3.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

Система векторов называется базисом пространства R^n, если

1

Векторы этой системы линейно независимы.

2

Любой вектор из этого пространства линейно выражается через векторы этой системы.

ТЕОРЕМА

Линейно независимая система векторов в пространстве R^n является базисом тогда и только тогда, когда число векторов этой системы равно размерности пространства n.

ТЕОРЕМА

Разложение любого вектора в данном базисе является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$

является базисом.

Предположим, что вектор b **может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов двумя способами:**

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n$$

Причем наборы чисел $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ **и** $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$

не совпадают.

Вычтем одно равенство из другого:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{a}_n = 0$$

Получили, что линейная комбинация векторов системы равна нулю, т.е. Система оказалась линейно зависимой, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, разложение вектора в данном базисе будет единственным.

Таким образом, в произвольном базисе пространства R^n любой вектор из этого пространства представим в виде разложения по базисным векторам:

$$\boxed{\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n}$$

Причем, это разложение является единственным для данного базиса.

Числа $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$

называются координатами вектора $\vec{b}$

в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$

Чтобы найти коэффициенты разложения α_i в случае произвольного базиса, нужно приравнять соответствующие координаты линейной комбинации и координаты вектора $\vec{b}$

Пусть базисные вектора заданы в координатной форме:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12} \ldots a_{1n})$$

$$\ldots$$

$$\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2} \ldots a_{nn})$$

И задан вектор

$$\vec{b} = (b_1, b_2 \ldots b_n)$$

Тогда получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = b_1 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = b_n \end{cases}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты разложения

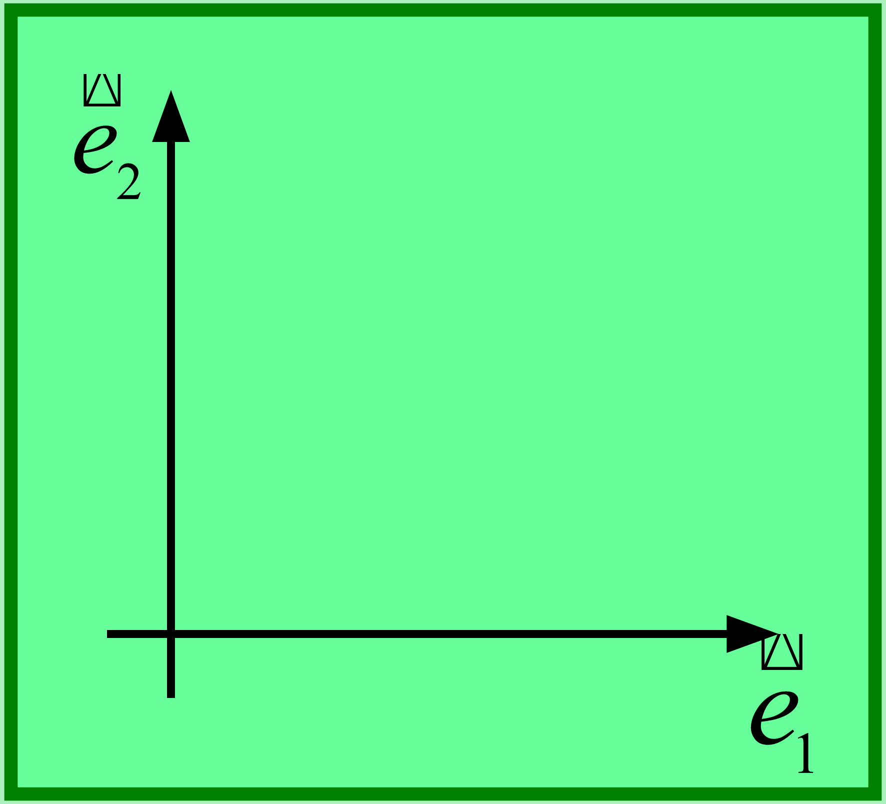
$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

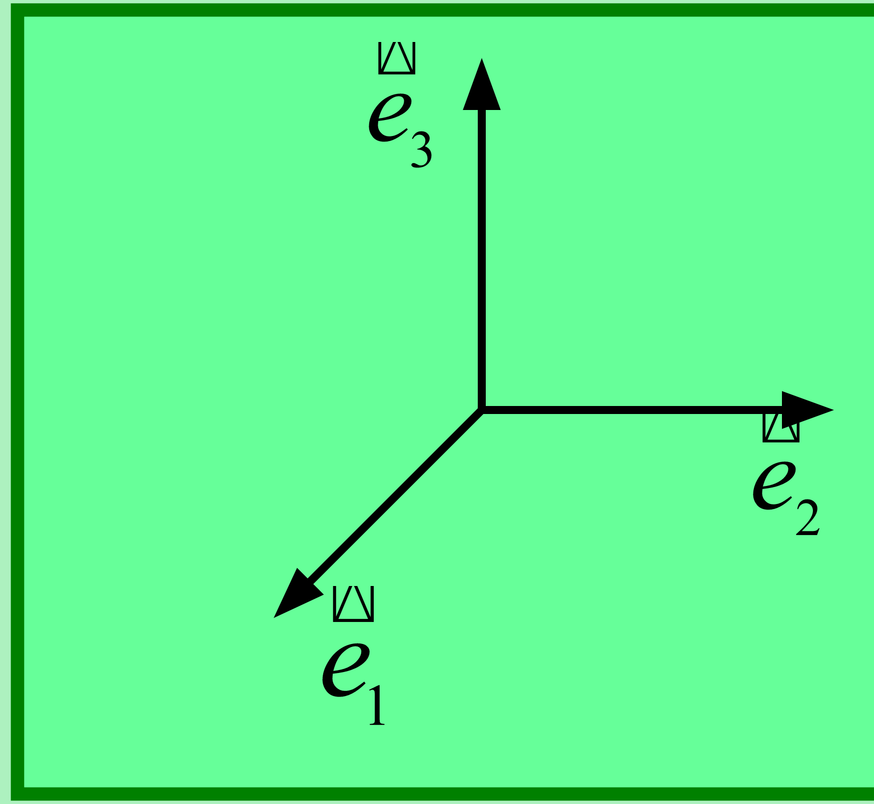
Рассмотрим базис пространства R^n , в котором каждый вектор ортогонален остальным векторам базиса:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n \qquad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad i \neq j \qquad i, j = 1,2 \ldots n$$

Такой базис называется <u>ортогональным.</u>

Они хорошо представимы на плоскости и в пространстве:


$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$


$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$

Найдем разложение вектора $\vec{b}$

в ортогональном базисе:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$$

Умножим обе части равенства на $\vec{e}_1$

$$(\vec{b}, \vec{e}_1) = \alpha_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \alpha_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n (\vec{e}_n, \vec{e}_1)$$

Поскольку все вектора базиса взаимно ортогональны, то

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \qquad i \neq j$$

Имеем:

$$(\vec{b},\vec{e}_1)=\alpha_1(\vec{e}_1,\vec{e}_1) \Longrightarrow \alpha_1=\frac{(\vec{b},\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}=\frac{(\vec{b},\vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2}$$

В общем случае:

$$\boxed{\alpha_i=\frac{(\vec{b},\vec{e}_i)}{|\vec{e}_i|^2}}$$

Частным случаем ортогонального базиса является ортонормированный базис.

В этом случае все базисные вектора имеют единичную длину:

$$\left|\vec{e}_i\right| = 1$$

Тогда коэффициенты разложения имеют вид:

$$\boxed{\alpha_i = (\vec{b}, \vec{e}_i)}$$

$$i = 1,2\ldots n$$