Раздел 4. Портфельный анализ

4.1. Доходность ценной бумаги и портфеля

4.2. Портфель из двух бумаг

4.3. Портфели из n–бумаг. Портфели Марковица

4.4. Портфели Тобина

4.5. Диверсификация портфеля

4.1. Доходность ценной бумаги и портфеля

Две проблемы выбора инвестора:

1. В какие активы из имеющихся и в каких пропорциях вкладывать средства?

2. На практике более высокий уровень доходности связан с более высоким риском. Поэтому инвестор может выбрать актив с высокой доходностью и большим риском или с гарантированной низкой доходностью и

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его <u>портфелем</u>.

<u>Стоимость портфеля</u> – это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг.

<u>Доходность портфеля</u> – это доходность на единицу его стоимости

$$\frac{P - P_o}{P_o}$$

С каждым портфелем X связаны <u>две величины</u>:

1) эффективность (ожидаемая доходность)

$$\mu = M(R_X) = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n$$

2) риск

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = D(R_X) = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$$

Величина V_{ij} называется <u>ковариацией</u> доходностей ценных бумаг i-го и j-го видов и характеризует степень их взаимной изменчивости (связи).

4.2. Портфель из двух бумаг

$$\sigma^2 = D(R_X) = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \qquad V_{ij} = Cov(\mu_i, \mu_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(\mu_i, \mu_j)}{\sigma_i\sigma_j}$$

Дисперсия портфеля из двух бумаг

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2$$

Риск

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2}$$

Доходность

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2$$

В случае <u>полной корреляции</u>

$$\rho_{12} = 1$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = (\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2)^2$$

$$\sigma = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2$$

В случае полной антикорреляции

$$\rho_{12} = -1$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$$

$$\sigma = \left|\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right|$$

При полной антикорреляции возможен портфель <u>нулевого риска</u>

Для <u>независимых</u> бумаг

$$\rho_{12} = 0$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2$$

Найдем <u>портфель минимального риска и его доходность и риск</u>

Модель задачи нелинейного программирования

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Решение задачи дает портфель

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$$

Его доходность

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Его риск

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Принцип диверсификации: при «размазывании» портфеля по независимым бумагам его риск уменьшается

Для случая трех независимых бумаг

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

Портфель

$$X = \frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_3^2; \sigma_1^2\sigma_2^2\right)$$

Доходность

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2 + \mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}$$

Риск

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}}$$

Для решения поставленной задачи можно использовать надстройку Excel «Поиск решений»

Безрисковая бумага

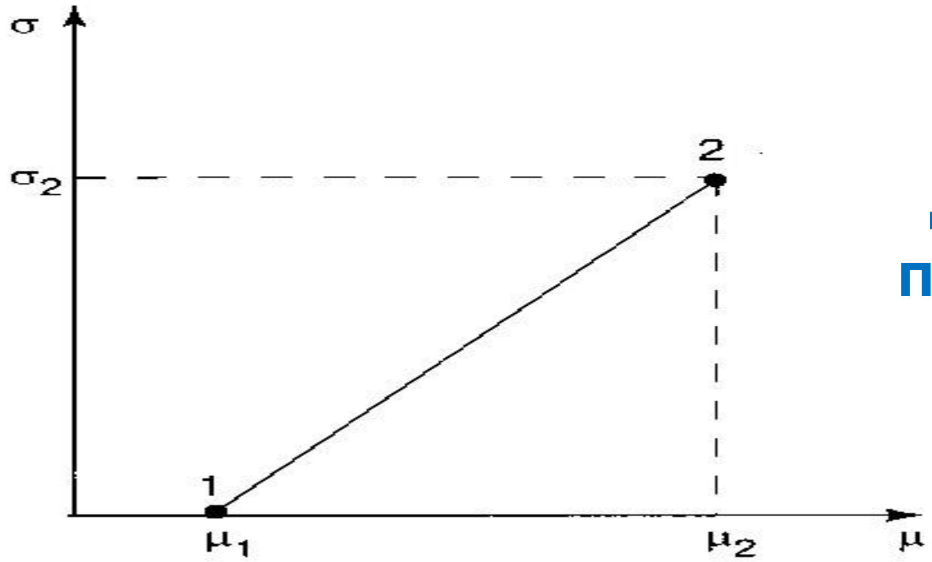
$$\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2,$$

$$\sigma = \sigma_2 x_2,$$

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Допустимое множество портфелей

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2}, \qquad 0 \le \sigma \le \sigma_2.$$



Допустимое множество портфелей представлено отрезком [1,2].

Портфель <u>заданной эффективности</u>

Портфель однозначно находится как решение системы

$$\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2,$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$

Портфель <u>заданного риска</u>

Находится как решение системы

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

4.3. Портфели из n–бумаг. Портфели Марковица

Задача: требуется найти портфель, который минимизировал бы риск и обеспечивал заданную величину ожидаемой доходности.

$$\sigma^2 = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \to \min$$

$$x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n = \mu$$

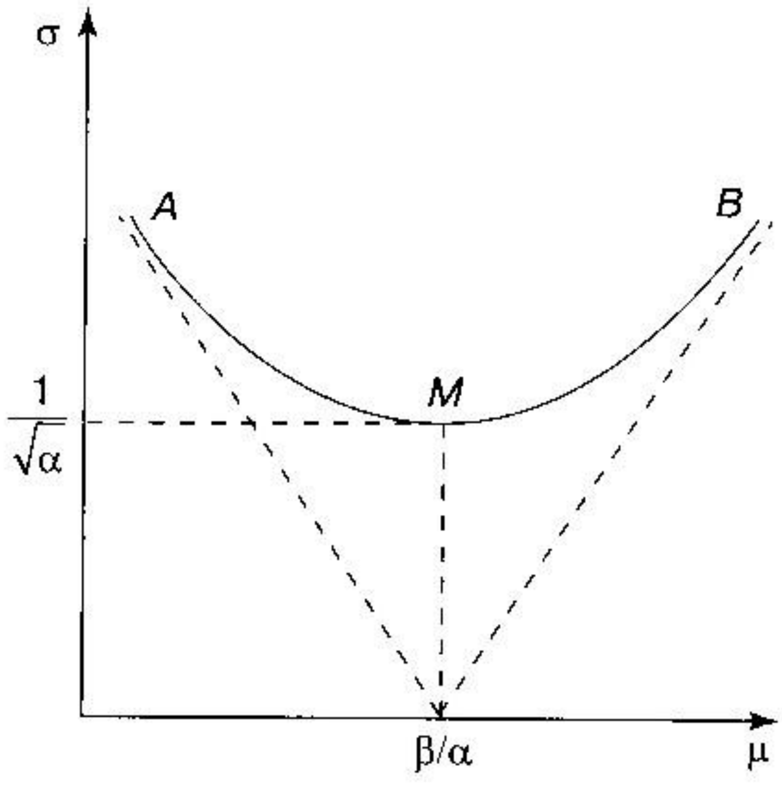
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

На практике для решения поставленной задачи можно использовать надстройку Excel «Поиск решений», которая применяется как для решения задач линейного, так и для решения задач нелинейного программирования, каковой является поставленная задача

Для каждого значения ожидаемой доходности имеется единственный портфель X, обеспечивающий минимальное значение риска , т.е. определена функция

$$\sigma = \sigma(\mu)$$

График этой функции называют минимальной



Кривая МВ, которая называется эффективной границей

4.4. Портфели Тобина

Портфель Тобина – это портфель Марковица при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min$$

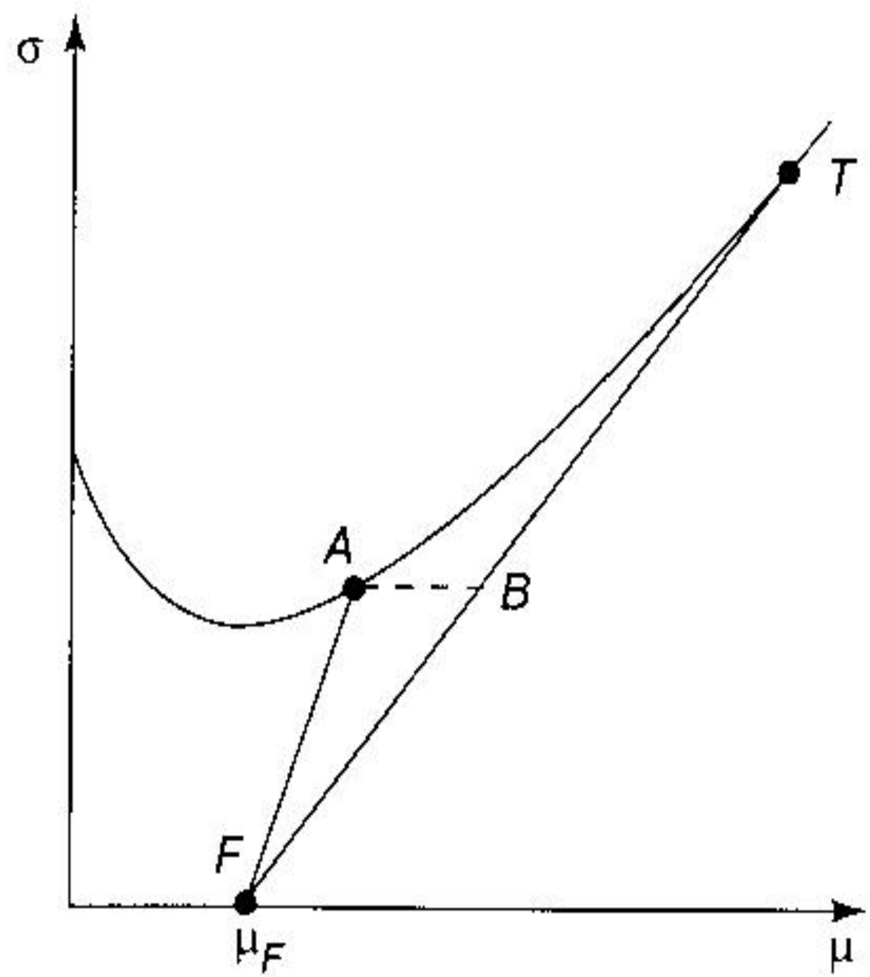
$$x_f \mu_f + x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \ldots + x_n \mu_n = \mu$$

$$x_f + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

Обычно предполагают, что ожидаемая доходность портфеля должна быть не меньше доходности безрискового актива

$$\mu \geq \mu_f$$

Минимальная граница риска для портфеля Тобина превращается в прямую, касательную к графику минимальной границы



Всякий минимальный портфель является линейной комбинацией безрискового актива и рисковой части, лежащей на минимальной границе. Поэтому всякая такая точка лежит на луче FA, где точка F соответствует безрисковому активу. Из точки A можно переместиться вдоль горизонтальной оси в точку B, лежащую на касательной FT, у которой риск тот же, а доходность выше. Поэтому касательная FT является искомой минимальной границей.

4.5. Диверсификация портфеля

Диверсификация в области финансов – это распределение инвестиций по разным финансовым инструментам.

Диверсификация инвестиционного портфеля – это распределение средств между различными объектами инвестирования с целью избежания серьезных потерь в случае падения цен одного или нескольких активов инвестиционного портфеля.

Доказано, что с ростом количества n различных бумаг в портфеле риск композитной финансовой операции уменьшается.

Эффект диверсификации означает, что <u>нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом либо отрицательно коррелированные операции («не класть яйца в одну корзину»).</u> При такой стратегии эффективность финансовой операции либо портфеля усредняется, а риск уменьшается.