

Лекция 3.7. Знакопеременные ряды.

Теорема (признаки Абеля и Дирихле):

Признак Абеля:

если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и a_n — монотонна и ограничена,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле:

если $\exists M > 0$ такое, что $\forall N$

$\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| < M$, a_n — монотонна и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

$$B_n = \sum_{l=k}^n b_l, \quad B_{k-1} \equiv 0.$$

$$\sum_{n=k}^m a_n b_n = a_m B_m + \sum_{n=k}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

преобразования Абеля для конечной суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha n}{n}$$

Функциональные последовательности.

Определение:

Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $E \subset R$ называется поточечно сходящейся (или просто сходящейся), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N_{\varepsilon, x} \in N \quad \forall n > N_{\varepsilon, x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Функция $f(x)$ называется пределом функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = 0 \text{ на } x \in R$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{2n}) = 0 \text{ на } x \in [0; 1]$$

$$3) \text{ на } [0; 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0; 1) \end{cases}$$

Определение:

Сходящаяся на E

$\subset R$ к некоторой функции $f(x)$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

называется равномерно сходящейся на $E \subset R$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R$.

Теорема:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \subset R \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \subset R \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\varepsilon \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Теорема:

Пусть $f_n(x) \in C[a, b] \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a; b] \implies f(x) \in C[a, b]$.

Теорема:

$f_n(x) \in C[a, b] \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b] \implies \forall x, x_0 \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{x_0}^x f_n(x) dx \rightarrow \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Следствие:

$\int_{x_0}^x f_n(t) dt, \forall x \in (x_0; b) \implies \int_{x_0}^x f(t) dt$ на $(x_0; b)$.

Лекция 3.9. Функциональные последовательности.

Теорема:

$f_n(x) \in C^1[a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b]$, что последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $[a; b]$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a; b]$, $f(x) \in C^1[a; b]$, и $f'(x) = g(x)$.

Теорема (признак Вейерштрасса для последовательностей):

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Если $\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, что $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E .