Дифференциальные уравнения

- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения первого порядка
- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Основные понятия

При решении различных задач математики, физики и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', \ y'', \ \dots \ y^{(n)}$.

Такие уравнения называются ***дифференциальными уравнением (ДУ)*** *(термин принадлежит Лейбницу, 1676)*

Символически дифференциальное уравнение можно написать:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например, уравнение $x^3 y'' - 4xy' = y^3$

есть уравнение второго порядка.

Основные понятия

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным,*** в противном случае ***– ДУ в частных производных.***

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, процесс отыскания решения называется ***интегрированием*** ДУ

Например, рассмотрим уравнение: $y'' + 4y = 0$

Функция $y = \sin 2x$ является решением уравнения, так как:

$$y' = 2\cos 2x, \quad y'' = -4\sin 2x$$

При подстановке функции и ее производных в уравнение получим тождество:

$$-4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение можно записать в виде:

$$y' = f(x; y),$$

то его называют ДУ первого порядка, ***разрешенным относительно производной***.

Уравнение первого порядка может быть записано также в ***дифференциальном виде***:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$$

P(x; y) и Q(x; y) – известные функции.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Например, решением уравнения

$$y' = 2x$$

является функция $y = x^2$, а также функция $y = x^2 + 1$

и вообще любая функция вида $y = x^2 + C$

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его надо подчинить дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, называют ***начальным условием*** и записывают в виде:

$$y(x_0) = y_0; \quad y\big|_{x=x_0} = y_0$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Общим решением ДУ первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x;C),$$

содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

- Функция $\varphi(x;C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении C.
- Каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ можно найти такое значение постоянной C_0, что функция $\varphi(x;C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется функция, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде: $\Phi(x;\, y;\, C) = 0$, то такое решение называется ***общим интегралом***, уравнение $\Phi(x;\, y;\, C_0) = 0$ называется ***частным интегралом***.

Дифференциальные уравнения первого порядка

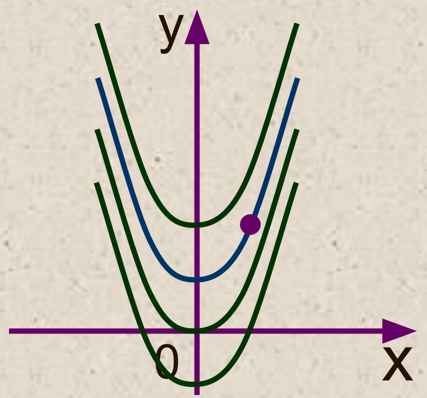
График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

С геометрической точки зрения, общее решение ДУ первого порядка есть семейство интегральных кривых на плоскости XOY

Частное решение - одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $M(x_0; y_0)$

Например, общее решение ДУ $y' = 2x$ есть семейство парабол:

$y = x^2 + C$



Частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y(1) = 2$ - это одна парабола, проходящая через точку $M(1, 2)$ с уравнением:

$$y = x^2 + 1$$

Задача отыскания частного решения ДУ, удовлетворяющего заданному начальному условию называется ***задачей Коши.***

Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение вида:

$$\boxed{P(x)dx = Q(y)dy} \qquad (1)$$

Такое уравнение называется уравнением с ***разделенными переменными.***

Проинтегрировав это уравнение почленно, получим:

$\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C$ - общий интеграл ДУ.

Более общий случай описывают уравнения с ***разделяющимися переменными,*** которые имеют вид:

$$\boxed{P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0} \qquad (2)$$

Уравнение *(2)* сводится к уравнению *(1)* путем почленного деления его на

$$P_2(x)\cdot Q_1(y) \neq 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0 \Longrightarrow \int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx=\int-\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \quad +C$$

<u>Замечание:</u> при проведении почленного деления ДУ на $P_2(x)Q_1(y)$ могут быть потеряны некоторые решения.

Поэтому следует отдельно решить уравнение $P_2(x)Q_1(y)=0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения – ***особые решения***.

Уравнение $\boxed{y'=f_1(x)\cdot f_2(y)}$ *(3)*

также сводится к уравнению с разделенными переменными.

Для этого достаточно положить $y'=\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \Longrightarrow \quad \int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)\,dx \quad +C$$

Уравнения с разделяющимися переменными

$$(y+xy)dx+(x-xy)dy=0 \Longrightarrow y(1+x)dx=x(y-1)dy$$

Разделим обе части уравнения на xy: $\dfrac{1+x}{x}dx=\dfrac{y-1}{y}dy \Longrightarrow$

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy \Longrightarrow \boxed{x+\ln|x|=y+\ln|y|+C}$$

Общий интеграл ДУ

Решим уравнение $xy=0$:

Его решения: $x=0$ *и* $y=0$ *являются решениями данного ДУ, но не входят в общее решение, значит это* ***особое решение.***

Решить задачу Коши: $y'=-\dfrac{y}{x};\quad y(4)=1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Longrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int-\frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|y|=-\ln|x|+\ln C \Longrightarrow \ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\Longrightarrow \boxed{y=\frac{C}{x}}$$

Подставим начальные условия: $1=\dfrac{C}{4} \Rightarrow C=4$

Общее решение ДУ

$$\boxed{y=\frac{4}{x}}$$

Частное решение ДУ

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим задачу, приводящую к ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

Задача: материальная точка массы m замедляет свое движение под воздействием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0) = 100$ м/с, $V(1) = 50$ м/с.

Решение:

Примем за переменную время t, отсчитываемое от начала замедления точки. Тогда скорость V будет функцией t: $V = V(t)$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$F = m \cdot a \quad \Longrightarrow \quad F = m \cdot V'(t)$$

В нашем случае $F = -kV^2$

$k > 0$ - коэффициент пропорциональности

Уравнения с разделяющимися переменными

Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$-kV^2 = m \cdot V' \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dV}{V^2} = \int -\frac{k}{m}dt$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{V} = -\frac{k}{m}t + C \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C}$$

По условию задачи: $V(0) = \frac{1}{C} = 100 \Rightarrow C = \frac{1}{100}$

$$V(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{1}{100}} = 50 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{100}$$

Скорость точки изменяется по закону: $\boxed{V = \frac{100}{t+1}}$ $\quad V(3) = 25$