

***ПРЕДЕЛ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ***



а) 1, 2, 3, ..., **n**, ...

б) 1, -1/2, 1/3, -1/4, ...,  $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

в) sin 1, sin 2, sin 3, ..., **sin n**, ...

Любое число в совокупности имеет номер в соответствии с тем местом, которое оно занимает и от него зависит.

Пример:  $n=12$

а)  $a_{12}=12$

б)  $b_{12}=-1/12$

в)  $c_{12}=\sin 12$



**ОПР.** Совокупность чисел, каждое из которых имеет свой номер  $n \in \mathbb{N}$  и от него зависит, называется **числовой последовательностью**.

$$X_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$a_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$



Задать числовую  
последовательность, значит **указать**  
как отыскивается любой ее член,  
если известен **номер** занимаемого  
им места.

1. Описание

$(x_n)$ -последовательность приближенных  
значений  $\sqrt{2}$  с недостатком с точностью до  
0,1; 0,01; 0,001...

$$\sqrt{2}=1,1421356\dots$$



$$(x_n)=\{1,1; 1,14; 1,142; 1,1421;\dots\}$$

## 2. Формула n-го члена.

Формула, позволяющая найти любой член последовательности по его номеру

*Назовите первые 5 членов последовательности  $(X_n) = n^2$*



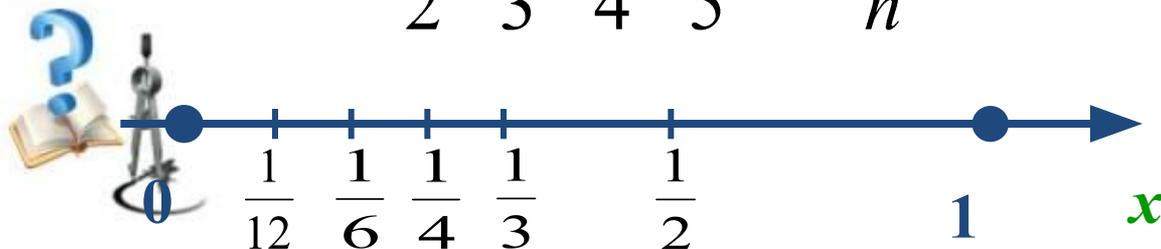
# Понятие сходящейся последовательности

Обратим внимание, что члены последовательности  $(x_n)$  как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности  $(y_n)$  такой точки нет. В подобных случаях говорят, что последовательность  $(x_n)$  сходится, а последовательность  $(y_n)$  расходится.

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots;$$



$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$



# Понятие сходящейся последовательности

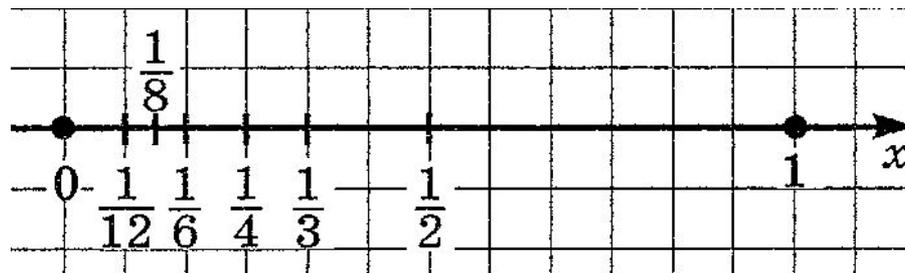
$(y_n)$ : 1, 3, 5, 7, ...,  $(2n-1)$ , ...     $(x_n)$ : 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, ... 1/n, ...



Нет точки сгущения

Последовательность

расходится



Точка сгущения – 0

Последовательность

сходится



Чтобы узнать является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности, введем следующее понятие.

# Окрестность точки

Определение 1. Пусть  $a$  – точка прямой, а  $r$  – положительное число. Интервал  $(a - r; a + r)$  называют окрестностью точки  $a$ , а число  $r$  – радиусом окрестности.



Пример.  $(3,97; 4,03)$  – окрестность точки  $4$ , радиус равен  $0,03$ .



В математике «точку сгущения» для членов заданной последовательности называют **пределом последовательности**.

**Определение 2.** Число  $b$  называют пределом последовательности  $(y_n)$ , если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

**Обозначение:** 1. ( $y_n$  стремится к  $b$  или  $y_n$  сходится к  $b$ );

$$y_n \rightarrow b$$

2. (предел последовательности  $y_n$  при стремлении  $n$

к бесконечности равен  $b$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$



# Формулы

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$

$n \rightarrow \infty$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , если  $0 < |q| < 1$

$n \rightarrow \infty$

Если  $q > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  не существует.

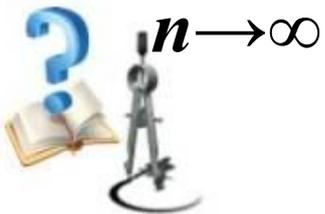
$n \rightarrow \infty$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$

$n \rightarrow \infty$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (k/n^m) = 0$

$n \rightarrow \infty$



# Предел последовательности

Построим графики последовательностей:

$$y_n = \frac{1}{n},$$

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$y_n = \frac{2n}{n+1}.$$



$$y_n = \frac{1}{n}$$

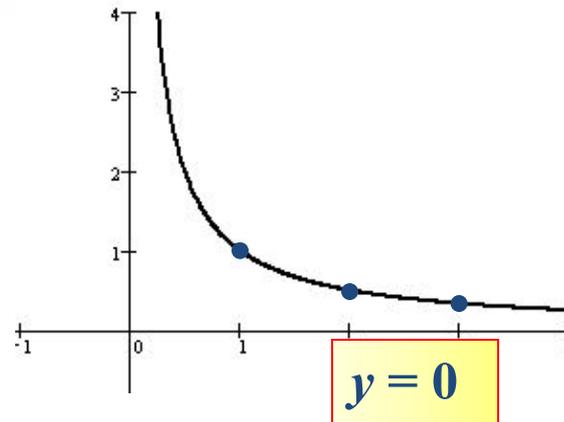


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

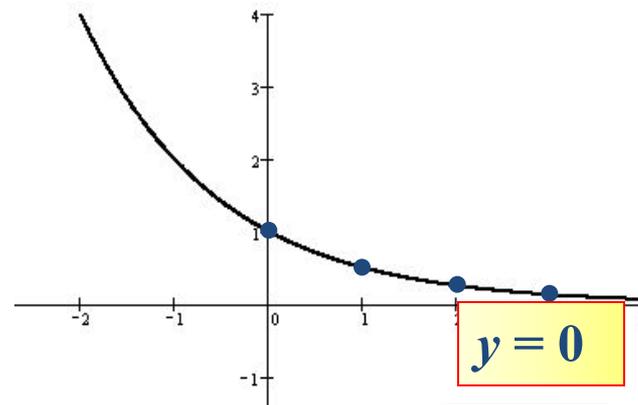


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

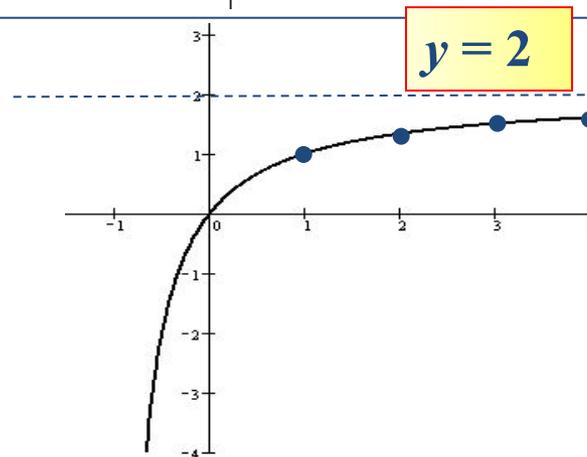


Рис. 3



## Асимптоты графика

Обратите внимание, что на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к **некоторой горизонтальной прямой:**

- на рис 1 – к прямой  $y = 0$ ,
- на рис 2 – к прямой  $y = 0$ ,
- на рис 3 – к прямой  $y = 2$ .

Каждую из этих прямых называют

**горизонтальной асимптотой графика.**



# Асимптоты графика

Вообще равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$

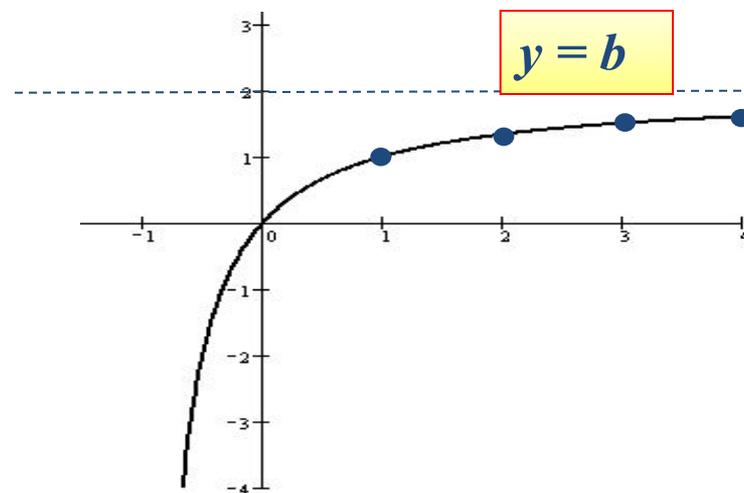
означает, что прямая  $y = a$

является горизонтальной асимптотой

графика последовательности,  $y_n = f(n)$

т.е. графика функции

$y = f(x), x \in N.$



## Свойства

- Если последовательность сходится,  
**то только к одному пределу.**
- Если последовательность сходится,  
**то она ограничена.**

Обратное—неверно:  $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ —  
ограниченная последовательность,  
но она не сходится

### ● Теорема Вейерштрасса



Если последовательность монотонна  
и ограничена, **то она сходится.**



- **Карл Теодор Вейерштрасс-выдающийся немецкий математик, отец «современного анализа»**

- **1815-1897 г.**

- **Кратер на Луне**

*Weierstrass*



# Свойства вычисления пределов

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ , то

1) Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b + c$$

2) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \cdot c$$

3) Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n : y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b : c$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k \cdot b$$

## Примеры вычисления пределов

*Пример 1.* Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x}$

*Решение.* Делим числитель и знаменатель дроби **почленно** на **наивысшую** из имеющихся степень переменной  $x$ , т.е. на  $x^5$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} - \frac{3x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} + \frac{2x}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

## Примеры вычисления пределов

**Пример 2. Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2}$

**Решение.** Делим числитель и знаменатель

дроби **почленно** на **наивысшую** из имеющихся степень переменной  $x$  т.е. на  $x^4$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{5x}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0}{2 - 0 + 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

## Примеры вычисления пределов

Пример 3. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x}$

**Решение.** Делим числитель и знаменатель дроби почленно на **наивысшую** из имеющихся степень переменной  $x$ , т.е. на  $x^6$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^6}{x^6} - \frac{x^2}{x^6} + \frac{i}{x^6}}{\frac{x^4}{x^6} + \frac{2x^3}{x^6} + \frac{x}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^4} + \frac{i}{x^6}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x^4} + \frac{i}{x^6} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i}{x^6}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}} = \\ &= \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 + 0} = \frac{2}{0} = (\text{не существует}) = \infty \end{aligned}$$

## Правила вычисления пределов

**1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = 2$$



## Правила вычисления пределов

**2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = 0$$



## Правила вычисления пределов

**3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} = \infty$$



**Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности:**

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x + 2}{5x^2 + 3x + 1} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 3x + 7} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x^2 + 7}{x^2 + 4x + 3} = \infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x^3 + x + 13} = \frac{6}{2} = 3$$



# Методика вычисления пределов в точке

Если функция существует в точке  $x = a$ , то ее предел равен  $f(a)$ .

## Примеры вычисления пределов

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5)$

**Решение.** Подставим вместо  $x$  число 3 (т.к.  $x \neq 3$ ) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = \\ &= 6 + 5 = 2 \cdot 3 + 5 = 11 \end{aligned}$$



## Примеры вычисления пределов

**Пример 2. Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2x - 3)$

**Решение.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2x - 3) &= \lim_{x \rightarrow (-2)} x^2 + \lim_{x \rightarrow (-2)} 2x - \lim_{x \rightarrow (-2)} 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)} x^2 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow (-2)} x - \lim_{x \rightarrow (-2)} 3 = \\ &= (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3\end{aligned}$$

**Пример 3. Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{2x - 1}$

**Решение.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{2x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 3x}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)} = \frac{3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x}{2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 1} = \\ &= \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 1} = 1,8\end{aligned}$$

# Методика вычисления пределов в точке

Если же функция в точке  $x = a$  не существует, в знаменателе дроби ноль, то вычисляем значение числителя в этой точке.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x - 3} = \infty$$



## Примеры вычисления пределов

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4}$

**Решение.** Подставим вместо  $x$  число  $2$  (т.к.  $x \rightarrow 2$ ) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3}{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4} = \frac{2^3}{2^3 - 2^2 - 4} = \\ &= \frac{8}{8 - 4 - 4} = \frac{8}{0} = \infty \end{aligned}$$



## Примеры вычисления пределов

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 1}{x^2 - 1}$

**Решение.** Подставим вместо  $x$  число 2 (т.к.  $x \neq 2$ ) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x^2 - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5x}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)} = \\ &= \frac{5 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{5 \cdot 1}{1^2 - 1} = \\ &= \frac{5}{1 - 1} = \frac{5}{0} = \infty \end{aligned}$$

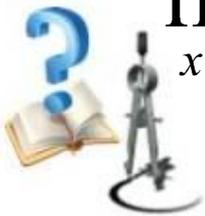


## Примеры вычисления пределов

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3}$

**Решение.** Подставим вместо  $x$  число 3 (т.к.  $x \neq 3$ ) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^3}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2x}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \\ &= \frac{2 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} x}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \frac{2 \bullet 3}{3 - 3} = \frac{6}{0} = \infty \end{aligned}$$



# Методика вычисления пределов в точке

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при  $x = a$ , то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель  $(x - a)$ , на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

## Примеры вычисления пределов

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

**Решение.** Выяснили, что при  $x = 1$  и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители  $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 5)}{(x - 3)} = \frac{6}{-4}$$



## Примеры вычисления пределов

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10}$

**Решение.** Выяснили, что при  $x = 2$  и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители  $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 7)}{(x - 2)(x + 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 7)}{(x + 5)} = -\frac{5}{7}$$



## Примеры вычисления пределов

*Активно используйте формулы сокращенного умножения*

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

**Решение.** Выяснили, что при  $x = 2$  и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , воспользуемся формулами сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



Следующие пределы вычислите  
самостоятельно

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^3 - 4x^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$



# ОТВЕТЫ

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5} = -\frac{5}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3} = 13$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^3 - 4x^2} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3} = 1\frac{3}{7}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2} = \frac{11}{7}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2} = -2$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25} = \frac{1}{5}$$

