Занятие №2. Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.

Содержание

- О функциональном методе решения задач с параметрами
- ЕГЭ 2014-2015 (было и предлагают в материалам методических рекомендаций ФИПИ)
- Основные типы задач
- Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
- Печатные и электронные ресурсы.

О функциональном методе решения задач с параметрами

Функциональный метод решения задач с параметрами является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике. Рассмотрение функционального метода в программе средней школы на базовом уровне носит эпизодический характер, при изучении отдельных тем. Однако многие уравнения и неравенства, содержащие параметр, быстрее и проще решаются именно с использованием рассматриваемого метода.

Наиболее часто используются следующие свойства функций:

- кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций (в частности, на этом основан метод рационализации);
- свойства четности и нечетности;
- периодичность функций;
- свойства ограниченности области определения или области значения функции.

В отличие от графического метода, знание этих свойств функций позволяет находить точные корни уравнения без построения графиков функций. Таким образом, использование свойств функций способствует рационализации решений уравнений с параметрами.

ЕГЭ 2010-2014 (функциональный метод, задачи)

Год	Условие
2010	Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2\|x-a^2\|-6x$ имеет более двух точек экстремума.
2011	Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 5\cdot 2^{\|x\|}+6\cdot\|x\|+7=5y+6x^2+4a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.
2012	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\|x^2-8x+a+5\|>10$ не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$.
2013	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a+7)^2=\|x-7-a\|+\|x+a+7\|$ имеет единственный корень.
2014	Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения $4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$ принадлежит отрезку $[1;3]$.

ЕГЭ 2015 (спецификация и кодификатор)

20	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	–	30

	Определение и график функции
3.1.1	Функция, область определения функции
3.1.2	Множество значений функции

3.2		*Элементарное исследование функций*
	3.2.1	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
	3.2.2	Чётность и нечётность функции
	3.2.3	Периодичность функции
	3.2.4	Ограниченность функции
	3.2.5	Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции
	3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции
3.3		*Основные элементарные функции*
	3.3.1	Линейная функция, её график
	3.3.2	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график
	3.3.3	Квадратичная функция, её график
	3.3.4	Степенная функция с натуральным показателем, её график
	3.3.5	Тригонометрические функции, их графики
	3.3.6	Показательная функция, её график
	3.3.7	Логарифмическая функция, её график

Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

(типовые задания С5)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С5)

Уравнения и неравенства с параметрами:
количество решений

Корянов А. Г., *г. Брянск*, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., *г. Москва*, aaprokof@yandex.ru

АНИЕ стр.

Функциональные методы решения в электронных пособиях Прокофьева А.А. и Корянова А.Г.

Из оглавления пособия 2011 года:

и

Адреса:
http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012. html
и
http://www.alexlarin.net/ege/2011/c52011.html

Классификация задач, решаемых функциональными методами

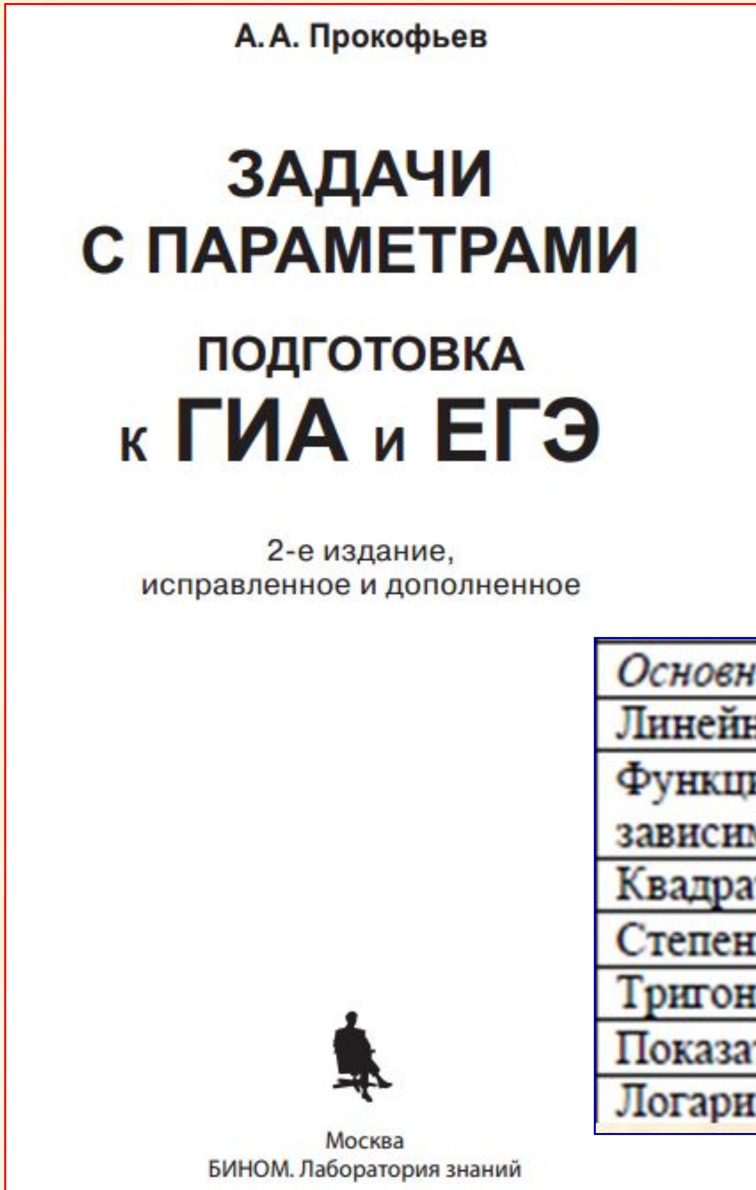
1. К первому типу отнесем задачи, в условии которых непосредственно требуется исследовать свойства функции $y=f(x,a)$ (область определения, монотонность и т.д.) в зависимости от значений параметра a, принимающего допустимые числовые значения.

2. Ко второму типу задач отнесем такие, в которых формулировки свойств функции в точке или на промежутке позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции. Например, исследовать на монотонность функцию $y = x^2 - 5x + 6$ на промежутке $[t; t+2]$ при всех значениях t.

3. Третий тип задач связан с постановкой дополнительных условий на свойства функции (количество нулей функции, ограничение на наибольшее значение функции и т.д.).

4. Решение задач четвертого типа опирается на определение свойства функции (непрерывность, дифференцируемость, экстремум, …). Подобные задачи можно переформулировать и свести к уравнению, неравенству или системе уравнений (неравенств), для решения которых используют аналитический или функционально-графический способы (графическую интерпретацию).

С чего следует начать?


А. А. Прокофьев

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ПОДГОТОВКА к ГИА и ЕГЭ

2-е издание, исправленное и дополненное

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

Начать следует с повторения свойств функций (пункт 3.2 кодификатора к ЕГЭ 2015) и основных определений.

В соответствии с требованиями кодификатора повторить свойства функций, указанных в таблице в пункте 3.3.

Основные элементарные функции
Линейная функция, её график
Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график
Квадратичная функция, её график
Степенная функция с натуральным показателем, её график
Тригонометрические функции, их графики
Показательная функция, её график
Логарифмическая функция, её график

Область определения функции

Для решения задач этого типа следует знать и помнить области определения всех элементарных функций, изучаемых в школьном курсе.

Может оказаться, что для двух функций $f(t)$ и $g(t)$ пересечение их областей определения $D(f)\cap D(g)$ содержит всего лишь несколько значений переменной. Тогда в случае решения уравнения $f(t)=g(t)$ или неравенства $f(t)>g(t)$ их будет достаточно проверить подстановкой в уравнение (неравенство).

В случае, когда $t=\varphi(x,a)$, подобная задача становится задачей с параметром.

Начинать же следует с решения подобных уравнений и неравенств без параметра, а затем переходить к задачам нахождения областей определения функций, зависящих от переменной и параметра.

Пример. Определите значения параметра a, при которых функция

$$f(x)=\log_2((a+1)x^2-(a^2-2)x-(a-1))$$

определена для всех $x>0$.

***Ответ*:** $[-1;1]$.

Область определения функции (задачи)

1. Найдите область определения $D(f)$ функции $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$; б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x+a}}$;

в) $f(x)=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$; г) $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{a^2-x^2}$;

д) $f(x)=\arccos(a^2-x^2)$; е) $f(x)=\lg(x^2+(a-3)x-3a)$.

2. Найдите область определения $D(f)$ функции $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}-\sqrt{a}}$;

б) $f(x)=\sqrt{a+x}+\lg\left(\dfrac{1}{a}-x\right)+\sqrt{\dfrac{a}{x}}$;

в) $f(x)=\lg(a-\sqrt{2a+x})+\sqrt{9-a^2}$;

г) $f(x)=\sqrt{a^2\sqrt{2}-x\sqrt{a^2+x^2}}$;

д) $f(x)=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{4\pi^2-x^2}+\lg(x-a)+\sqrt{a+4\pi}$.

Область определения функции (ответы)

1. **а)** $D(f)=(-\infty;a)\cup(a;+\infty)$ при всех $a\in\mathbb{R}$; **б)** если $a<0$, то $D(f)=[a;-a)\cup(-a;+\infty)$; если $a=0$, то $D(f)=(0;+\infty)$; если $a>0$, то $D(f)=(a;+\infty)$; **в)** если $a<0$, то $\varnothing$; если $a=0$, то $D(f)=\{0\}$; если $a>0$, то $D(f)=[-a;a]$; **г)** $D(f)=\{-a\}\cup\{a\}$ при всех $a\in\mathbb{R}$; **д)** если $|a|\le 1$, то $D(f)=[-\sqrt{1+a^2};\sqrt{1+a^2}]$; если $|a|>1$, то $D(f)=[-\sqrt{a^2+1};-\sqrt{a^2-1}]\cup[\sqrt{a^2-1};\sqrt{a^2+1}]$; **е)** если $a\le -3$, то $D(f)=(-\infty;a)\cup(-3;+\infty)$; если $a>-3$, то $D(f)=(-\infty;-3)\cup(a;+\infty)$.

2. **а)** Если $a<0$, то $\varnothing$; если $a=0$, то $D(f)=(0;+\infty)$; если $0<a<3$, то $D(f)=[0;+\infty)$; если $a=3$, то $D(f)=(0;+\infty)$; если $a>3$, то $D(f)=(a-3;+\infty)$; **б)** если $a\le 0$, то $\varnothing$; если $a>0$, то $D(f)=(0;1/a)$; **в)** если $a\in(-\infty;0]\cup(3;+\infty)$, то $\varnothing$; если $0<a\le 3$, то $D(f)=[-2a;a^2-2a)$; **г)** если $a\ge 0$, то $D(f)=[-a;a]$; если $a<0$, то $D(f)=[a;-a]$; **д)** если $a<-4\pi$, то $\varnothing$; если $-4\pi\le a<1{,}5\pi$, то

$$D(f)=\begin{cases} k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ x>a, \end{cases}$$

где $k\in\{-2;-1;0;1\}$; если $1{,}5\pi\le a<2\pi$, то $D(f)=\{2\pi\}$; если $a\ge 2\pi$, то $\varnothing$.

Область значений функции

Знание области значений функции оказывается полезным при решении уравнений и неравенств в следующих случаях.

(1) Уравнение $f(x)=a$ или неравенство $f(x)\vee a$ (символ $\vee$ означает любой из знаков $\le, \ge$) имеет решение, если $a\in E(f)$;

(2) неравенство $f(x)>a$ имеет решение, если $a\in E(f)$ и $a\ne \max\limits_{D(f)} f(x)$;

(3) неравенство $f(x)<a$ имеет решение, если $a\in E(f)$ и $a\ne \min\limits_{D(f)} f(x)$;

(4) уравнение $f(x,a)=g(x,a)$ имеет решение, если $E(f)\cap E(g)\ne\varnothing$.

В случае, когда $f(x,a)\ge M$, а $g(x,a)\le M$ для всех значений $x\in D(f)\bigcap D(g)$ и a, то $f(x,a)=g(x,a)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a)=M, \\ g(x,a)=M. \end{cases}$

Область значений функции

Полезно знать и уметь находить область значений функций на все области определения и на отрезке.

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\ge\frac{4ac-b^2}{4a},\quad a>0;$$

или

$$f(x)=ax^2+bx+c\ge f(x_0),\quad \text{где}\quad x_0=-\frac{b}{2a},\quad a>0$$

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ -\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2};$$

$$f(x)=\log_a(g^2(x)+b)\ge\log_a b,\quad a>1,\quad b>0;$$

$$f(x)=a^{g^2(x)+b}\ge a^b,\quad a>1.$$

Пример 17. (*ЕГЭ-2010, вторая волна.*) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x)=x^2-11|x-a|-x$$

на отрезке $[-8;\ 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-2<a<5$.

Область значений функции

Полезно знать и уметь находить область значений функций на все области определения и на отрезке.

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\ge\frac{4ac-b^2}{4a}\quad \text{при } a>0;$$

$$f(x)=ax^2+bx+c\ge f(x_0)\quad \text{при } a>0,\ \text{где}\ x_0=-\frac{b}{2a}$$

Пример 17. (*ЕГЭ-2010, вторая волна.*) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x)=x^2-11|x-a|-x$$

на отрезке $[-8;\,7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-2<a<5$.

(ЕГЭ 2012, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве $|x|\geqslant 1$ не меньше 6.

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup\{0\}$.

Область значений функции

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, $f(x) \geq 2$ при $x > 0$;

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} = \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ax}} \right) \geq 2\sqrt{ab}, \quad a, b > 0.$$

7. Найти все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0. \end{cases}$$

Ответ. $a = 2$, $a = 4$.

1. При каждом значении параметра a найдите количество решений уравнения

$$16x^4 - 32x^3 + ax^2 - 8x + 1 = 0.$$

Статья. Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. Использование свойств функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ при решении задач. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2013. − № 9. − С. 23–31.

Пример (ЕГЭ 2012). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x^2-8x+a+5|>10$ не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x)=x^2-8x+a+5=(x-4)^2+a-11$. Она возрастает на промежутке $[4;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;4]$.

Найдем все a, при которых функция $f(x)$ не принимает на отрезке $[a-6;a]$ значений, по модулю больших 10, то есть ее график на отрезке $[a-6;a]$ находится в пределах горизонтальной полосы $-10\le f(x)\le 10$.

Отрезок $[a-6;a]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 6 будет не меньше 36, поэтому ее график не поместится в полосе ширины 20. Следовательно, $a-6<4<a$, откуда $4<a<10$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a-6;a]$ достигается либо при $x=a-6$, либо при $x=a$. Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a-6;a]$ достигается при $x=4$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 4<a<10, \\ f(a-6)\le 10, \\ f(a)\le 10, \\ f(4)\ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<a<10, \\ (a-10)^2+a-11\le 10, \\ (a-4)^2+a-11\le 10, \\ a-11\ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19-\sqrt{45}}{2}\le a\le \frac{7+\sqrt{69}}{2}.$$

Ответ: $\frac{19-\sqrt{45}}{2}\le a\le \frac{7+\sqrt{69}}{2}$.

Область значений функции

В некоторых задачах для нахождения множества значений функции $f(x)$ удобно ввести параметр. Множество значений параметра, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет решение, образует область значений функции.

Пример. Найти область значений $E(f)$ функции $\dfrac{4x+8}{x^2+5}$.

Решение. $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Найдем значения a, при которых уравнение $\dfrac{4x+8}{x^2+5}=a$ имеет решение. Запишем уравнение в виде $ax^2-4x+5a-8=0$. При $a=0$ получаем уравнение $4x=-8$, имеющее решение. При $a\neq 0$ квадратное уравнение имеет решение, если его дискриминант $D=-20a^2+32a+16\geq 0$, то есть при $a\in\left[-\dfrac{2}{5};0\right]\cup[0;2]$.

Ответ: $E(f)=\left[-\dfrac{2}{5};2\right]$

(10 класс, МИОО, 2010, С5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2-2x-a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Ответ: $1<a<11$.

Область значений функции (задачи и ответы)

1. Найдите множество значений $E(f)$ функции $f(x)$:

а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x-a}}$; б) $f(x)=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{a^2-x^2}$; г) $f(x)=\arccos\dfrac{a^2-x^2}{a^2}$;

д) $f(x)=\lg(x^2+(a-3)x-3a)$.

2. Найдите множество значений $E(f)$ функции $f(x)$:

а) $y=ax+\dfrac{b}{x}$, где $ab>0$; б) $y=ax+\dfrac{b}{x}$, где $ab<0$.

Ответы:

1. а) Если $a<0$, то $E(f)=[0;\sqrt{2a})\cup(\sqrt{2a};+\infty)$; если $a=0$, то $E(f)=(0;+\infty)$; если $a>0$, то $E(f)=[0;+\infty)$; **б)** если $a<0$, то функция не определена; если $a=0$, то $E_f=0$; если $a>0$, то $E(f)=[-\sqrt{2a};\sqrt{2a}]$; **в)** $E(f)=\{0\}$ при всех $a\in\mathbb{R}$; **г)** если $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, то $E(f)=[0;\pi]$; если $a=0$, то функция не определена; **д)** $E(f)=(-\infty;+\infty)$ при всех $a\in\mathbb{R}$.

2. а) $(-\infty;-2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab};+\infty)$; **б)** $\mathbb{R}$.

Четность, нечетность функции

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ***четной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество X симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, ***называется нечетной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество X симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетной – симметричен относительно начала координат.

(МГУ, мех-мат, 2007, *устный экз.*). При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = (a-x)5^{x+7+4a} - (a+x)5^{a^2-x-5}$$

является нечетной?

Ответ: $-2; 6$.

Четность, нечетность функции

Пример. При каких значениях параметра a является нечетной функция

$$f(x)=\frac{1}{2^x+a}+\frac{1}{2}.$$

Решение. Необходимым (но не достаточным!) условием нечетности функции является выполнение при $x=0$ одного из условий:

(а) $f(0)=0$; (б) функция f не определена в нуле.

При $x=0$ $f(0)=\dfrac{1}{2^0+a}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a+3}{2(a+1)}$.

Условие (а) выполняется при $a=-3$, а условие (б) – при $a=-1$.

При $a=-3$ $f(x)=\dfrac{1}{2^x-3}+\dfrac{1}{2}$ и $D(f)=(-\infty;\log_2 3)\cup(\log_2 3;+\infty)$ не является симметричной относительно точки $x=0$.

При $a=-1$ $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$ и $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ симметрична относительно точки $x=0$. Проверяем выполнение условия $f(x)=-f(x)$:

$$f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=\frac{1/2^x+1}{2\left(1/2^x-1\right)}=\frac{2^x+1}{2(1-2^x)}=-\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}=-f(x).$$

Следовательно, при $a=-1$ функция $f(x)$ нечетная. ***Ответ.*** $a=-1$.

Четность, нечетность функции

Если в задаче вопрос ставится следующим образом: «При каких значениях параметра уравнение $f(x,a)=0$ имеет единственное решение?».

В случае четной функции этим единственным решением будет число $x=0$.

Для решения подобных задач используется следующий алгоритм.

Шаг 1. Проверяется, является ли функция $f(x,a)$ четной.

Шаг 2. Если это так, находятся, значения параметра, при которых число $x=0$ является корнем уравнения $f(x,a)=0$ (это необходимые значения). Для этого в уравнение подставляется число $x=0$, и уравнение решается его относительно параметра.

Шаг 3. В исходное уравнение последовательно подставляются найденные значения параметра и отбираются те, при которых уравнение имеет единственное решение.

Четность, нечетность функции

Пример (ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$ имеет единственный корень.

Решение. Если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, т.е. $x_0 = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(a+7)^2 = 2|a+7| \quad \Leftrightarrow \quad |a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a+7| = 0$, то есть $a = -7$, либо $|a+7| = 2$, то есть $a = -5$ или $a = -9$.

При $a = -7$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Его корнями являются числа $-2; 0$ и 2, т.е. исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -5$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ уравнение принимает вид $x^2 + 2x + 4 = 0$ и не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > -2$ уравнение принимает вид $x^2 - 2x + 4 = 0$ и не имеет корней.

Следовательно, при $a = -5$ и при $a = -9$ исходное уравнение имеет единственный корень. **Ответ.** $-9; -5$.

Четность, нечетность функции (задачи)

1. Для всех значений параметра a исследуйте на четность и нечетность функцию ($x \in \mathbb{R}$): а) $f(x)=(a-2)x+3a-4$;

б) $f(x)=x^2+(a^2-4)x+a$; в) $f(x)=(a^2-4)x^2+(a^2-5)x+a^2+2a$.

2. При каких значениях параметра a является нечетной функция $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{5^x+a-1}{5^x+a+1}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{a-3^x}-\dfrac{1}{2}$.

3. Определите все значения параметра a, такие, что функция $g(x)=f(x-a)$ является четной, если: а) $f(x)=\sqrt{x^2-x+4}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+9}$.

4. Для всех значений параметра a исследуйте на четность и нечетность данную функцию: а) $f(x)=\cos\dfrac{a+x}{3}+\lg\dfrac{2x-a}{2x+a}$; б) $f(x)=\cos\dfrac{a+x}{2}+\lg\dfrac{3x+a}{3x-a}$.

5. Укажите четные и нечетные функции среди данных:

$$f_1(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2},\quad f_2(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2};\quad f_3(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}};$$

$$f_4(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1};\quad f_5(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}.$$

6. Найдите все значения параметра b такие, что функция $f(x)=a+\sqrt{-x^2-2x+2bx-b^2+2b+8}$ является четной для любого значения параметра a.

Четность, нечетность функции (ответы)

1. а) При $a=2$ функция четная; при $a=4/3$ функция нечетная; **б)** при $a=-2$ или $a=2$ – четная; **в)** при $a=-2$ функция нечетная; при $a=-\sqrt{5}$ или $a=\sqrt{5}$ функция четная. **2. а)** $a=0$; **б)** $a=1$. **3. а)** $a=-0{,}5$; **б)** $a=-1$. **4. а)** При $a=\dfrac{3\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, функция нечетная; при $a=0$ функция четная; **б)** при $a=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, функция нечетная; при $a=0$ – четная. **5.** При $a>0$ функции $f_1(x)$ и $f_5(x)$ – четные; $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ – нечетные. **6.** $b=1$.

АБИТУРИЕНТ RU

Четность, нечетность функции

(ЕГЭ, 28.04.14, С5) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

Ответ: 3; 7.

Идея четности применяется при решении следующего примера.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$a + |x| + \frac{x^2 + (a-2)^2}{a + |x|} \le 2\sqrt{x^2 + (a-2)^2}$$ имеет единственное решение.

Ответ: 1.

Статья: Прокофьев А.А. Использование свойств симметрии выражений относительно переменных при решении задач. «Математика для школьников», 2011, − М.: «Школьная пресса», № 3. − С. 3–13.

Непрерывность функции (задачи и ответы)

1. Подберите значения параметров a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на всей числовой прямой:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x>2, \\ x+a, \text{ если } x\le 2; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x>2, \\ ax+2, \text{ если } x\le 2; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}, \text{ если } x<1, \\ x^5-4ax+a^2, \text{ если } x\ge 1; \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x\le 1, \\ ax^2+bx, \text{ если } x>1; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} |x^2-5x+6|, \text{ если } x>2, \\ ax-b, \text{ если } x\le 2. \end{cases}$

Ответы.

1. а) $a=2$; **б)** $a=1$; **в)** $a=1$ или $a=3$; **г)** необходимо и достаточно выполнения равенства $a+b=0$; **д)** $2a-b=0$.

Использование обратной функции

Функцию, определенную на $E(f)$ и ставящую в соответствие значению $y \in E(f)$ такое значение $x \in D(f)$, что $f(x) = y$, называют ***обратной*** для функции f и обозначают f^{-1}, то есть $x = f^{-1}(y)$, $y \in E(f)$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции через x, а значение через y, нее записывают в виде $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$.

Функцию, имеющую обратную, называют ***обратимой***.

График обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$ симметричен графику функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$ относительно прямой $y = x$.

Достаточный признак существования обратной функции: *если функция строго возрастает (убывает) на множестве X, то для нее существует обратная функция, и она также строго возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.*

Использование обратной функции

Пример. Указать все значения параметра a, для которых имеет решение уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$.

Решение. Пусть $t=\sin x$, где $-1\le t\le 1$. Тогда уравнение будет равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}\sqrt{a+t}=t^2-a,\\ 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Функция $y=t^2-a$ на отрезке $[0;1]$ обратима. Обратной будет $y=\sqrt{a+t}$. Обе функции являются возрастающими на $[0;1]$, поэтому общие их точки лежат на прямой $y=t$. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases}t^2-a=t,\\ 0\le t\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-t=a,\\ 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Так как из $0\le t\le 1$ следует $-0,25\le t^2-t\le 0$, то исходное уравнение имеет решение при $-0,25\le a\le 0$. ***Ответ.*** $-0,25\le a\le 0$.

Использование обратной функции (задачи)

1. Определите значения a, при которых функция $f(x)$ на заданном множестве имеет обратную функцию, и найдите эту функцию:

а) $f(x)=(a^2-4)x+\sqrt{a^2}$ $(x\in\mathbb{R})$; б) $f(x)=x^2+4x-3$ $(x\geq a)$.

2. При каких значениях параметров a и b данная функция имеет обратную и совпадает с ней, если: а) $y=ax+b$; б) функция $y=x^a$, где $a\in\mathbb{R}$?

3. Укажите все значения параметра a, при которых данная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;a+2]$, является обратимой:

а) $f(x)=\begin{cases}|x+1|+|x-2|, \text{ если } x\in(-\infty;2],\\ x^2-8x+15, \text{ если } x\in(2;+\infty);\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}|x+1|+|x-2|, \text{ если } x\in(-\infty;1],\\ x^2-6x+8, \text{ если } x\in(1;+\infty).\end{cases}$

4. Решите данное уравнение.

а) $x^2+2ax+1/16=-a+\sqrt{a^2+x-1/16}$ при $0<a<1/4$;

б) $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$.

5. Найдите значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$.

Использование обратной функции (ответы)

1. а) При $a \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x-\sqrt{a^2}}{a^2-4}$; **б)** при $a \geq -2$; $f^{-1}(x) = -2+\sqrt{7+x}$. **2. а)** $a=-1$, $b \in \mathbb{R}$ или $a = \pm 1$, $b = 0$; **б)** $a_1 = -1$ и $a_2 = 1$. **3. а)** $a \in (-\infty;-3] \cup \{2\} \cup [4;+\infty)$; **б)** $a \in (-\infty;-3] \cup \{1\} \cup [3;+\infty)$.

4. а) $x = \dfrac{2-4a \pm \sqrt{16a^2-16a+3}}{4}$. ***Указание.*** Рассмотрите возрастающую функцию $y = x^2+2ax+1/16$ на $[-a;+\infty)$. Она обратима при $x \geq 1/16 - a^2$ и обратная к ней есть функция $y = -a+\sqrt{a^2+x-1/16}$. Далее решите уравнение $x = -a+\sqrt{a^2+x-1/16}$; **б)** $x = a - a^5$. **5.** $-1/12 \leq a \leq 0$.

Использование ограниченности функции

Метод оценки (минимаксные задачи)

Идея *методa минимаксов*.

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на $D(f)\bigcap D(g)$ выполняются неравенства $f(x)\geq A,\ g(x)\leq A$ и требуется решить уравнение $f(x)=g(x)$. Тогда

$$f(x)=g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Иначе говоря, уравнение $f(x)=g(x)$ можно переписать в виде

$\min f(x) = \max g(x)$, то есть нужно найти такие значения x, чтобы они одновременно являлись точками минимума для функции $f(x)$ и точками максимума для функции $g(x)$.

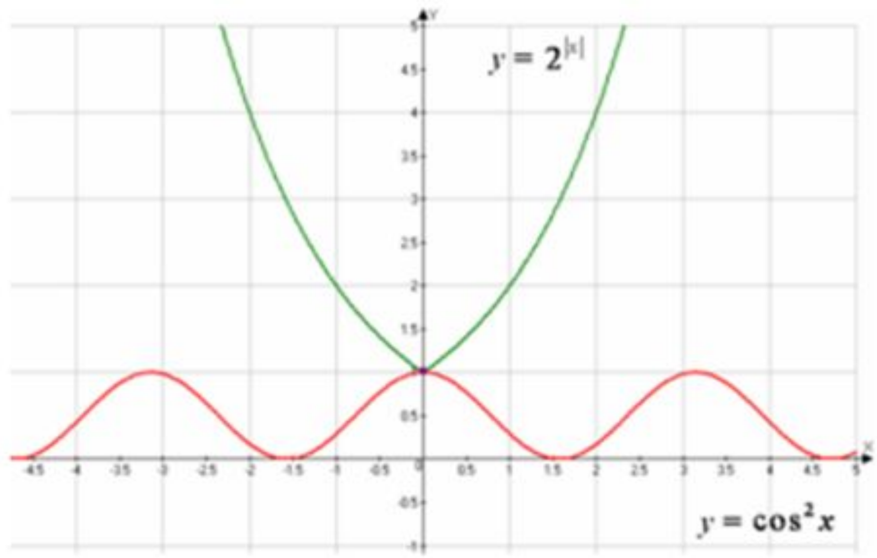
Поэтому подобные уравнения называют «минимаксными задачами».

Наиболее часто этот метод можно применить в случаях, когда функции, стоящие в левой и правой частях уравнения – разного типа (степенная и логарифмическая, степенная и тригонометрическая и т.д.)

Использование ограниченности функции

Метод оценки (минимаксные задачи)

Пример. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x$.



Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

При всех значениях x верны неравенства $2^{|x|} \geq 1$ и $\cos^2 x \leq 1$.

Следовательно,

$$2^{|x|} = \cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное равенство.

Значит, $x = 0$ корень уравнения. Ответ. 0.

Статья: Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Использование свойства ограниченности выражений с несколькими переменными при решении задач. «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2010. №8. – С. 3-12, №9. – С. 29-35.

Использование ограниченности функции

Метод оценки (*минимаксные задачи*)

Пример. Определить количество решений уравнения

$$2\sin \pi a x = x + \frac{1}{x} \text{ в зависимости от параметра } a.$$

Решение. Оценим левую часть уравнения $-2 \le 2\sin \pi a x \le 2$. Так как $x + \frac{1}{x} \ge 2$ при $x > 0$ и $x + \frac{1}{x} \le -2$ при $x < 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности двух систем.

$$\text{(I)} \begin{cases} 2\sin \pi a x = 2, \\ x + \dfrac{1}{x} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} + 2n, \\ x = 1, \end{cases} n \in \mathbf{Z},$$

$$\text{(II)} \begin{cases} 2\sin \pi a x = -2, \\ x + \dfrac{1}{x} = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} + 2n, \\ x = -1, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: при $a = \pm\frac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbf{Z}$, один корень, при $a \ne \pm\frac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbf{Z}$, нет решений.

Использование ограниченности функции
Метод оценки (*минимаксные задачи*)

Пример. Решите уравнение $2+\log_2^2(2+|(x-2)(x-3)|)=3^{(5+4x-x^2)/9}$.

Решение. Исследуем функцию $h(x)=5+4x-x^2$. Выделив полный квадрат, получаем $h(x)=9-(x-2)^2\leqslant 9$. Отсюда имеем

$$g(x)=3^{(5+4x-x^2)/9}=3^{h(x)/9}\leqslant 3.$$

С другой стороны,

$$f(x)=2+\log_2^2(2+|(x-2)(x-3)|)\geqslant 2+\log_2^2 2=3.$$

Следовательно, $3\leqslant 2+\log_2^2(2+|(x-2)(x-3)|)=3^{(5+4x-x^2)/9}\leqslant 3 \iff$

$$\iff \min f(x)=\max g(x),$$

т. е. минимум функции $f(x)$ совпадает с максимумом функции $g(x)$. Следовательно, исходная задача равносильна системе

$$\begin{cases} f(x)=3,\\ g(x)=3\end{cases} \iff \begin{cases} f(x)=3,\\ x=2\end{cases} \iff x=2.$$

Ответ: $x=2$.

Использование ограниченности функции
(*использование неотрицательности функции*)

Если левая часть уравнения (неравенства) $f(x) \vee 0$ есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x) \le 0$ или уравнение $f(x) = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

а неравенство $f(x) \ge 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Найдите все пары действительных чисел a и b, при которых имеет хотя бы одно решение уравнение $(x^2 + 6 - ab)^2 + (x - a - b + 9)^2 + x^2 + 4x + 4 = 0.$

Ответ: (2; 5), (5; 2).

Использование ограниченности функции (*использование неотрицательности функции*)

Пример. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$$ имеет ровно два решения.

Решение. Приведем уравнение к виду $(x^2-6|x|-a+6)^2+\left(1-\cos\frac{18\pi}{a}\right)=0$.

Так как в левой части последнего уравнения стоит сумма неотрицательных выражений, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ 1-\cos\dfrac{18\pi}{a}=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-3)^2=a+3, \\ \dfrac{18\pi}{a}=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -3, \\ |x|=3\pm\sqrt{a+3}, \\ a=\dfrac{9}{n},\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $|x|=3\pm\sqrt{a+3}$ системы имеет ровно два корня, если:

1. Пусть $a=-3$, тогда уравнение $-3=\dfrac{9}{n}$ выполняется при $n=-3$.

2. Если $3-\sqrt{a+3}<0$, то имеем $a>6$. Из неравенства $\dfrac{9}{n}>6$ получаем одно целое значение $n=1$, при этом $a=9$.

Ответ: -3; 9.

Использование ограниченности функции
(*наибольшее и наименьшее значения функции*)

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x.$$

Решение. Преобразуем выражение, используя метод введения вспомогательного аргумента. Заметим, что $\sqrt{4a^2 + (a^2 - 1)^2} = a^2 + 1$.

$$y(x) = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x = (a^2 + 1)\left(\frac{2a}{a^2 + 1}\sin x + \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\cos x\right) =$$

$$= (a^2 + 1)(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = (a^2 + 1)\sin(x + \alpha),$$

где $\alpha = \arccos\dfrac{2a}{a^2 + 1}$. Так как наибольшее значение $\sin(x + \alpha)$ равно 1, а наименьшее значение равно -1, то, следовательно, наибольшее значение функции $y = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x$ равно $a^2 + 1$, а наименьшее равно $-(a^2 + 1)$. Точек, где принимаются наибольшее и наименьшее значения, бесконечно много.

Ответ. $y_{\text{наим.}} = -(a^2 + 1), y_{\text{наиб.}} = a^2 + 1$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3.$$

Решение. Упростим подмодульное выражение

$$f(x) = 3\sin^2 x + 2a\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + a =$$

$$= 3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + a\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a = = a\sin 2x - \cos 2x + 2 + a =$$

$$= \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi) + 2 + a, \text{ где } \varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и набольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} m \ge -3 \\ M \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a^2+1} + 2 + a \ge -3 \\ \sqrt{a^2+1} + 2 + a \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2+1 \le (a+5)^2 \\ a+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+1 \le (1-a)^2 \\ 1-a \ge 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -2{,}4 \\ a \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

В некоторых задачах для нахождения множества значений функции $f(x)$ (нахождения наибольшего или наименьшего значений) удобно ввести параметр. Множество значений параметра, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет решение, образуют область значений функции.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{x^2-x+2}{x^2+1}.$$

Решение. Воспользуемся методом введения параметра. Найдем значения числа a, при которых имеет решение уравнение $\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a$. Так как $\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a \Leftrightarrow (a-1)x^2-x+(a-2)=0$. При $a=1$ уравнение имеет решение $x=-1$. Квадратное уравнение при $a\neq 1$ имеет решение, если его дискриминант неотрицателен. Так как $D=-4a^2+12a-7\geq 0$ при $a\in\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$, то $E(y)=\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2};\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ответ. $y_{\text{наим.}}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}, y_{\text{наиб.}}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Экстремумы функции

Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-6x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение. 1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2$: $f(x)=x^2-8x+2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x)=x^2-4x-2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

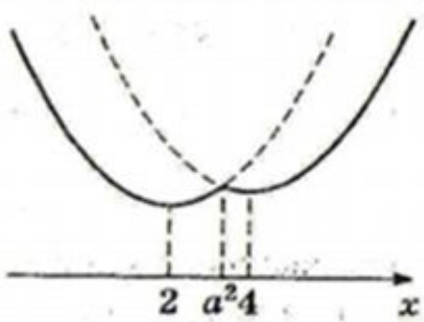


Рис. 1

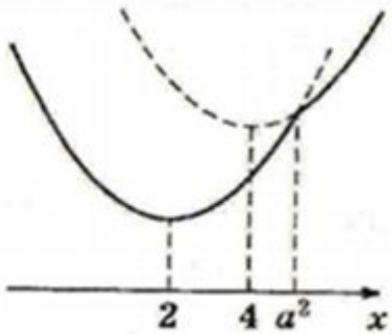


Рис. 2

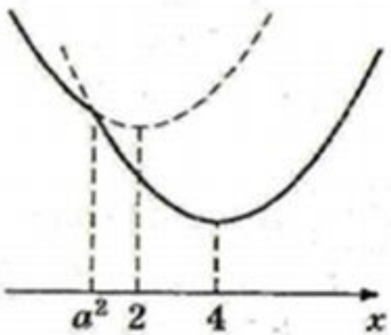


Рис. 3

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1): $2<a^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{2}<|a|<2$.

Ответ: $-2<a<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<a<2$.

Экстремумы функции

Пример 1 (ЕГЭ, 2003, № B4). При каком наибольшем отрицательном значении a функция

$$y = \sin\left(24x + \frac{a\pi}{100}\right)$$

имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

Решение. Максимумы функции $\sin t$ достигаются в точках вида $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, чтобы у исходной функции достигался максимум в точке $x_0 = \pi$, должно существовать такое число $n \in \mathbb{Z}$, что

$$24\pi + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{100} = \frac{1}{2} + 2m,\ m \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = 50 + 200m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Остаётся лишь выбрать среди чисел вида $a = 50 + 200m$, $m \in \mathbb{Z}$, наибольшее отрицательное. Это будет число -150, получающееся при $m = -1$, так как если $m \geqslant 0$, то $50 + 200m \geqslant 50$.

Ответ: $a = -150$.

Наибольшие и наименьшие значения функции и экстремумы

(2010, C5) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$$

имеет более двух точек экстремума.

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -2;\ 2 < a < \sqrt{5}.$

(2010, C5) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

Ответ: $-\sqrt{6} < a < -2;\ 2 < a < \sqrt{6}.$

Пример 5 (*2008, C3*). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{5}x^8 + 3x^{-8} - 5\right) - a}{a - \left(2\cos\sqrt{x-1} - 3\right)} \leqslant 0$$

не имеет решений. *Ответ*: $-1 \leqslant a < 2\sqrt[4]{45} - 5.$

Наибольшее и наименьшее значения функции (задачи)

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

1. а) $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$, $x\in(-1;+\infty)$.

2. а) $f(x)=3a\cos 2x-4a\sin 2x$; б) $f(x)=(1-a)\cos 3x-(1+a)\sin 3x$;

в) $f(x)=\cos^2 2x+12a\cos 2x-2$; г) $f(x)=\cos^2 2x+6a\sin 2x+2$.

3. а) $f(x)=ax^2+x+1$, $x\in[-2;3]$; б) $f(x)=x^2-x$, $x\in[a;a+3]$.

4. а) $f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}$; б) $f(x)=x+\dfrac{1}{x-a}$;

в) $f(x)=\dfrac{a^4+x^4}{x^2}$; г) $f(x)=\mathrm{tg}x+a\mathrm{ctg}x$, $x\in[\pi/6;\pi/3]$.

Определите значения параметра a, при которых имеет решение уравнение:

5. а) $x+\dfrac{1}{x}=6y-y^2+a,(x>0)$; б) $y^4-4y^2-\cos^2 x=a$;

в) $2^x+2^{-x}-2\sin y=a$; г) $\dfrac{3\cos x+4\sin x+5\pi+5}{3\sin y+4\cos y+5}=\arccos\dfrac{a}{3}+\arcsin\dfrac{a}{3}$.

1. а) $y_{наиб.}=f(0,5)=\sqrt{6}$; $y_{наим.}=f(1)=\sqrt{3}$; б) $y_{наим.}=2$; наибольшего нет.

Наибольшее и наименьшее значения функции (ответы)

2. **а)** $y_{наиб.} = 5|a|$; $y_{наим.} = -5|a|$; **б)** $y_{наиб.} = \sqrt{2+2a^2}$; $y_{наим.} = -\sqrt{2+2a^2}$; **в)** если $a < -1/6$, то $y_{наиб.} = -12a - 1$ и $y_{наим.} = 12a - 1$; если $0 > a \geq -1/6$, то $y_{наиб.} = -12a - 1$ и $y_{наим.} = -36a^2 - 2$; если $1/6 > a \geq 0$, то $y_{наиб.} = 12a - 1$ и $y_{наим.} = -36a^2 - 2$; если $a \geq 1/6$, то $y_{наиб.} = 12a - 1$ и $y_{наим.} = -12a - 1$; **г)** если $a \leq -1/3$, то $y_{наиб.} = -6a + 2$ и $y_{наим.} = 6a + 2$; если $0 \geq a \geq -1/3$, то $y_{наиб.} = 9a^2 + 3$ и $y_{наим.} = 6a + 2$; если $1/3 > a > 0$, то $y_{наиб.} = 9a^2 + 3$ и $y_{наим.} = -6a + 2$; если $a \geq 1/3$, то $y_{наиб.} = 6a + 2$ и $y_{наим.} = -6a + 2$.

3. **а)** Если $a < -1$, то $y_{наиб.} = 1 - \dfrac{1}{4a}$ и $y_{наим.} = 9a + 4$; если $-1 \leq a < -1/6$, то $y_{наиб.} = 1 - \dfrac{1}{4a}$ и $y_{наим.} = 4a - 1$; если $-1/6 \leq a < 0$, то $y_{наиб.} = 9a + 4$ и $y_{наим.} = 4a - 1$; если $a = 0$, то $y_{наиб.} = 4$ и $y_{наим.} = -1$; если $0 < a < 1/4$, то $y_{наиб.} = 9a + 4$ и $y_{наим.} = 4a - 1$; если $a \geq 1/4$, то $y_{наиб.} = 9a + 4$ и $y_{наим.} = 1 - \dfrac{1}{4a}$; **б)** если $a < -1$, то $y_{наиб.} = a^2 + 5a + 6$ и $y_{наим.} = a^2 - a$; если $a \geq -1$, то $y_{наиб.} = a^2 - a$ и $y_{наим.} = a^2 + 5a + 6$.

Наибольшее и наименьшее значения функции (ответы)

4. а) Если $a=0$, то наибольшего и наименьшего значений у функции не существует; если $a\neq 0$, то $y_{\min}=2|a|$ при $x=a$; **б)** если $a=0$, то $y_{\max}=2|a|$ при $x=1$ ($x\neq a$); если $a\neq 0$, то $y_{\max}=2+a$ при $x=1+a$ и $y_{\min}=-2+a$ при $x=-1+a$ ($x\neq a$); **в)** $y_{\min}=2a^2$ при $x=-a$ и $x=a$ ($x\neq 0$); **г)** если $0<a\leq 1/\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$; если $1>a>1/\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $a=1$, то $y_{наиб.}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $\sqrt{3}\geq a>1$, то $y_{наиб.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $a>\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$. **5. а)** $a\geq -7$; **б)** $a\geq -5$; **в)** $a\geq 0$; **г)** $|a|\leq 3$.

Использование монотонности функции
(*монотонность функции на промежутке*)

Утверждение. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ (где c — любое действительное число) имеет не более одного корня.

Пример. Определите число корней уравнения

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x+11} = a.$$

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{x+11}$ на $D(f) = [5;+\infty)$ возрастает, поэтому $f(x) \geq f(5) = 4$. Так как $E(f) = [4;+\infty)$, то исходное уравнение при $a \geq 4$ имеет единственный корень, а при $a < 4$ корней не имеет.

Ответ: Если $a \geq 4$, то один корень; если $a < 4$, то корней нет.

Статья: Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. и др. Композиция функций и функциональные уравнения. «Математика», 2010, № 8. − С. 3-12.

Использование монотонности функции
(*монотонность функции на промежутке*)

Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку $[1;3]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a$. Она определена при $x>\dfrac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1;3]$ тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$ и $f(3)\ge 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}4+3+2a\le 0,\\ 8+9+2a\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}2a+7\le 0,\\ 2a+17\ge 0,\end{cases}$$

откуда $-\dfrac{17}{2}\le a\le -\dfrac{7}{2}$.

Ответ: $\left[-\dfrac{17}{2};-\dfrac{7}{2}\right]$.

Использование монотонности функции
(*монотонность функции на множестве* R)

Если функция $f(t)$ строго монотонна на $\mathbb{R}$, то уравнение $f\big(h(x)\big)=f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x)=g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, то неравенство $f\big(h(x)\big)>f\big(g(x)\big)$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\mathbb{R}$, то неравенство $f\big(h(x)\big)>f\big(g(x)\big)$ равносильно неравенству $h(x)<g(x)$.

АБИТУРИЕНТ RU

Использование монотонности функции
(*монотонность функции на множестве* R)

Пример. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение
$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$ не имеет действительных решений.

Решение. Обозначим $y = x^2 - 5x + 4a$. Тогда $x^2 = y + 5x - 4a$. В новых обозначениях уравнение примет вид $64^{x+a} = y + 5x - 4a - 8x + a + 4^y$, откуда
$$3x + 3a + 4^{3x+3a} = y + 4^y.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 4^t$. Последнее уравнение примет вид
$$f(3x+3a) = f(y).$$

Функция $f(t) = t + 4^t$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций). Тогда уравнение $f(3x+3a) = f(y)$ равносильно уравнению $3x + 3a = y$.

Выполнив обратную замену, получим $3x + 3a = x^2 - 5x + 4a$ или
$$x^2 - 8x + a = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $8^2 - 4a < 0$, то есть при $a > 16$.

Ответ. $a > 16$.

Монотонность функции (задачи)

1. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=(a-1)x+a^2-3$ ($x\in\mathbb{R}$): а) возрастает; б) убывает.

2. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=ax^2+6x+a$ ($x\in[-1;3]$): а) возрастает; б) убывает.

3. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=\log_2(a^2x^2+(a+4)x+2)$ ($x>0$) является монотонной.

4. Для каждого значения параметра a решите данное уравнение или неравенство.

а) $\sqrt{2}\cdot a-3\sqrt{x}=\sqrt{x-2}$ ($a>3$); б) $\sqrt[5]{a+x}-\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$;

в) $\log_a\left(2x^2-4x+2+a^{x^2-2x+5}\right)\le 4$ ($a>1$).

5. Решите данную систему уравнений.

а) $\begin{cases}\sqrt{x+a}-\sqrt{y+b}=1,\\ \sqrt{y+a}-\sqrt{x+b}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y+2a=3^y-9^a\cdot 3^x,\\ y=x^2+x.\end{cases}$

Монотонность функции (ответы)

1. **а)** $a>1$; **б)** $a<1$. **2.** **а)** $a\in(0;3]$; **б)** $a\in[-1;0]$. **3.** $a\geq -4$.

4. **а)** $x=\dfrac{(3\sqrt{a}-\sqrt{a^2-8})^2}{32}$; **б)** $x=a$. ***Указание.*** Преобразуйте уравнение к виду $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{x-a}=\sqrt[5]{2a}$; **в)** $x=1$. ***Указание.*** Пусть $t=x^2-2x+1$. Тогда неравенство примет вид $\log_a\left(2t+a^{t+4}\right)\leq 4$. При $a>1$ имеет место неравенство $2t+a^{t+4}\leq a^4$. Отсюда следует $t=0$. **5.** **а)** Если $a\geq b+1$, то $x=y=\dfrac{(a-b-1)^2}{4}-b$; если $a<b+1$, то решений нет. ***Указание.*** Вычитая из первого уравнения второе, получите равенство $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{y+a}+\sqrt{y+b}$. Рассмотрите возрастающую функцию $f(t)=\sqrt{t+a}+\sqrt{t+b}$; **б)** если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то $x=y=0$; если $a>0$, то $x=\sqrt{2a}$, $y=2a+\sqrt{2a}$ и $x=-\sqrt{2a}$, $y=2a-\sqrt{2a}$. ***Указание.*** Перепишите первое уравнение в виде $x+2a+3^{x+2a}=y+3^y$. Далее рассмотрите функцию $f(t)=t+3^t$.

Монотонность функции (задачи и ответы)

(ЕГЭ, 2008). Решите уравнение:

а) $x^6 - |4x+3|^3 = 25\cos(x^2) - 25\cos(4x+3)$;

б) $x^8 + 90\cos(15-8x) = 90\cos x^2 + (15-8x)^4$.

Ответы: **а)** -3; -1; $2 \pm \sqrt{7}$; **б)** 3; 5; $-4 \pm \sqrt{31}$.

(МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых

уравнение: а) $\sin(x-3a) + \sin\left(\dfrac{x^2-6x+7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$

не имеет действительных решений;

б) $\cos\left(\dfrac{10x-2x^2-a}{3}\right) - \cos(2x+a) = x^2 - 8x - a$

имеет единственное решение.

Ответы: **а)** $a > 4$. *Указание.* Привести уравнение к виду

$$2x + \sin(x-3a) = 2\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right) + \sin\left(\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right) - 3a\right).$$

Далее рассмотреть функцию $y(t) = 2t + \sin(t-3a)$; **б)** $a = -16$.

Логарифмические уравнения и неравенства

При решении логарифмических уравнений и неравенств используются следующие логические схемы, основанные на монотонности логарифмической функции (аналогичные схемы имеют место для показательных уравнений и неравенств):

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно одной из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично, уравнение $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$, $A > 0$ равносильно одной из следующих систем:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Логарифмическое неравенство $\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{(II)} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Задание 20. Логарифмические уравнения

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(ax^2-(a+2)x+3)+\log_{0,1}(3x^2-(a+2)x+a)=0$ имеет более двух корней.

Решение. Перейдя к основанию 10, перепишем данное уравнение в виде $\lg(ax^2-(a+2)x+3)=\lg(3x^2-(a+2)x+a)$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax^2-(a+2)x+3=3x^2-(a+2)x+a, \\ 3x^2-(a+2)x+a>0. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $(a-3)x^2=a-3$. Если $a\neq 3$, последнее уравнение является квадратным и более двух корней иметь не может. Если $a=3$, корнем уравнения является любое действительное число. При этом неравенство системы принимает вид $3x^2-5x+{}+3>0$ и выполняется при любом значении переменной в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена в левой части неравенства.

Ответ: 3.

Логарифмические неравенства

Пример 2. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a(1+x) < 1.$$

$\triangle$ Исходя из определения логарифма, рассматриваем только значения $a > 0$. При $a \leqslant 0$ и $a = 1$ решений нет. При $a > 0$ приводим неравенство к виду

$$\log_a(1+x) < 1 \Leftrightarrow \log_a(1+x) < \log_a a.$$

Полученное неравенство, так же как и исходное, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a > 1, \\ 1 + x < a, \\ 1 + x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ -1 < x < a - 1; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 + x > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > a - 1. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Объединяя полученные решения, записываем ответ. $\blacktriangle$

Ответ: При $a \leqslant 0, a = 1$ решений нет; если $0 < a < 1$, то $x \in (a-1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in (-1; a-1)$.

Использование монотонности функции
(*функции разной монотонности*)

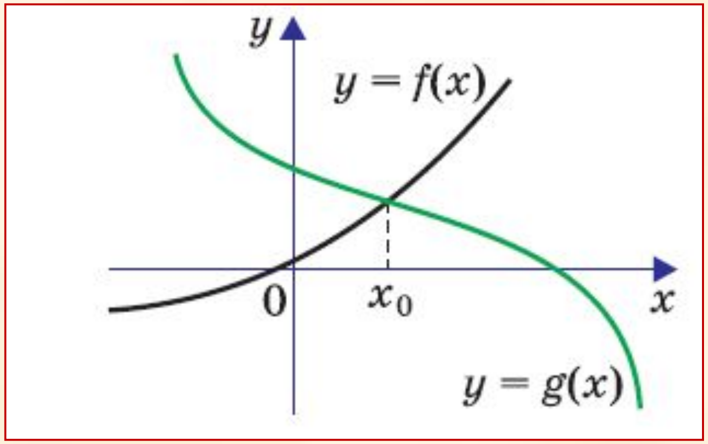
Утверждение. Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y=g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня.

Утверждение. Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $y=g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой, то справедливы следующие утверждения: а) $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ в том и только в том случае, когда $\alpha\leqslant\beta$; б) $g(\alpha)\leqslant g(\beta)$ в том и только в том случае, когда $\alpha\geqslant\beta$.

Утверждение. Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, функция $y=g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $f(x_0)=g(x_0)$, то справедливы следующие утверждения:

а) $f(x)\leqslant g(x)$ в том и только в том случае, когда $x\in(-\infty;x_0]$;

б) $f(x)\geqslant g(x)$ в том и только в том случае, когда $x\in[x_0;+\infty)$.



Функции разной монотонности

Пример. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \log_a y = (x^2-2x)^2, \\ x^2+y=2x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Выразим из второго уравнения $y=2x-x^2$ и подставим в первое уравнение $\log_a y = y^2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0<a<1$. Так как функция $z=\log_a y$ убывает, а функция $z=y^2$ возрастает на промежутке $(0;1)$, то уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на этом промежутке не более одного корня. Определим знаки значений функции $f(y) = \log_a y - y^2$ на промежутке $[a^2;1]$

$$f(a^2)=\log_a a^2-(a^2)^2=2-a^4>0 \quad \text{и} \quad f(1)=\log_a 1-1^2=-1<0.$$

Поэтому уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на промежутке $(0;1)$ ровно один корень y_0. Тогда второе уравнение

$$x^2-2x+y_0=0$$

имеет дискриминант $D_1=1-y_0>0$ и имеет два различных корня. Следовательно, данная система уравнений имеет два различных решения.

2. Пусть $a>1$. Если уравнение $\log_a y = y^2$ имеет корни, то они больше 1. Тогда уравнение $x^2-2x+y_0=0$ имеет дискриминант $D_1=1-y_0<0$ и не имеет действительных корней. ***Ответ:*** $(0;1)$.

Использование монотонности функции

Задачи вида $f(f(x)) \vee x.$

Если функция $f(x)$ строго возрастает на некотором промежутке, то уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$ равносильны на этом промежутке.

Пример. *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$\sqrt{\sqrt{x+a}} = x-a$$

имеет два различных корня.

Решение. Данное уравнение приведем к виду

$$\sqrt{\sqrt{x+a}+a} = x \text{ или } f(f(x)) = x,$$

где $f(x)=\sqrt{x}+a$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$. Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x}+a=x$.
Решая последнее уравнение, получим ответ.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4};0\right]$.

Доказательство утверждения

Задачи вида

$$f(f(x)) \vee x$$

Утверждение 5. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ имеют одно и то же множество корней.

Доказательство. Пусть число x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$, т. е. $f(x_0) = x_0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, т. е. x_0 — корень уравнения $f(f(x)) = x$. Как видим, в этой части доказательства монотонность даже не потребовалась. Обратно, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(f(x)) = x$, т. е. $f(f(x_0)) = x_0$. Докажем, что тогда и $f(x_0) = x_0$, т. е. x_0 — корень уравнения $f(x) = x$. Предположим, что это не так, т. е. что $f(x_0) \neq x_0$. Тогда либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$. В силу монотонного возрастания функции $y = f(x)$ из неравенства $f(x_0) > x_0$ следует неравенство $f(f(x_0)) > f(x_0)$, но $f(f(x_0)) = x_0$, поэтому $x_0 > f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x_0) > x_0$. Аналогично если $f(x_0) < x_0$, то $f(f(x_0)) < f(x_0)$, откуда $x_0 < f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x_0) < x_0$. Значит, сделанное допущение неверно, и $f(x_0) = x_0$, т. е. x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$. Утверждение доказано.

Отсюда легко выводится еще одно утверждение, которое сформулируем как следствие доказанного.

Следствие. Если n — натуральное число, а функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(x) = x$ и

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n \text{ раз}} = x$$

имеют одно и то же множество корней.

Метод рационализации

Идея метода основана на замене трансцендентного неравенства равносильным ему в области допустимых значений переменной и параметров более простым, в частности, алгебраическим неравенством.

Например, если F – элементарная трансцендентная функция, возрастающая в области допустимых значений переменной и параметров (ОДЗ) или на некотором множестве (М) из этой области, то

$$F(f_1(x,a))-F(f_2(x,a))>0 \underset{\text{ОДЗ(М)}}{\Leftrightarrow} f_1(x,a)-f_2(x,a)>0,$$

а если убывающая, то

$$F(f_1(x,a))-F(f_2(x,a))>0 \underset{\text{ОДЗ(М)}}{\Leftrightarrow} f_1(x,a)-f_2(x,a)<0.$$

1	$\log_a f(x,a)-\log_a g(x,a)$	$(a-1)(f(x,a)-g(x,a))$
1(а)	$\log_a f(x,a)-1$	$(a-1)(f(x,a)-a)$
1(б)	$\log_a f(x,a)$	$(a-1)(f(x,a)-1)$
2	$\log_{h(x,a)} f(x,a)-$ $-\log_{h(x,a)} g(x,a)$	$(h(x,a)-1)\times$ $\times(f(x,a)-g(x,a))$
2(а)	$\log_{h(x,a)} f(x,a)-1$	$(h(x,a)-1)(f(x,a)-h(x,a))$
2(б)	$\log_{h(x,a)} f(x,a)$	$(h(x,a)-1)(f(x,a)-1)$

Применение метода рационализации

Сначала демонстрация применения метода для решения неравенства без параметра.

Пример задания **Решите неравенство**

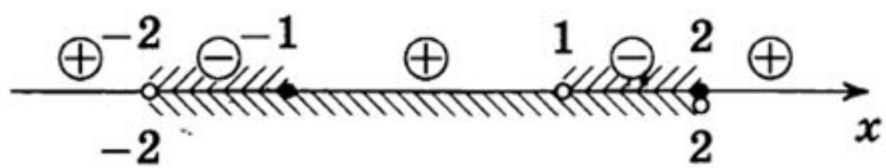
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$$

РЕШЕНИЕ. Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2,\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$.

Применение метода рационализации

Пример. Для каждого допустимого значения параметра a решить неравенство $\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 0 < 2a \neq 1, \\ \log_3 x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 0,5, \\ |x| > 1. \end{cases}$.

Применяя дважды метод декомпозиции, получим:

$$\log_{2a}(\log_3 x^2) - 1 > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{2a}(\log_3 x^2) - \log_{2a}(2a) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (2a-1)(\log_3 x^2 - \log_3 3^{2a}) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (2a-1)(x-3^a)(x+3^a) > 0.$$

Для решения последнего неравенства достаточно рассмотреть два случая: (1) $a \in (0; 0,5)$ и (2) $a \in (0,5; +\infty)$.

Если $a \in (0; 0,5)$, то $(2a-1)(x-3^a)(x+3^a) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3^a)(x+3^a) < 0, \\ |x| > 1. \end{cases}$

Отсюда $x \in (-3^a; -1) \cup (1; 3^a)$.

Аналогично, при $a \in (0,5; +\infty)$ получим $x \in (-\infty; -3^a) \cup (3^a; +\infty)$.

Ответ: Если $a \in (0; 0,5)$, то $x \in (-3^a; -1) \cup (1; 3^a)$;

если $a \in (0,5; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -3^a) \cup (3^a; +\infty)$.

Периодические функции и параметр (задачи)

*4) Положительные числа T_1 и T_2 *соизмеримы*, если $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{Q}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. В этом случае существует такое $T_0 > 0$, что $T_1 = n_1 T_0$, $T_2 = n_2 T_0$. Назовем *наименьшим общим кратным* НОК(T_1, T_2) таких чисел величину $T = \text{НОК}(n_1, n_2) \cdot T_0$.

Теорема. *Пусть $T_1 > 0$ — период функции $f(x)$, а $T_2 > 0$ — период функции $g(x)$, причем T_1 и T_2 соизмеримы. Если существуют значения x, принадлежащие одновременно $D(f)$ и $D(g)$, то функция $h(x) = f(x) + g(x)$ — периодическая, имеющая периодом число $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$.*

○ Если $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$, то существуют такие натуральные числа k и m, что $T = kT_1$ и $T = mT_2$. Пусть x — любое значение из $D(h)$. Тогда

$$h(x+T) = f(x+T) + g(x+T) =$$

$$= f(x+kT_1) + g(x+mT_2) = f(x) + g(x) = h(x). \quad \bullet$$

Учебник. Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса. − 2-е изд., испр. и доп. − М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с. Гриф МО.

Периодические функции и параметр

Пример. При каких значениях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

Решение. Число $\frac{\pi}{2}$ является периодом данной функции, если для всех допустимых значениях x выполняется равенство

$$\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}=\frac{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{3a+\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}=\frac{\cos 2x}{-3a+\sin 2x}.$$

Отсюда получаем $3a+\sin 2x=-3a+\sin 2x$ или $a=0$. В этом случае функция имеет вид $f(x)=\operatorname{ctg} 2x$, причем, если $2x_0\in D(f)$, то $2\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)=2x_0+\pi\in D(f)$.

Ответ: 0.

Пример. (МИОО, 2012). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x)=|2a+5|x$ имеет ровно 6 решений, где f – четная периодическая функция с периодом $T=2$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le 1$.

Решение. Если $a=0$, то $f(x)$ тождественно равна нулю, и ее график имеет с прямой $y=5x$ единственную общую точку.

Если $a\ne 0$, то в силу четности $f(x)=ax^2$ при $x\in[-1;1]$ и на любом отрезке $[-1+2k;1+2k]$, $k\in\mathbb{Z}$, график функции $f(x)$ получается сдвигом на $2k$ единиц вдоль оси Ox из ее графика на отрезке $[-1;1]$.

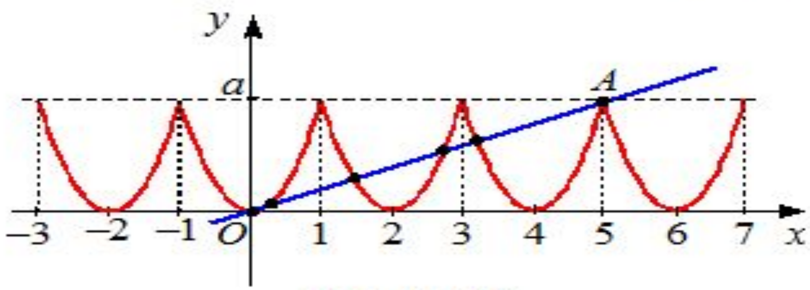


Рис. 6.30*а*

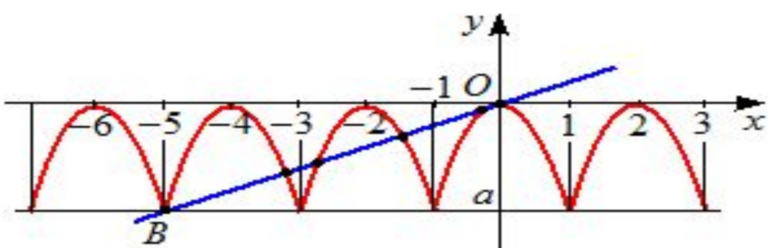


Рис. 6.30*б*

Пусть $a>0$ (рис. 6.30*а*), тогда решение $x=0$ есть при всех a. Соответственно ровно 6 решений возможно, если прямая $y=(2a+5)x$ проходит через точку $A(5;a)$. Но из уравнения $a=3(2a+5)$ получаем $a=-2{,}5$, то есть положительных решений нет. Следовательно, случай $a>0$ не возможен.

Пусть $a<0$ (рис. 6.30*б*). Ровно 6 решений возможно, если прямая $y=|2a+5|x$ проходит через точку $B(-5;a)$. Из уравнения $a=|2a+5|\cdot(-5)$ получаем $a=-\frac{25}{11}$ или $a=-\frac{25}{9}$. *Ответ*: $-\frac{25}{11}$ или $-\frac{25}{9}$.

Периодические функции и параметр (задачи)

1. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x) = (a+3)x + 5a$ ($x \in \mathbb{R}$) является периодической.

2. Найдите значения параметра $n \in \mathbb{Z}$, при которых функция $f(x) = \dfrac{\sin nx}{\sin(x/n)}$ имеет периодом число 4π.

3. Найдите значения параметра $a \in \mathbb{Q}$, при которых периоды функций $f(x) = \sin\dfrac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$ и $g(x) = \operatorname{tg}\dfrac{3ax}{1 - 2a + \sqrt{108}}$ равны.

4. Докажите, что функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, является периодической, если ее график симметричен относительно прямой $x = a$ и относительно

а) прямой $x = b$ ($a \neq b$); б) точки $B(b; y_0)$ ($a \neq b$).

5. Докажите, что если функция $f(x)$ является периодической, то $b \in \mathbb{Q}$, где: а) $f(x) = \sin x + \cos bx$; б) $f(x) = \cos x + \sin bx$.

Периодические функции и параметр (ответы)

1. $a=-3$. **2.** $n\in\{-2;-1;1;2\}$. **3.** $a\in\{-1;0;1/3\}$. **4.** **а)** ***Указание.*** Используя условия $f(a+x)=f(a-x)$ и $f(b+t)=f(b-t)$, докажите, что период функции равен $2(b-a)$. **5.** **а)** ***Указание.*** Из условия $f(x+T)=\sin(x+T)+\cos b(x+T)$ получите равенства $\cos bT=1$ и $\sin T=1$, из которых следует, что $b=\dfrac{2m}{k}$, где $m,k\in\mathbb{Z}$.

Применение производной

(2003, С2) Найдите все значения p, при которых уравнение

$$4\sin^3 x = p + 7\cos 2x$$

не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; -7) \cup (11; +\infty)$.

(2003, С2) При каких значениях p уравнение

$$3\cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -17$$

имеет решение?

Ответ: $[-10; 10]$.

Статья: Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ. «Математика», − М.: 2011, № 5. − С. 11–21.

Применение производной

(ЕГЭ 2013, С5) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$

имеет единственный корень.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10}; -\frac{3}{16}\right) \cup \{0\}$.

(ЕГЭ 2013, С5) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

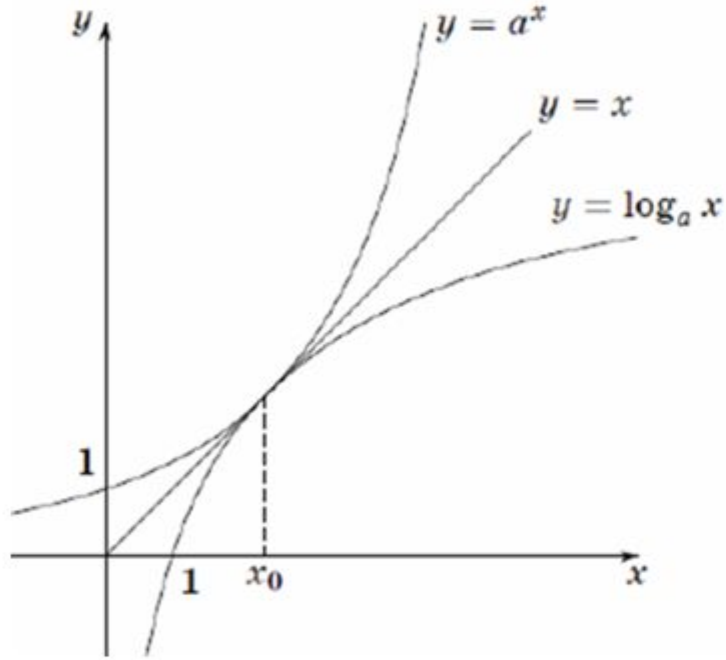
$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ: $\{-5\} \cup [15 - 10\sqrt{2}; 15 + 10\sqrt{2}]$.

Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ (см. рис.). Поскольку эти функции взаимно обратны, каждая общая точка их графиков лежит на прямой $y = x$.



Следовательно, уравнение $a^x = \log_a x$ эквивалентно уравнению $a^x = x$. Ввиду *очевидной* выпуклости функции $f(x) = a^x$ последнее уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда график $y = a^x$ *касается* прямой $y = x$. Это значит, что в некоторой точке x_0 выполняются равенства $f(x_0) = x_0$ и $f'(x_0) = a^{x_0} \ln a = 1$. Отсюда $x_0 = \dfrac{1}{\ln a}$, то есть $e = a^{\frac{1}{\ln a}} = \dfrac{1}{\ln a}$, $\ln a = \dfrac{1}{e}$, $a = e^{1/e}$.

Ответ: $a = e^{1/e}$.

Применение производной

С5. Найдите все значения параметра a такие, что каждый корень уравнения $3^{|x|+1}-a^3+240\cdot\sin\frac{\pi|x|}{4}=5a^2+3a+3$ является корнем данного уравнения только при одном значении параметра.

Решение. Приведем уравнение к виду

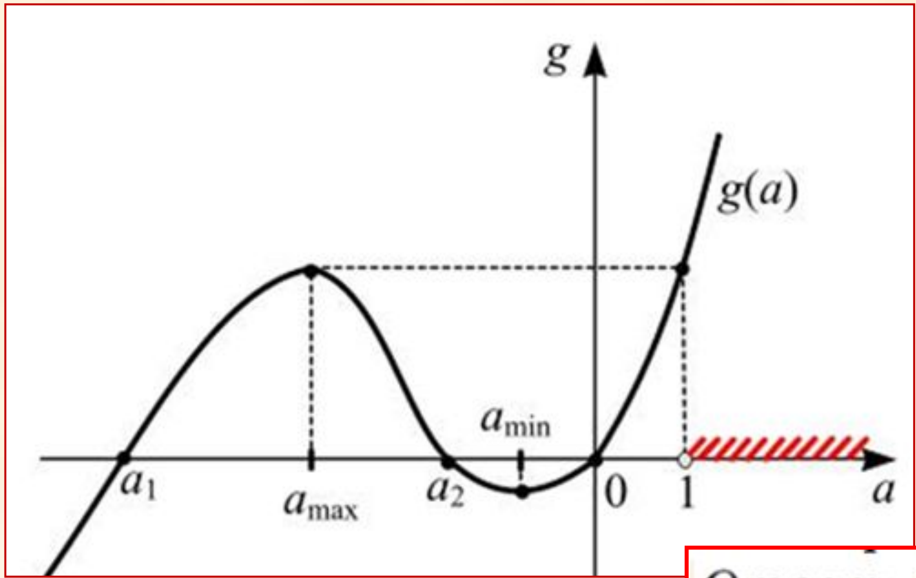
$$3\cdot(3^{|x|}-1)+240\cdot\sin\frac{\pi|x|}{4}=a^3+5a^2+3a.$$

Введем функции $f(x)=3\cdot(3^{|x|}-1)+240\cdot\sin\frac{\pi|x|}{4}$ и $g(a)=a^3+5a^2+3a$.

Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x)=g(a)$.

……………………

Так как $E(f)=[0;+\infty)$ и при $a>1$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $(9;+\infty)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a.



Ответ: $a>1$.

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

Журналы «Математика в школе», «Математика для школьников»,

«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),

mathus.ru/math/ , reshuege.ru,

ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты

Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

21.11.14