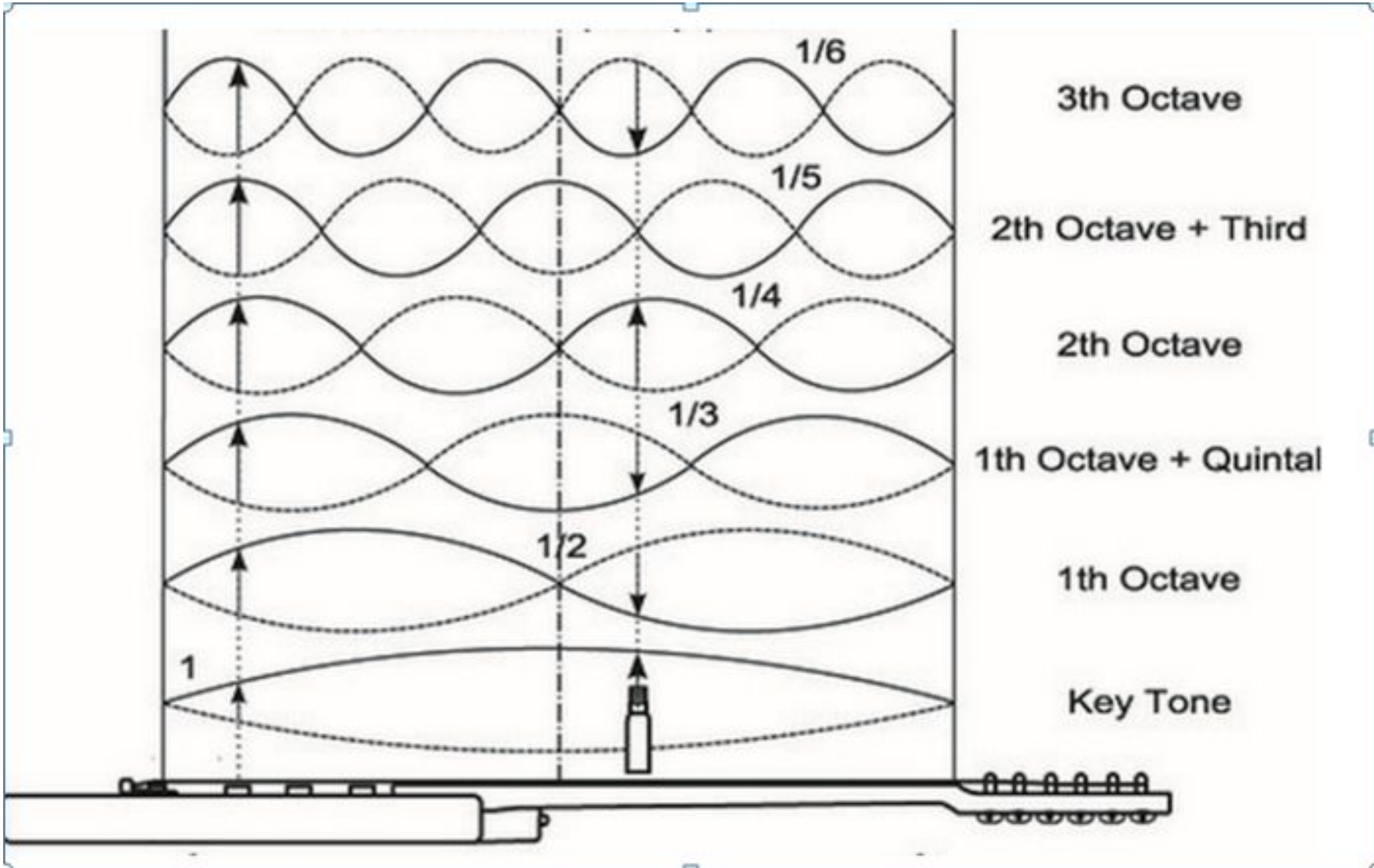
Это второй обертон. Тут три полуволны, частота звука больше в три раза основного звука, По интенсивности этот обертон слабее основного тона в 81 раз.



Итак, мы рассчитали, что звук струны значительно красивее, если ее отгибать на расстоянии $c = l/3$ от закрепленного конца струны. Это заложено в устройстве гитары. Мы видим, на этом расстоянии расположено круговой отверстие в резонатор.

Большая гитара (мензура 650 мм)



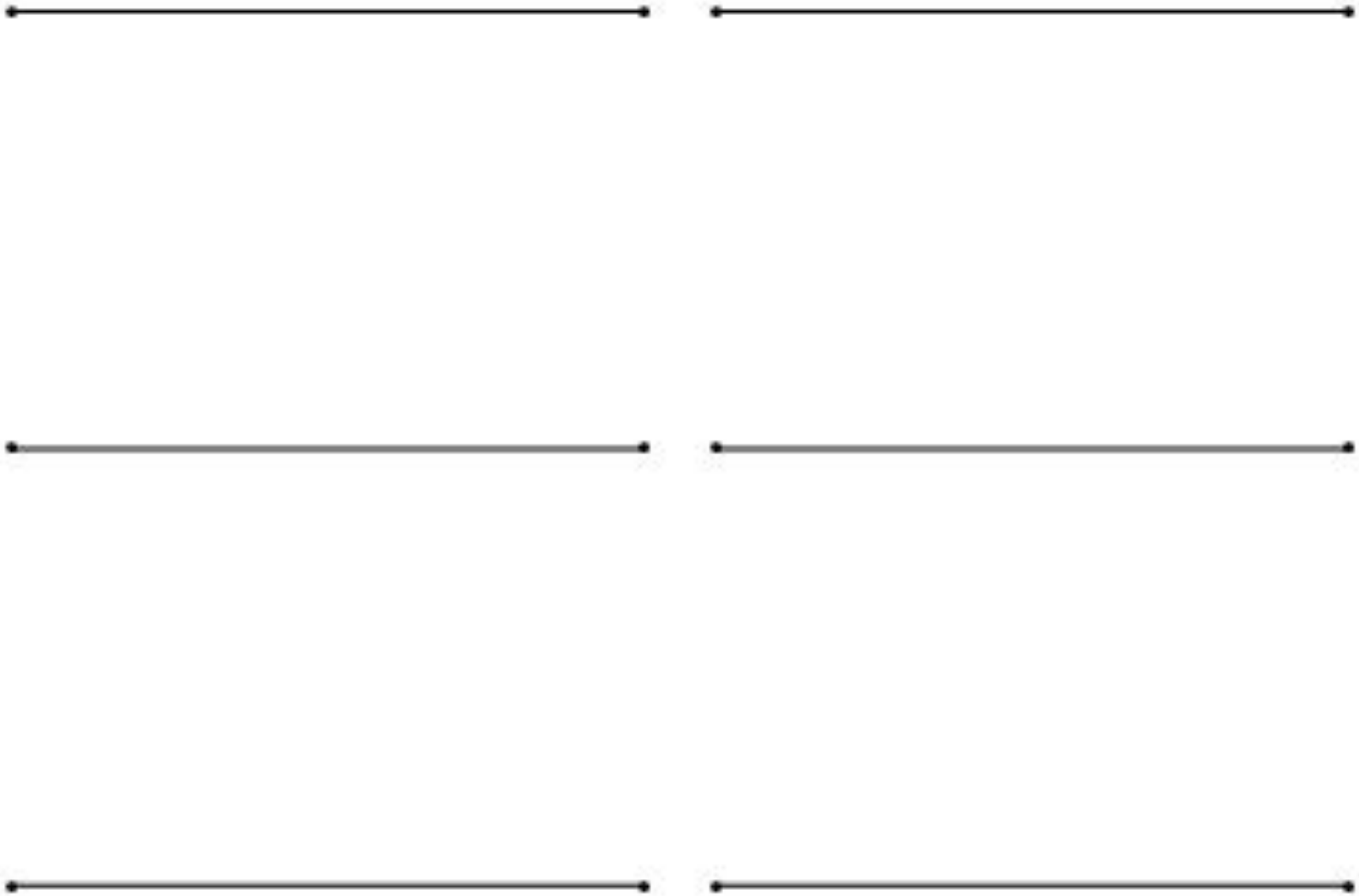

1/6
3th Octave
1/5
2th Octave + Third
1/4
2th Octave
1/3
1th Octave + Quintal
1/2
1th Octave
1
Key Tone

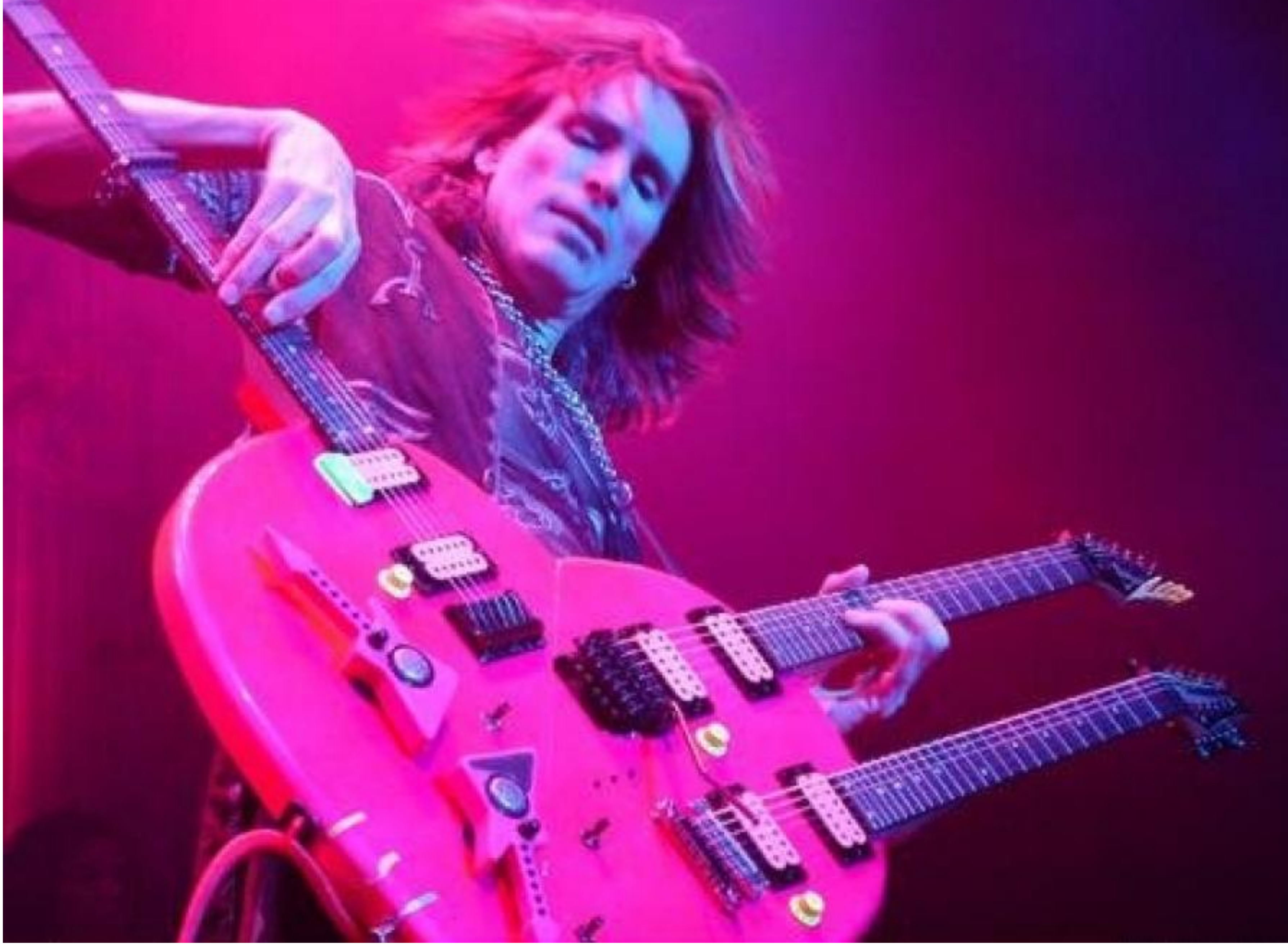
Но и это еще не всё, — неосновные частоты струн гитары накладываются друг на друга и получаются и другие частоты. Подробная спектрограмма колебаний гитарной струны на самом деле очень сложная, и имеет множество небольших всплесков частот, не кратных основной.

Гармоники постепенно затухают по амплитуде по мере продвижения вверх по частоте. Но характер затухания этих частот у разных типов струн разный. Это и лежит в основе различимой на слух тембральной окраски различных комплектов струн.

При желании всё можно самостоятельно увидеть на экране обычного ноутбука, используя практически любой аудио-редактор.

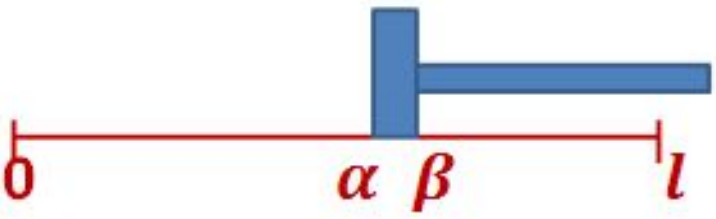

MESA





Далее рассмотрим другой способ игры на закрепленной струне, а именно, возбуждении колебаний ударом. В пианино и фортепиано это делается на участке струны (α, β) ударом плоским жестким молоточком. Сама струна при этом не искажена, т.е. $f(x) = 0$. А вот другая функция из начальных условий выглядит так

$$(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x < \alpha \\ v_0, \alpha \le x \le \beta \\ 0, \beta < x \le l \end{cases}$$



$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(a_k cos(\omega_k t) + b_k sin(\omega_k t)\right).$$

Снова рассмотри эту функцию с точки зрения начального условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv u_t^{/}(x,0) = F(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(-a_k\omega_k sin(\omega_k t) + b_k\omega_k cos(\omega_k t)\right).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)(b_k\omega_k).$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x) sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx = \frac{2v_0}{k\pi a}\int_\alpha^\beta sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$
$$= \frac{2lv_0}{k^2\pi^2 a}\left(cos\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) - cos\left(\frac{k\pi\beta}{l}\right)\right).$$

Тут также возникает основной тон, когда имеется только одна полуволна, и обертоны - две, три и более стоячих полуволн. Мы их рассчитывать не будем, так как вычисления громоздкие, а качественно все результаты те же.

Реально колебания струны также состоят из наложения бесконечного количества стоячих волк с разными частотами и амплитудами

$$u(x,t)=\frac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(cos\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)-cos\left(\frac{k\pi\beta}{l}\right)\right)}{k^2}sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left(sin(\omega_k t)\right).$$

На практических занятиях мы рассматривали колебание такой струны, ели молоточек ударял по первой половине струны от $x=0$ до $x=l/2$**. Сейчас рассмотрим случай, когда молоточек имеет длину струны, т.е. вся струна от** $x=0$ до $x=l$ **приобретает скорость** v_0 **, но при этом не изгибается. Посмотрим, какие обертоны тут возникают. Так как** $cos\left(\frac{k\pi 0}{l}\right)=1, cos\left(\frac{k\pi l}{l}\right)=(-1)^k$**, то нам надо брать** $k=2n+1$ **нечетное, чтобы в числителе получился не ноль. В результате формула колебаний имеет вид**

$$u(x,t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right)\left(sin(\omega_{(2n+1)}t)\right).$$

Начнем с $n = 0$.

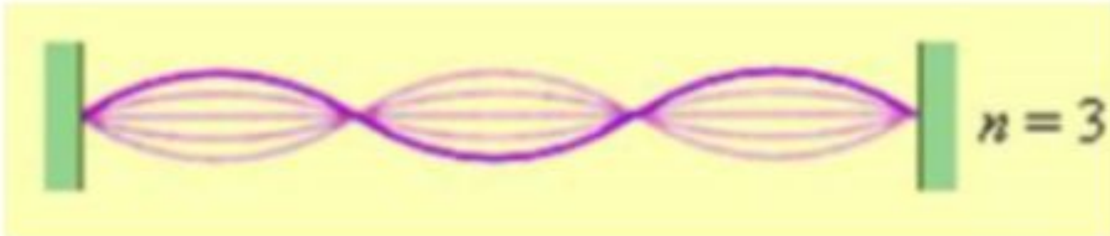
$$u_0(x,t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\left(sin(\omega_1 t)\right).$$

Это основное колебание струны.

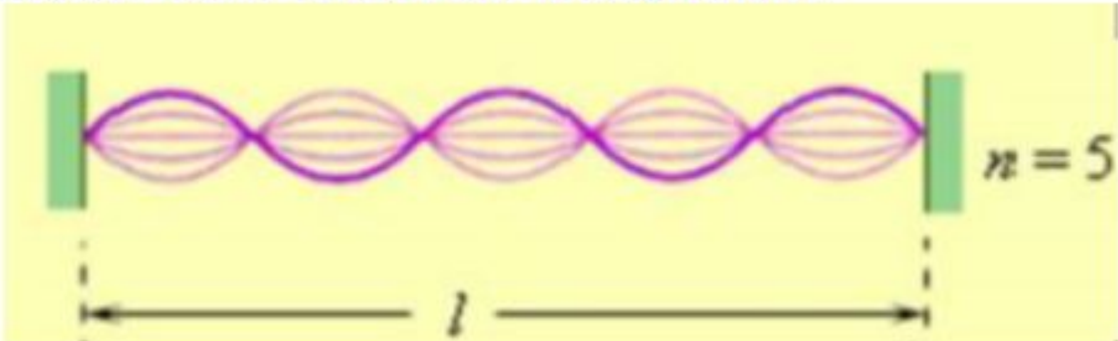
Далее возьмем $n = 1$. Эта мода имеет частоту ω_3, т.е. в три раза большую, чем основной тон и

$$u_1(x,t) = \frac{4lv_0}{9\pi^2 a} sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)\left(sin(\omega_1 t)\right)$$

Мы видим, что интенсивность этой моды почти в сто раз меньше основного звука, и на струне укладываются три полуволны.



Следующая по счету мода с $n = 2$ имеет интенсивность примерно в 625 меньше, чем основной тон, и на струне укладываются пять стоячих полуволн.



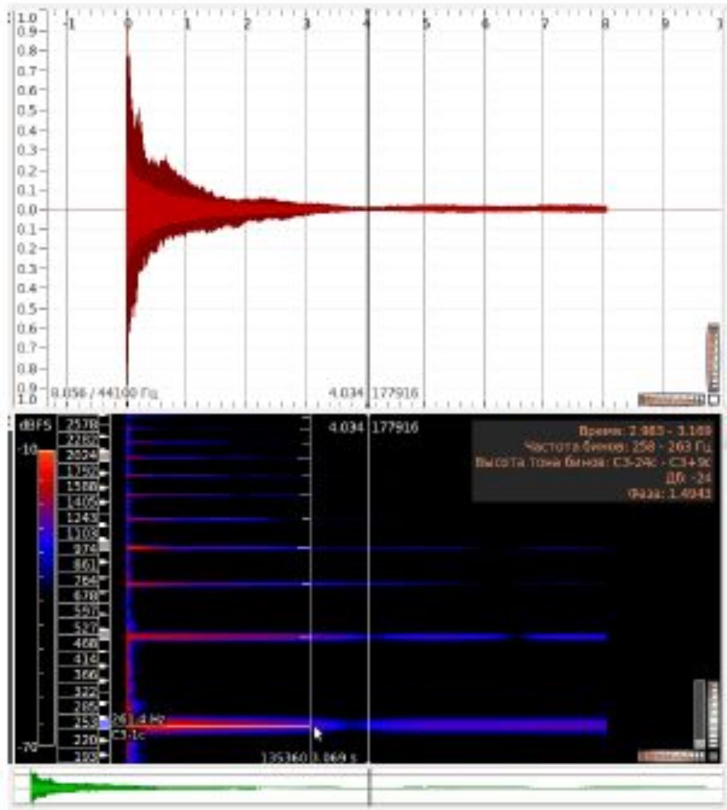


Рис. 1.9: Волновая функция и спектрограмма звука, издаваемого при нажатии клавиши До на рояле YAMAHA C7.

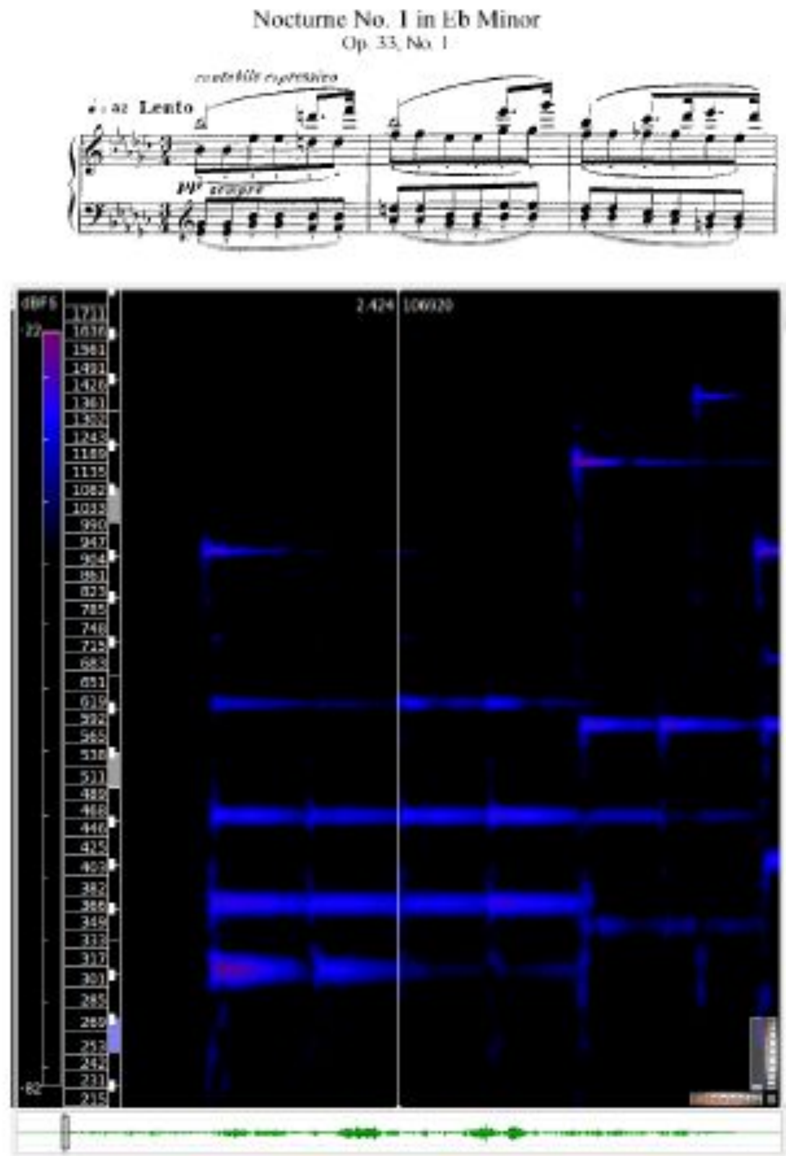


Рис. 1.10: Спектрограмма первого такта ноктюрна № 1 Г. Форе.

Колебания бесконечной струны

Эта задача не является какой-то немыслимой абстракцией, но находит вполне реальные аналоги в реальной жизни. Если закрепленная с обоих концов струна очень длинная, то искажение ее состояния в середине струны будут достаточно долго распространяться до концов. Примером такого колебания является подводное землетрясение в океане.

С точки зрения математики это выразится в исчезновении граничных условий, хотя начальные условия останутся. Записываем задачу так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

С начальным изгибом струны

$$u|_{t=0} \equiv u(x,0) = f(x),$$

и начальными скоростями точек струны

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv u_t'(x,0) = F(x).$$

Тут $f(x)$ и $F(x)$ заданные функции на всей числовой оси. Задача только с начальными условиями называется задачей Коши. Решил эту задачу впервые Даламбер. Другое название метода решения этого уравнения - метод бегущих волн.

Общее решение этого уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x - at = \varsigma) + \omega(x + at = \zeta),$$

где $\omega(\zeta), \varphi(\varsigma)$ любые дважды дифференцируемые функции. Действительно,

$$\frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma}; \qquad \frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma^2}$$

$$\frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = -a\frac{\partial \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma}; \qquad \frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma^2}$$

Подстановка этих производных в исходное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дает тождество

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\varsigma)}{\partial \varsigma^2}$$

Таким образом, главную роль в решении играет не сама функция, а ее аргумент, который зависит от x и от t. Наша задача, исходя из начальных условий, найти эти неизвестные функции $\omega(\zeta), \varphi(\varsigma)$. Взяв $t = 0$ равное нулю, составим систему уравнений

$$\varphi(x) + \omega(x) = f(x)$$
$$-a\varphi^{/}(x) + a\,\omega^{/}(x) = F(x)$$

Интегрируем последнее равенство от 0 до x. Получаем такое уравнение

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\omega(x) - \omega(0)] = \int_0^x F(x)dx.$$

Или $$C = -\varphi(0) + \omega(0).$$

$$-[\varphi(x)] + [\omega(x)] = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)dx. + C,$$

Вспомним первое начальное условие

$$\varphi(x) + \omega(x) = f(x)$$

Из этих двух уравнений, складывая их вычитая, получаем вид неизвестных функций.

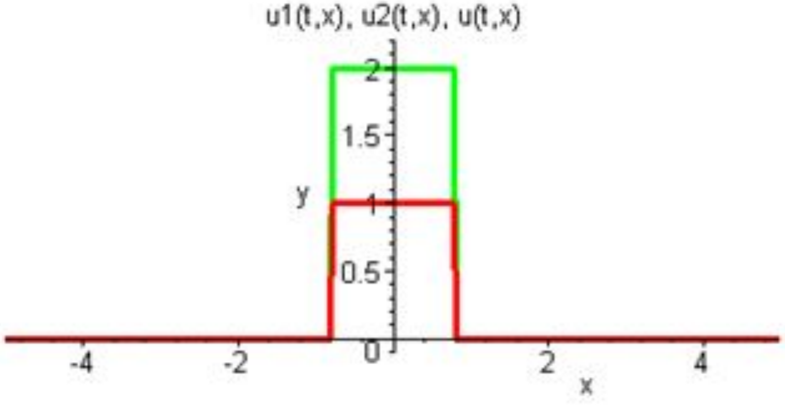
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)dx - \frac{C}{2}.$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)dx - \frac{C}{2}.$$

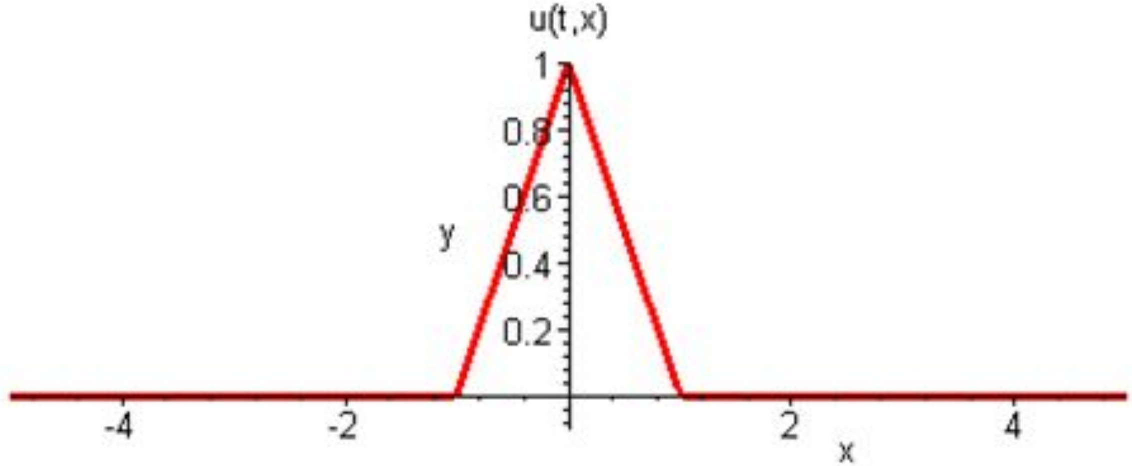
Пусть в начальных условиях $F(x) = 0$ и фактически остается только одно начальное условие

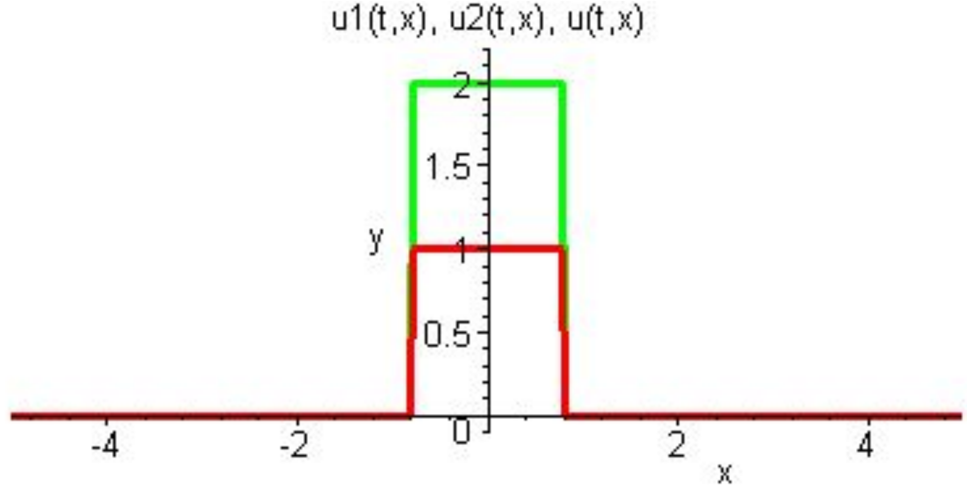
$$u|_{t=0} \equiv u(x,0) = f(x).$$

Реально это выглядит так. Мы создали в какой-то точке струны искажение ее формы и решили посмотреть, что же будет дальше?

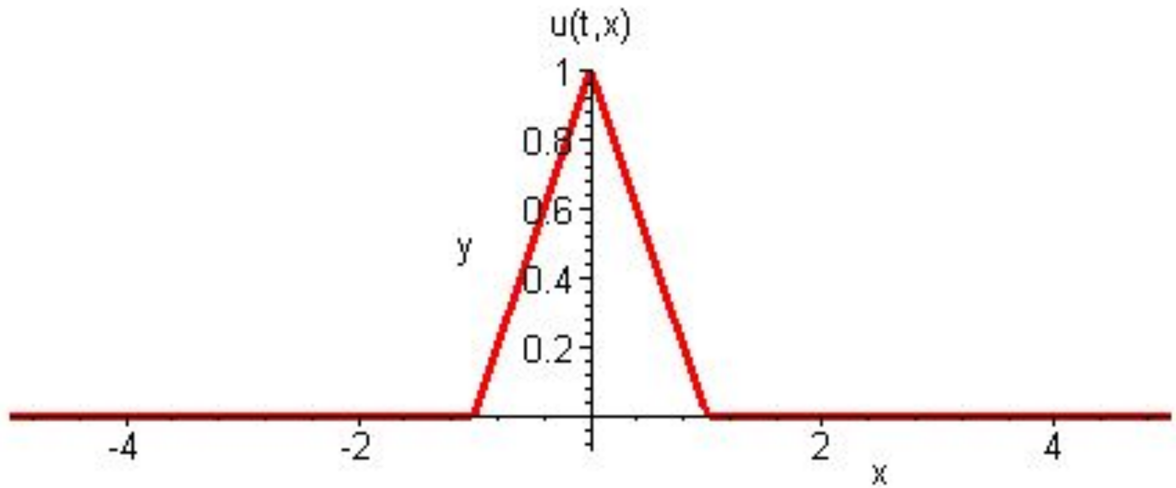


Так как $u(x,t) = \varphi(x,t) + \ \omega(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}$**, то мы получаем такой факт. Начальное возмущение делится пополам и обе половинки разбегаются в разные стороны со скоростью** a**. Откуда это получилось? Считая аргумент** $x - at$ **константой и дифференцируя его по** t **, находим скорость** $v_+ = a$**, а скорость** $v_- = -a$**.**

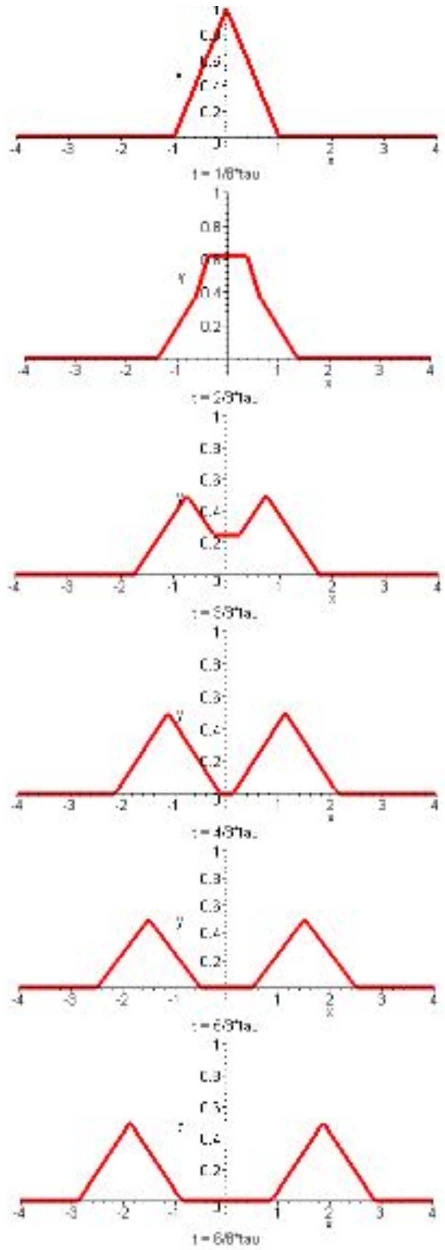




u1(t,x), u2(t,x), u(t,x)
y
x



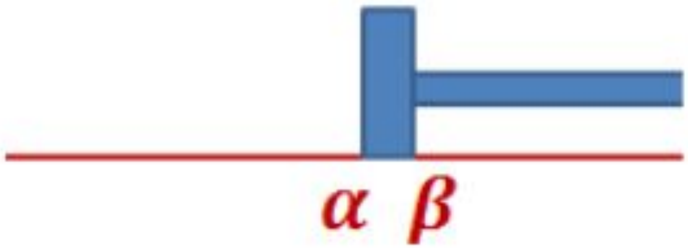
u(t,x)
y
x


t = 1/8*tau
t = 6/8*tau

Что происходит с начальным возмущением? Оно геометрически делится пополам и разбегается в обе стороны с одной и той же скоростью.

Что называется волной? Волной называется процесс передвижения отклонения струны.

Рассмотрим следующий вариант. Струна бесконечная, нет никаких отклонений, но по ней ударили молоточком. Точки струны на интервале (α,β) получили некоторую скорость v. Ясно, что струна будет как-то отклоняться, и ее возмущение побежит вдоль волны. Такие волны называются волнами импульса. Математика этих волн следующая.



Начальное отклонение $f(x)=0$. Второе начальное условие имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < \alpha = -l \\ v_0, -l < x < l \\ 0, \beta = l < x \end{cases}$$

$$\varphi(x - at) = -\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(x)dx.$$

$$\omega(x + at) = +\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(x)dx.$$

$$u(x) = \varphi(x) + \omega(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)dx = \Phi(x + at) - \Phi(x - at)$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x F(x)dx.$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x v_0 dx=\frac{v_0 x}{2a},\ -l<x<l$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^l v_0 dx=\frac{v_0 l}{2a},\quad x>l$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^{-l} v_0 dx=-\frac{v_0 l}{2a},\ x<-l$$

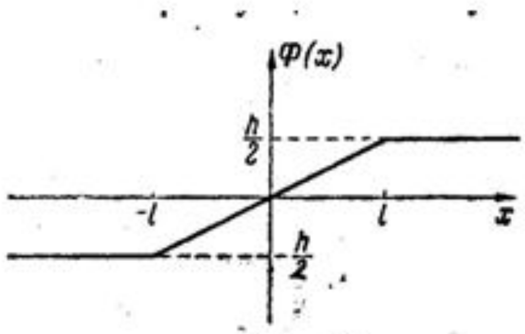
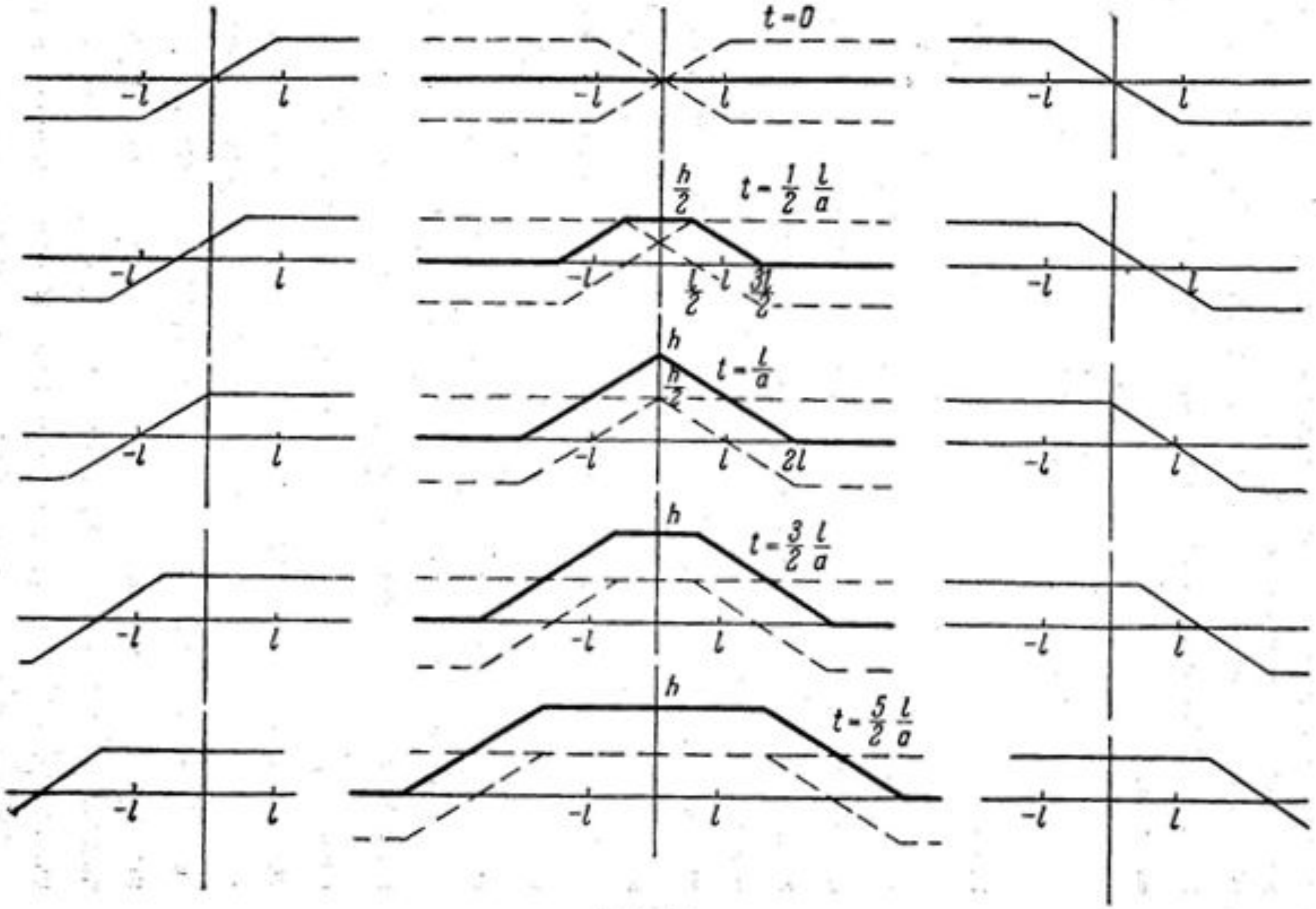


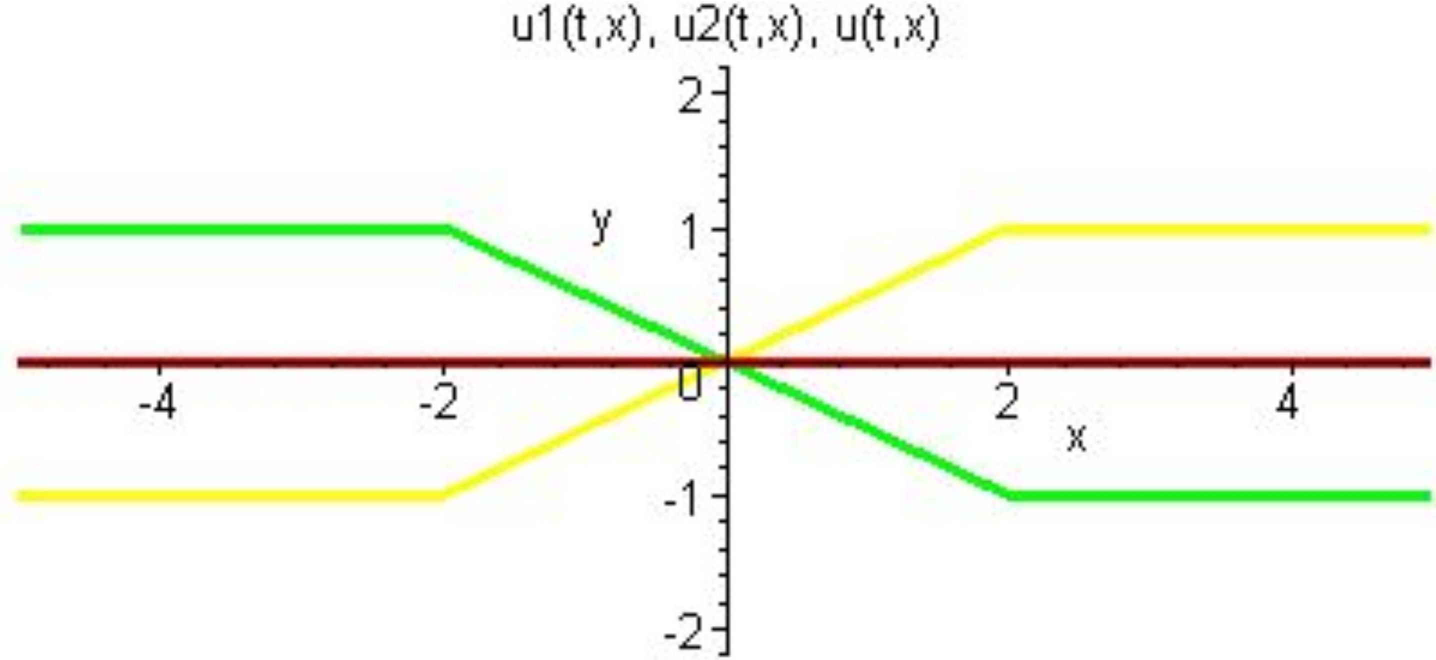
Рис. 10.

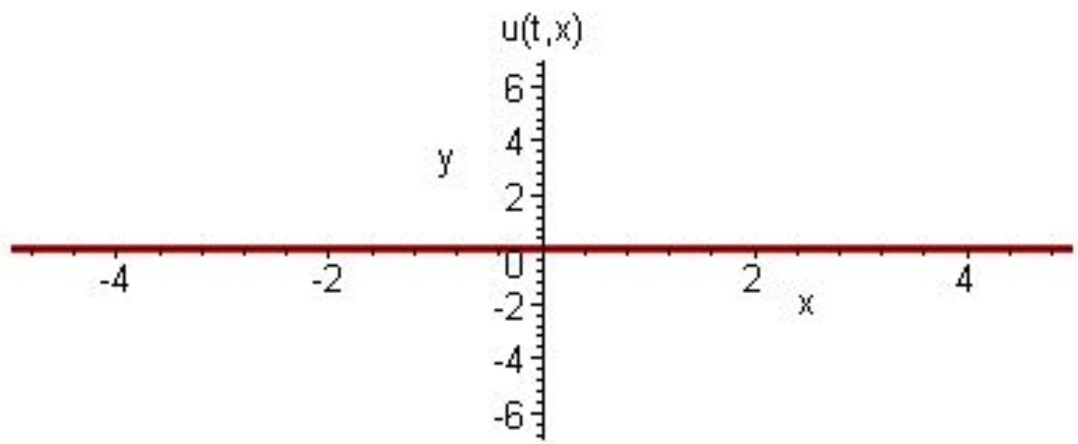
Мы видим, что функция $\Phi(x)$ непрерывная и нечетная. Поскольку у нас заменяется x на $x+at$ и $x-at$, то будут две волны разбегающиеся в разные стороны.



$t=0$
$-l$
l
$\frac{h}{2}$
$t=\frac{1}{2}\frac{l}{a}$
$\frac{l}{2}$
$\frac{3l}{2}$
h
$t=\frac{l}{a}$
$2l$
$t=\frac{3}{2}\frac{l}{a}$
$t=\frac{5}{2}\frac{l}{a}$

Рис. 11.


u1(t,x), u2(t,x), u(t,x)
y
x
-4
-2
0
2
4
2
1
-1
-2


u(t,x)
y
x
-4
-2
0
2
4
6
4
2
-2
-4
-6