ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

а) 1, 2, 3,…,**n**,….

б) 1, -1/2, 1/3, -1/4,…, $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

в) sin 1, sin 2, sin 3,…, **sin n**,…

Любое число в совокупности имеет номер в соответствии с тем местом, которое оно занимает и от него зависит.

Пример: n=12

а) $a_{12}=12$

б) $b_{12}=-1/12$

в) $c_{12}=\sin 12$

ОПР. Совокупность чисел, каждое из которых имеет свой номер $n \in N$ и от него зависит, называется **числовой последовательностью**.

$$X_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

$$a_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Задать числовую последовательность, значит указать как отыскивается любой ее член, если известен номер занимаемого им места.

1. <u>Описание</u>

(x_n)-последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001…

$\sqrt{2}$=1,1421356…

$(X_n)=\{1,1;\ 1,14;\ 1,142;\ 1,1421;\ldots\}$

2. Формула n-го члена.

Формула, позволяющая найти любой член последовательности по его номеру

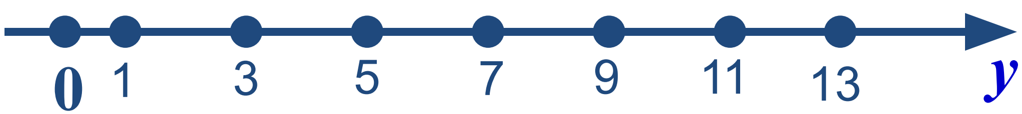
Назовите первые 5 членов последовательности $(X_n) = n^2$

Понятие сходящейся последовательности

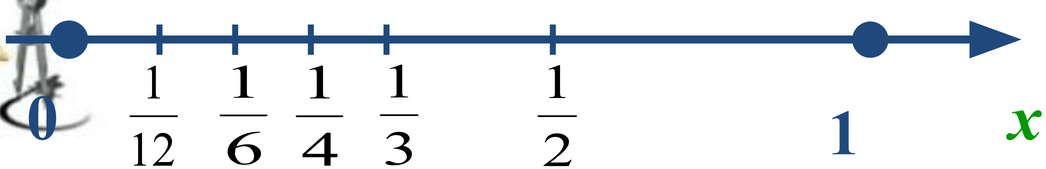
Обратим внимание, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой точки нет. В подобных случаях говорят, что последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится.

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n) и изобразим их члены точками на координатной прямой.

(y_n): $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots;$



(x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$



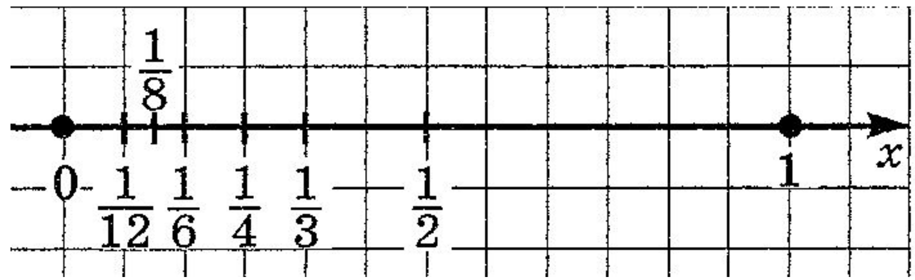
Понятие сходящейся последовательности

(y_n): 1, 3, 5, 7,…,$(2n$-1),...

<u>**Нет точки сгущения**</u>

Последовательность <u>расходится</u>

(x_n): 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6,…1/n,..



<u>**Точка сгущения – 0**</u>

Последовательность <u>сходится</u>

Чтобы узнать является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности, введем следующее понятие.

Окрестность точки

<u>Определение 1.</u> **Пусть a – точка прямой, а r – положительное число. Интервал $(a - r; a + r)$ называют окрестностью точки a, а число r – радиусом окрестности.**

Пример. (3,97; 4,03) – окрестность точки 4, радиус равен 0,03.

Предел последовательности

В математике «точку сгущения» для членов заданной последовательности принято называть «пределом последовательности».

<u>Определение 2.</u> **Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.**

<u>Обозначение:</u> **1. (y_n стремится к b или y_n сходится к b);**

$$y_n \to b$$

2. (предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Формулы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $0 < |q| < 1$

Если $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не существует.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\textit{к}/n^{m}) = 0$

Предел последовательности

Построим графики последовательностей:

$$y_n = \frac{1}{n},$$

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$y_n = \frac{2n}{n+1}.$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

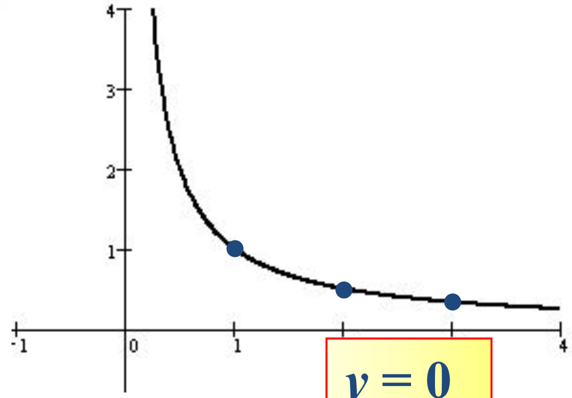


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

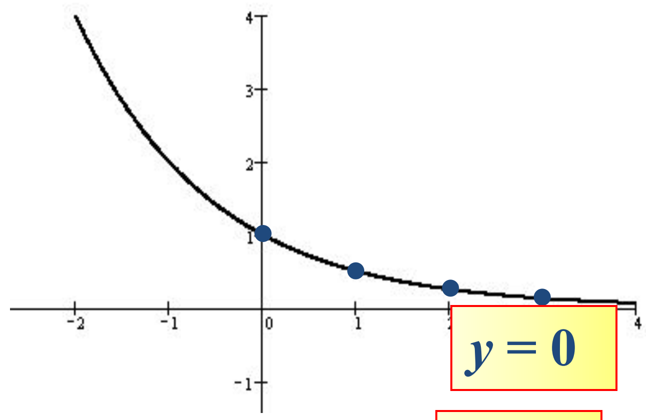


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

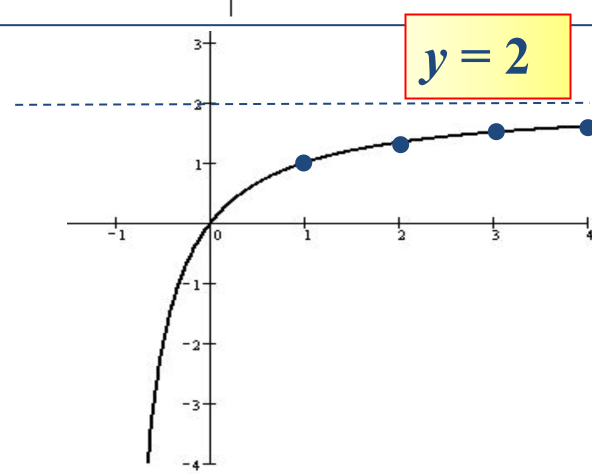


Рис. 3

Асимптоты графика

Обратите внимание, что на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к некоторой горизонтальной прямой:

- **на рис 1 – к прямой $y = 0$,**
- **на рис 2 – к прямой $y = 0$,**
- **на рис 3 – к прямой $y = 2$.**

Каждую из этих прямых называют горизонтальной асимптотой графика.

Асимптоты графика

Вообще равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = b$

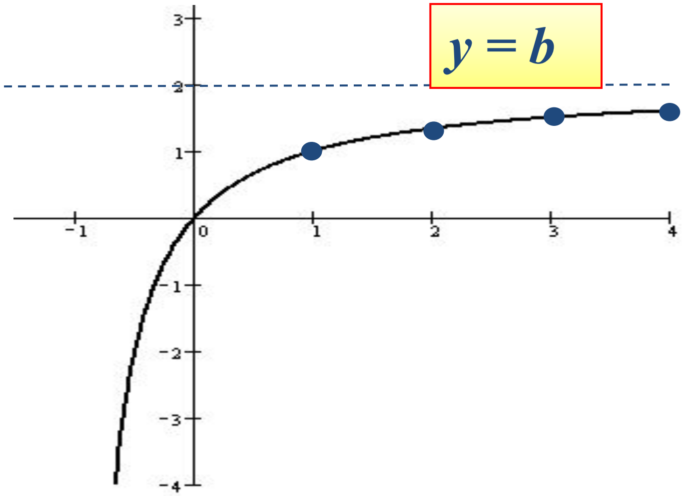
означает, что прямая $\boldsymbol{y = a}$

является горизонтальной асимптотой

графика последовательности, $y_n = f(n)$

т.е. графика функции

$$y = f(x),\ x \in N.$$



Свойства

- Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
- Если последовательность сходится , то она ограничена.

Обратное–неверно:1,2,3,1,2,3,…– ограниченная последовательность, но она не сходится

- **Теорема Вейерштрасса**

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

- Карл Теодор Вейерштрасс- выдающийся немецкий математик, отец «современного анализа»

- **1815-1897 г.**

- **Кратер на Луне**

Свойства вычисления пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1)Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = b + c$$

2)Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = b \cdot c$$

3)Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n : y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n : \lim_{n\to\infty} y_n = b : c$$

4)Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot b$$

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}$

Решение. **Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной *x*, т.е. на x^5.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^5}{x^5}-\dfrac{3x^3}{x^5}+\dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{x^5}{x^5}+\dfrac{4x^2}{x^5}+\dfrac{2x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}$

Решение. **Делим числитель и знаменатель дроби <u>почленно</u> на наивысшую из имеющихся степень переменной *x* т.е. на x^4.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{5x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{0+0+0}{2-0+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

Примеры вычисления пределов

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}$

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной *x*, т.е. на x^6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^6}{x^6}-\dfrac{x^2}{x^6}+\dfrac{i}{x^6}}{\dfrac{x^4}{x^6}+\dfrac{2x^3}{x^6}+\dfrac{x}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{i}{x^6}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{i}{x^6}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{i}{x^6}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}}=$$

$$=\frac{2-0+0}{0+0+0}=\frac{2}{0}=\text{(не существует)}=\infty$$

Правила вычисления пределов

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = 2$$

Правила вычисления пределов

2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}=0$$

Правила вычисления пределов

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}=\infty$$

Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+4x+2}{5x^2+3x+1}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+3x+7}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x+3}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3+3x^2+x+1}{2x^3+x+13}=\frac{6}{2}=3$

Методика вычисления пределов в точке

Если функция существует в точке x = a, то ее предел равен f(a).

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to3}(2x+5)$

Решение. **Подставим вместо *x* число *3* (т.к. *x*□*3*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to3}(2x+5)=\lim_{x\to3}2x+\lim_{x\to3}5=2\bullet\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}5=$$

$$=6+5=2\bullet3+5=11$$

Примеры вычисления пределов

***Пример 2.* Вычислить** $\lim\limits_{x\to(-2)}(x^2+2x-3)$

Решение.

$$\lim_{x\to(-2)}(x^2+2x-3)=\lim_{x\to(-2)}x^2+\lim_{x\to(-2)}2x-\lim_{x\to(-2)}3=$$

$$=\lim_{x\to(-2)}x^2+2\bullet\lim_{x\to(-2)}x-\lim_{x\to(-2)}3=$$

$$=(-2)^2+2\bullet(-2)-3=4-4-3=-3$$

***Пример 3.* Вычислить** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x}{2x-1}$

Решение.

$$\lim_{x\to3}\frac{3x}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to3}3x}{\lim\limits_{x\to3}(2x-1)}=\frac{3\bullet\lim\limits_{x\to3}x}{2\bullet\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}1}=$$

$$=\frac{3\bullet3}{2\bullet3-1}=1{,}8$$

Методика вычисления пределов в точке

Если же функция в точке x = a не существует, *в знаменателе дроби ноль,* то вычисляем значение числителя в этой точке.

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^3-x^2-4}=\infty$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^2-1}=\infty$$

3. $$\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}=\infty$$

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^3-x^2-4}$

Решение. **Подставим вместо *x* число 2 (т.к. *x*□*2*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^3-x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2-4)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3}{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4}=\frac{2^3}{2^3-2^2-4}=$$

$$=\frac{8}{8-4-4}=\frac{8}{0}=\infty$$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $$\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{x^2-1}$$

Решение. **Подставим вместо** ***x*** **число 2 (т.к.** ***x*□*2*****) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to1}\frac{5x}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}5x}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)}=$$

$$=\frac{5\bullet\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}1}=\frac{5\bullet1}{1^2-1}=$$

$$=\frac{5}{1-1}=\frac{5}{0}=\infty$$

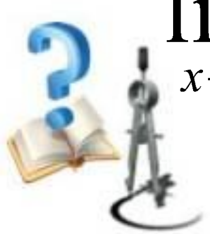
Примеры вычисления пределов

***Пример 3.* Вычислить** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x-3}$

***Решение.* Подставим вместо *x* число 3 (т.к. *x*□*з*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^3}{\lim\limits_{x \to 3}(x-3)} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} 2x}{\lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 3} =$$

$$= \frac{2 \bullet \lim\limits_{x \to 3} x}{\lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 3} = \frac{2 \bullet 3}{3-3} = \frac{6}{0} = \infty$$



Методика вычисления пределов в точке

- **Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.**

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

$\frac{0}{0}$

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

Решение. Выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+5)}{(x-3)} = \frac{6}{-4}$$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}$

Решение. Выяснили, что при x = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-7)}{(x+5)}=-\frac{5}{7}$$

Примеры вычисления пределов

Активно используйте формулы сокращенного умножения

Пример 3. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

Решение. **Выяснили, что при x = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, воспользуемся формулами сокращенного умножения**

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{6x^3-4x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{t^2+6t+9}{t^2+t-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5a^2+9a-2}{3a^2+5a-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

Ответы

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}=-\dfrac{5}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}=13$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3-2x^2}{6x^3-4x^2}=1$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{t^2+6t+9}{t^2+t-6}=0$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}=1\dfrac{3}{7}$

6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5a^2+9a-2}{3a^2+5a-2}=\dfrac{11}{7}$

7. $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}=-2$

8. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}=\dfrac{1}{5}$