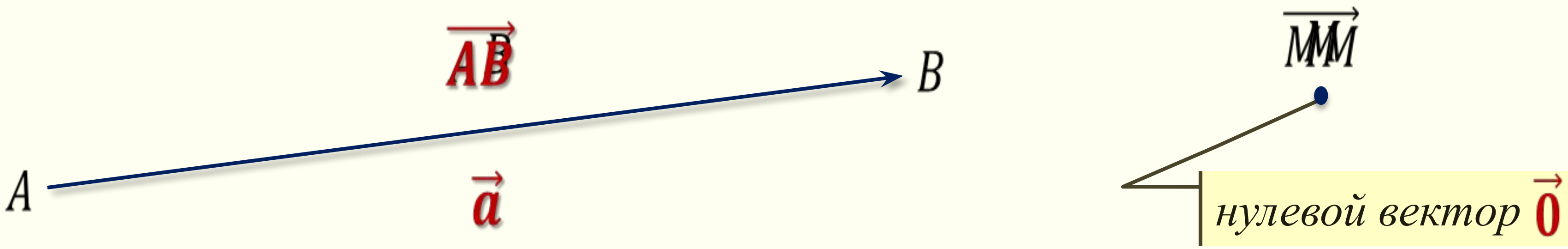
Векторы

Вектор — направленный отрезок



Длина ненулевого вектора равна длине отрезка

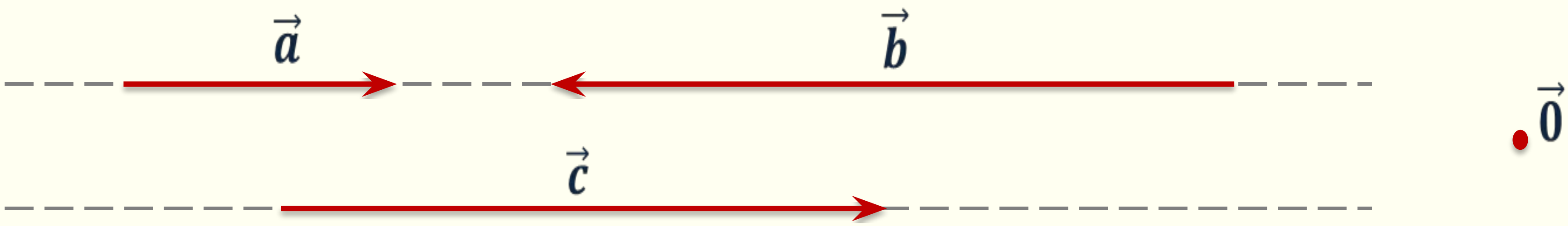
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$$

Длина нулевого вектора равна 0

$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

Коллинеарные векторы — ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору



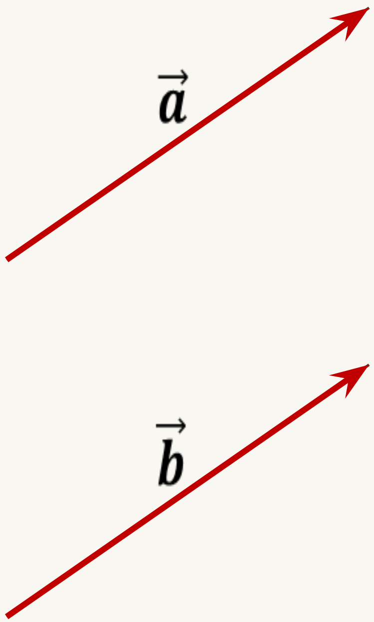
Коллинеарные векторы, имеющие **одинаковые** направления, называют **сонаправленными**

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$ $\vec{0}\uparrow\uparrow\vec{a}$ $\vec{0}\uparrow\uparrow\vec{b}$ $\vec{0}\uparrow\uparrow\vec{c}$

Коллинеарные векторы, имеющие **противоположные** направления, называют **противоположно направленными**

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$

Равные векторы

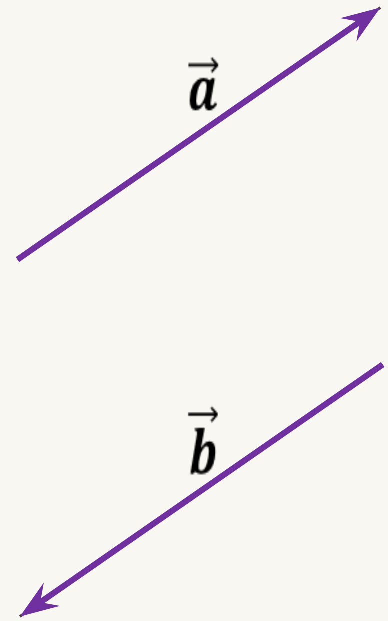


$$\vec{a} = \vec{b}$$

1. $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

сонаправленные векторы,
длины которых равны

Противоположные векторы



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

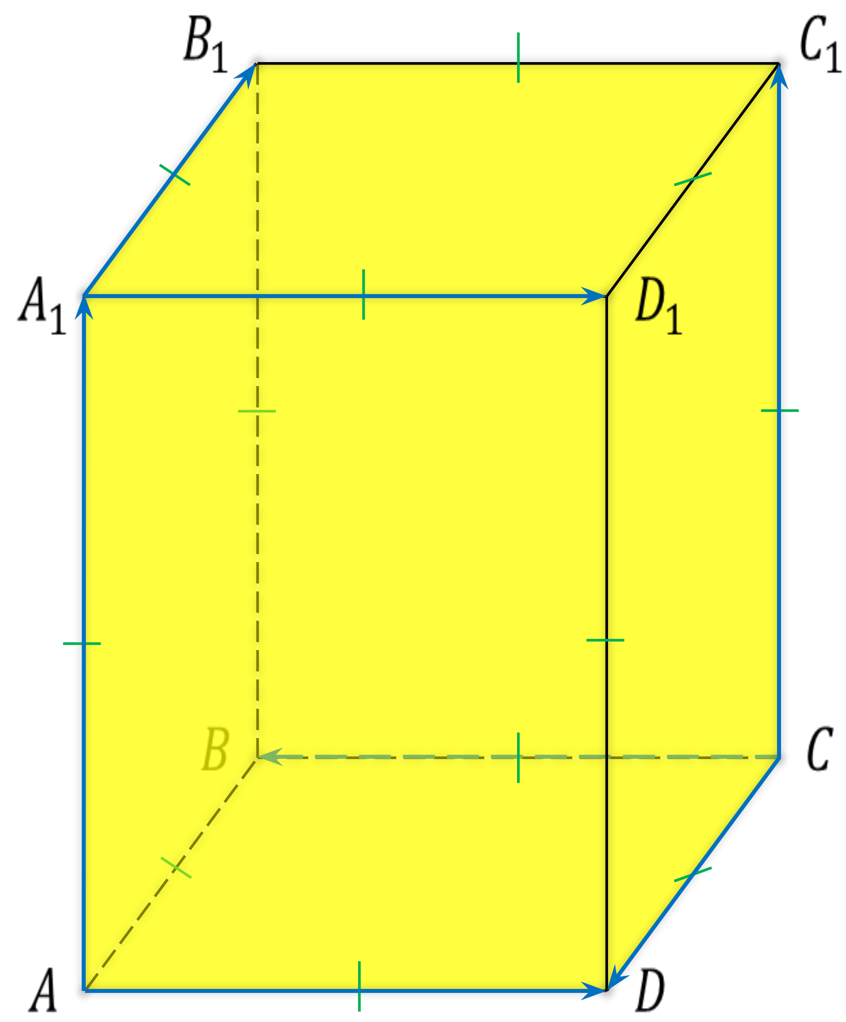
1. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

противоположно направленные векторы,
длины которых равны

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Равные векторы:

Противоположные векторы:



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Равные векторы:

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$

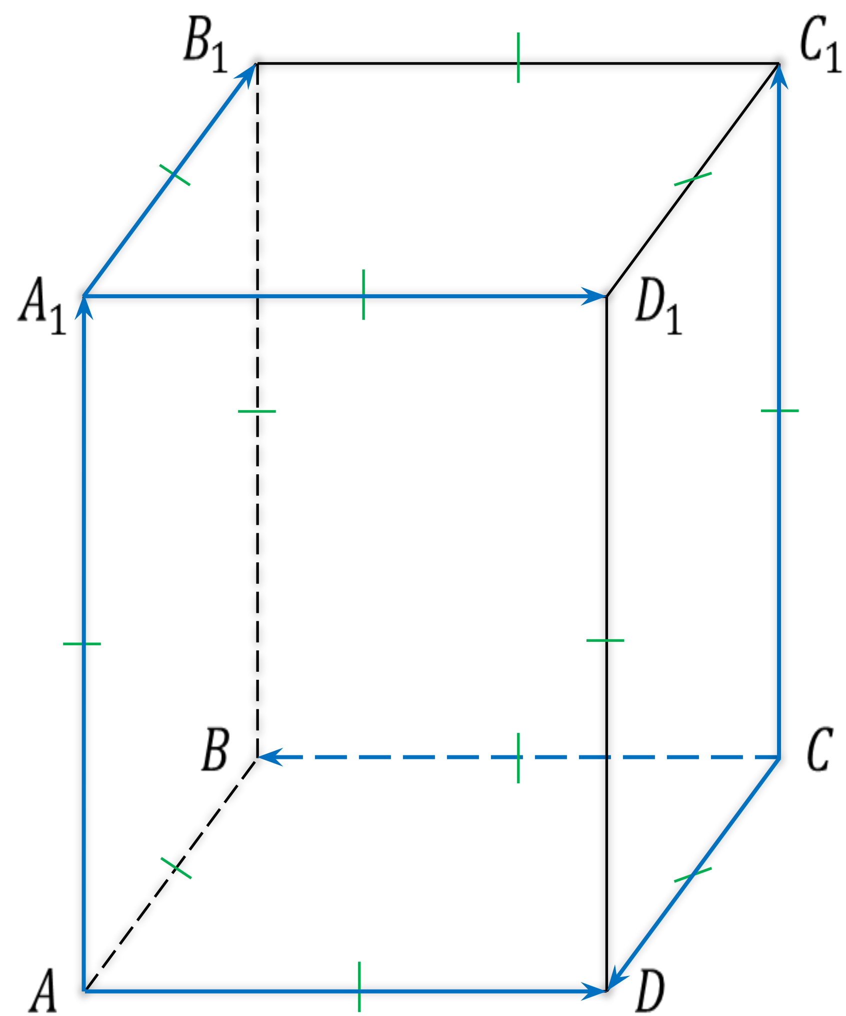
$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD}$

Противоположные векторы:

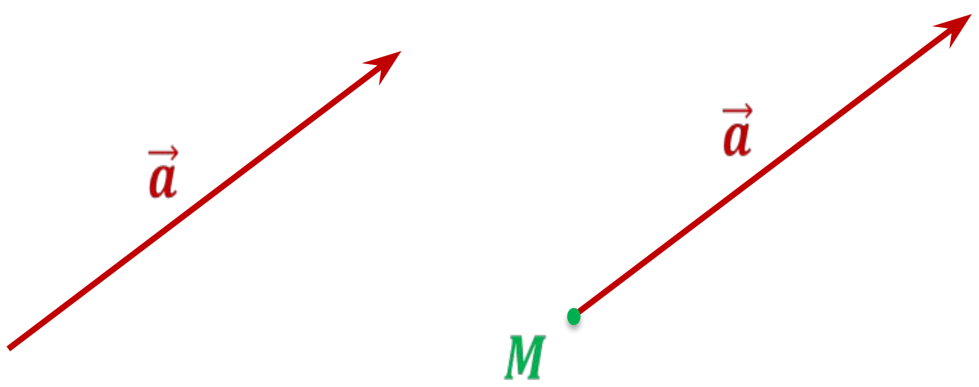
$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$

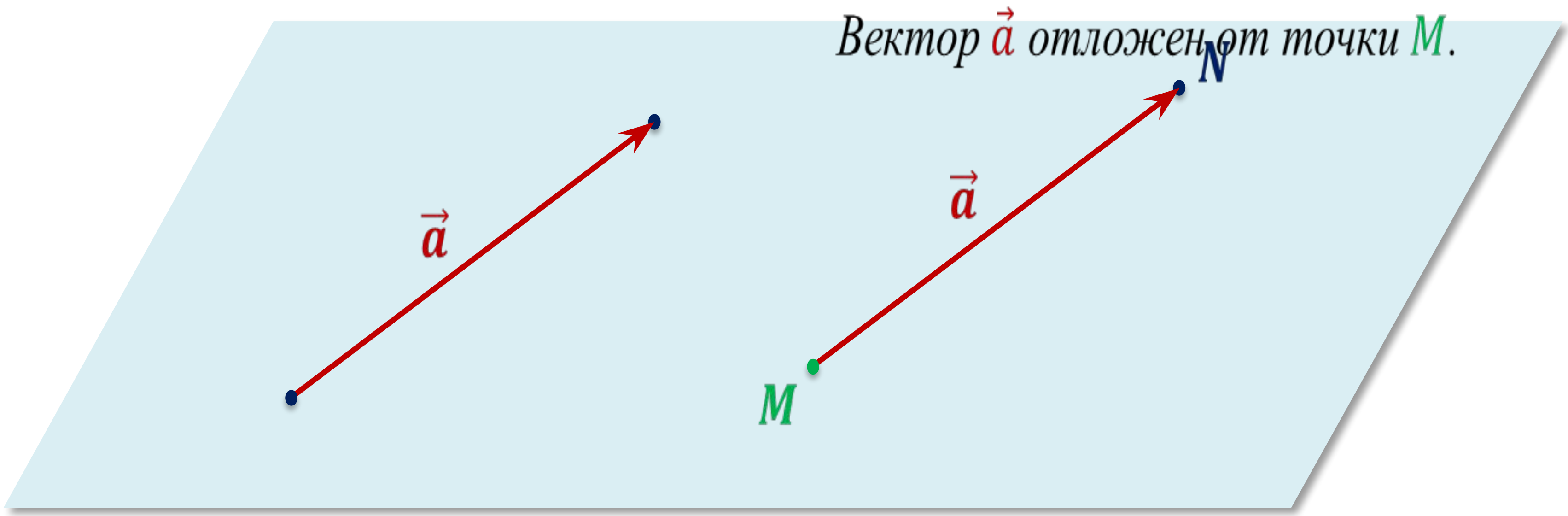
$\overrightarrow{A_1D_1} = -\overrightarrow{CB}$



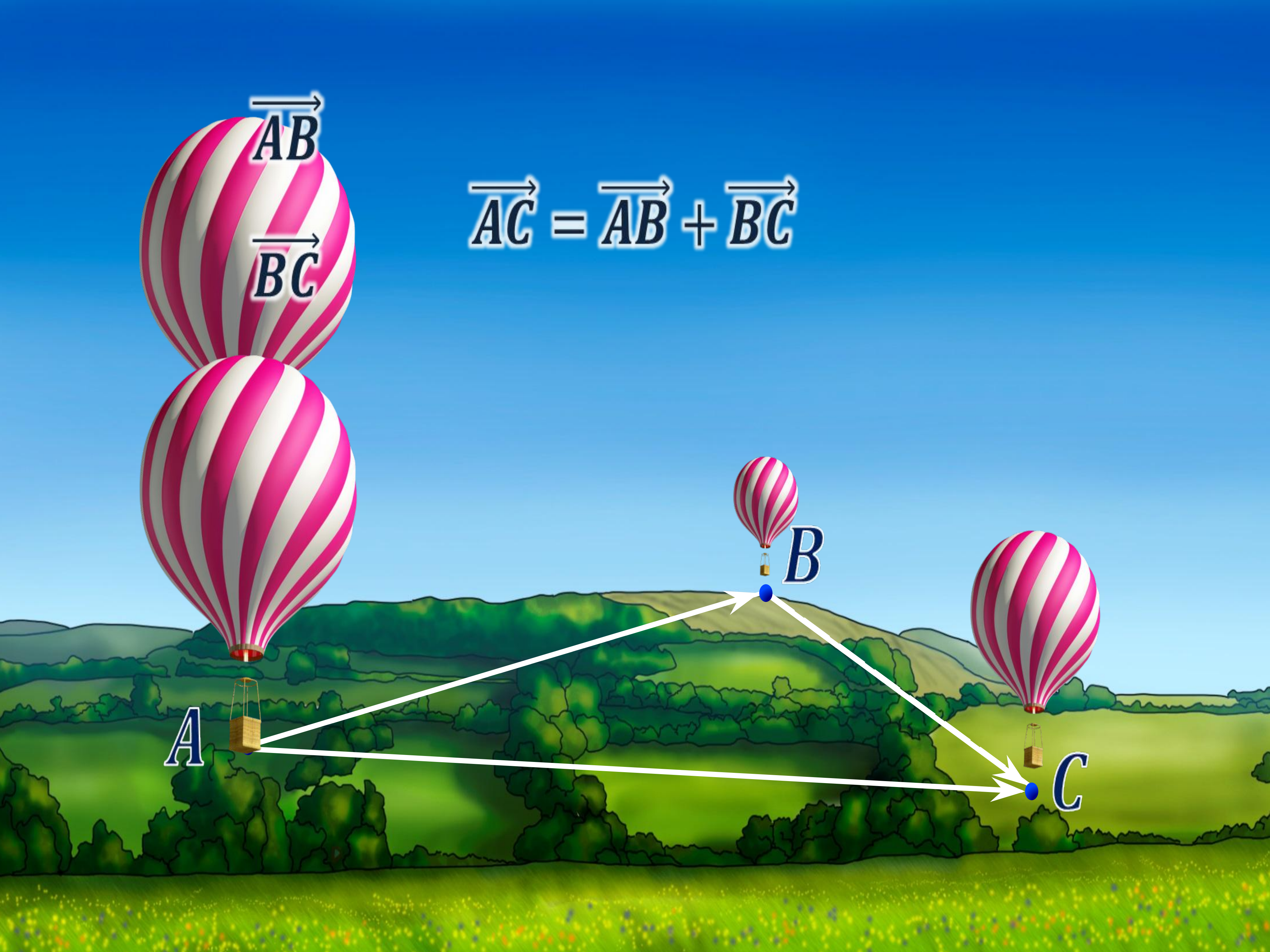
От любой точки M **плоскости** можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



От любой точки M **пространства** можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



Сложение и вычитание векторов

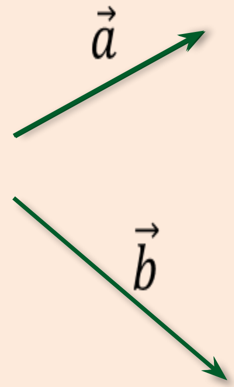

$\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
B
A
C

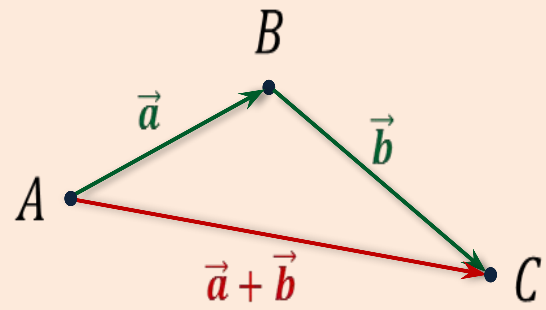
Правило треугольника

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

3. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$





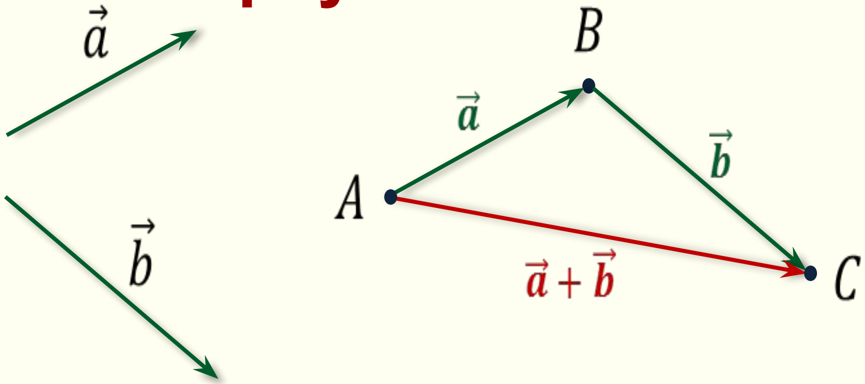
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$$

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

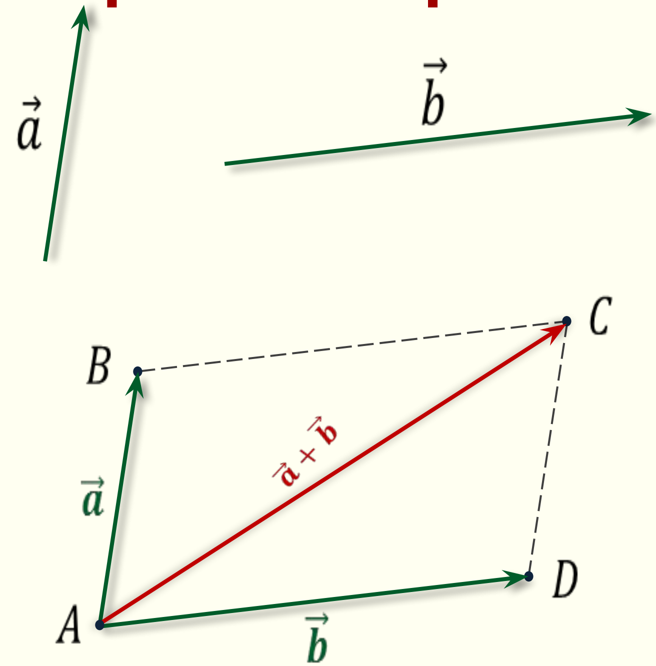
$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$$

Правило треугольника



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма



Законы сложения векторов

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

переместительный

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

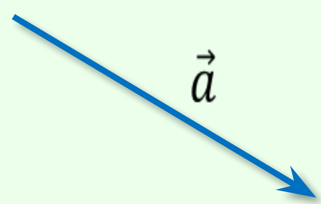
сочетательный

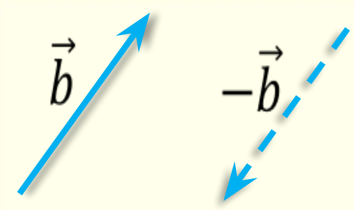
Разность векторов

$\vec{a} - \vec{b}$

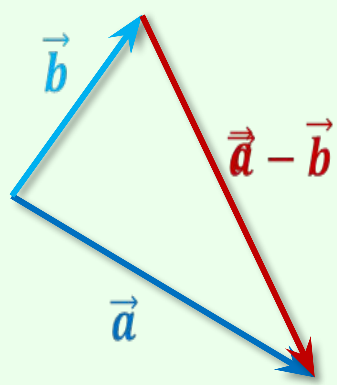
$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

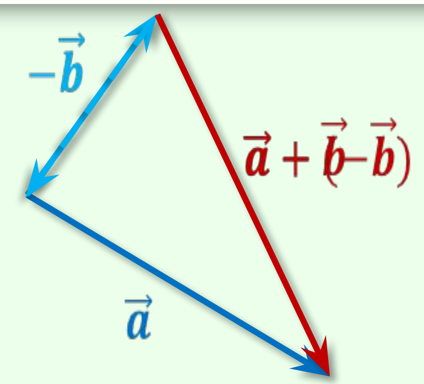




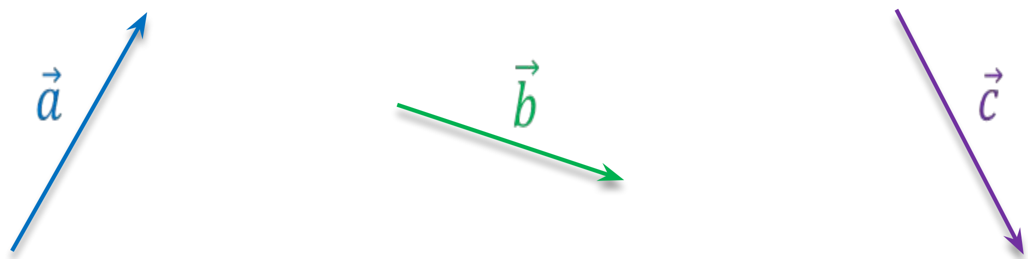
противоположные
векторы



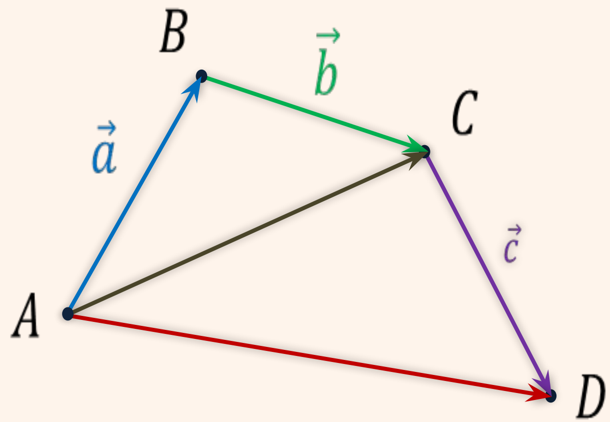
$\vec{a} - \vec{b}$



Сумма
нескольких векторов



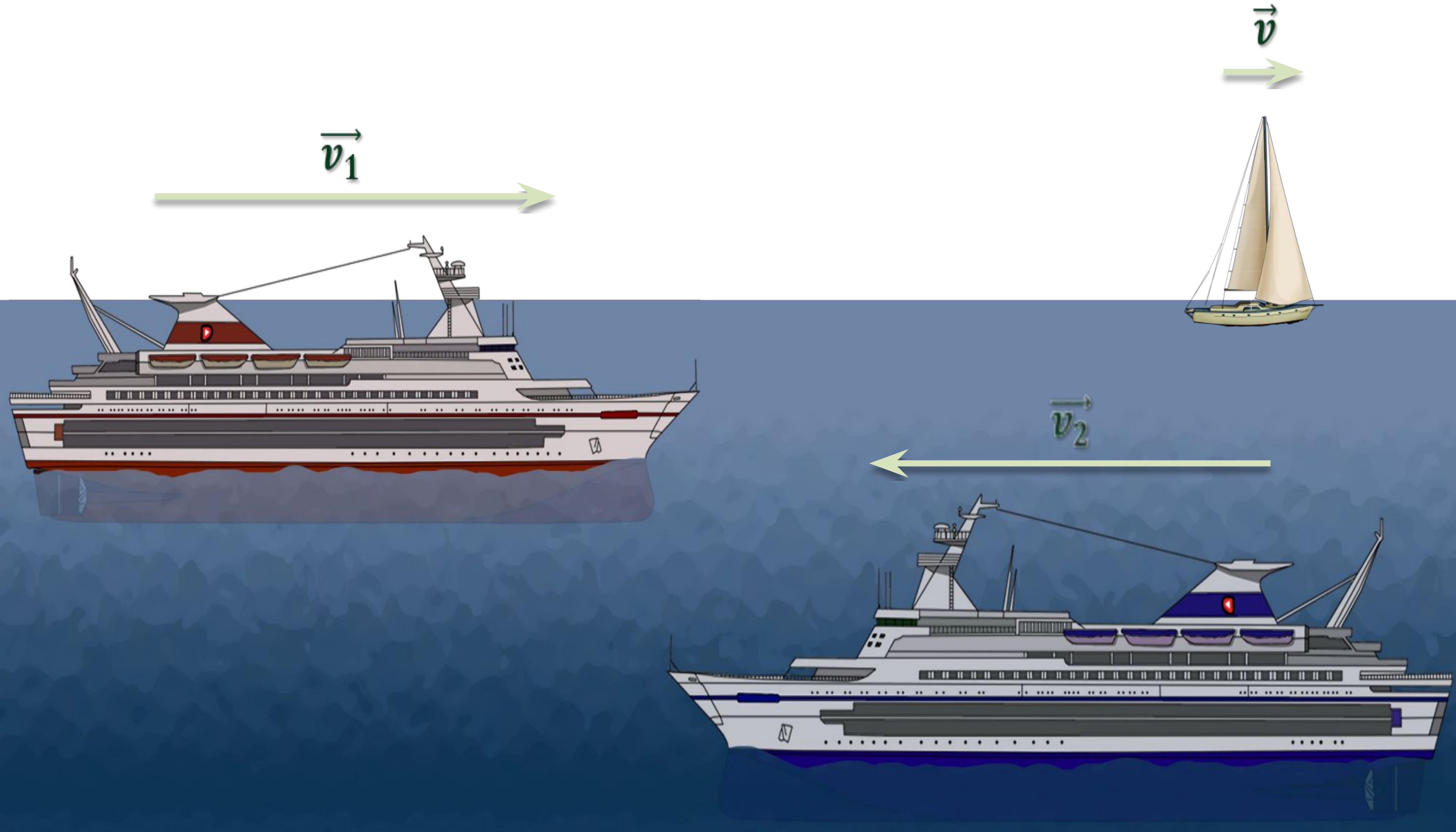
Правило многоугольника



1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
3. $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$
4. $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Умножение вектора на число

$\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{v_1} = 5\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{v_2} = -5\vec{v}$



Определение. **Произведением** ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

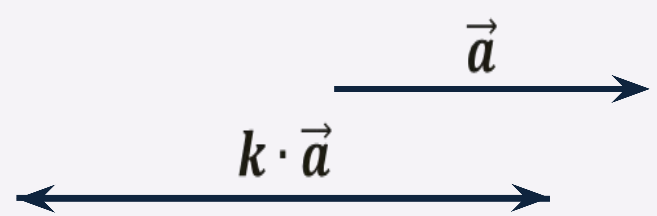
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

Следствия

1. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

2. $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ – коллинеарны



Свойства произведения вектора на число

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$

сочетательный закон

2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

1-ый распределительный закон

3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

2-ой распределительный закон

позволяют выполнять преобразования в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, так же, как и в числовых выражениях

а) $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m} =$

$= 2\vec{m} + 2\vec{n} - 12\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{m} = 5\vec{n} - 9\vec{m}$

б) $\vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m}) =$

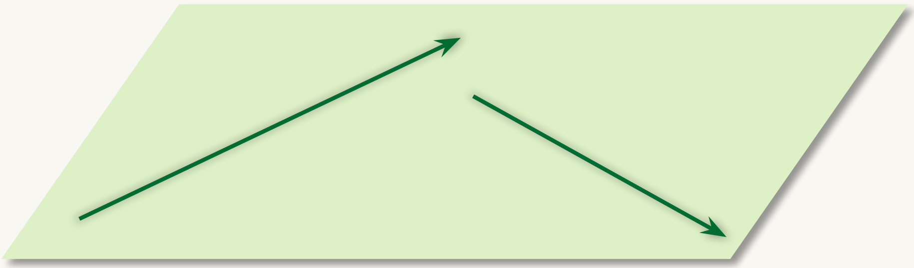
$= \vec{m} - 3\vec{n} + 6\vec{m} - 3\vec{p} + 5\vec{p} - 20\vec{m} =$

$= -13\vec{m} - 3\vec{n} + 2\vec{p}$

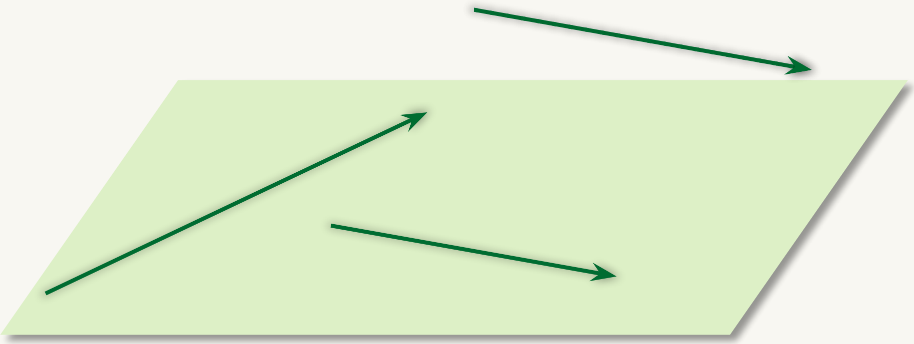
Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут **лежать в одной плоскости**

Векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, **лежащие в одной плоскости**



Любые **2** вектора являются **компланарными**



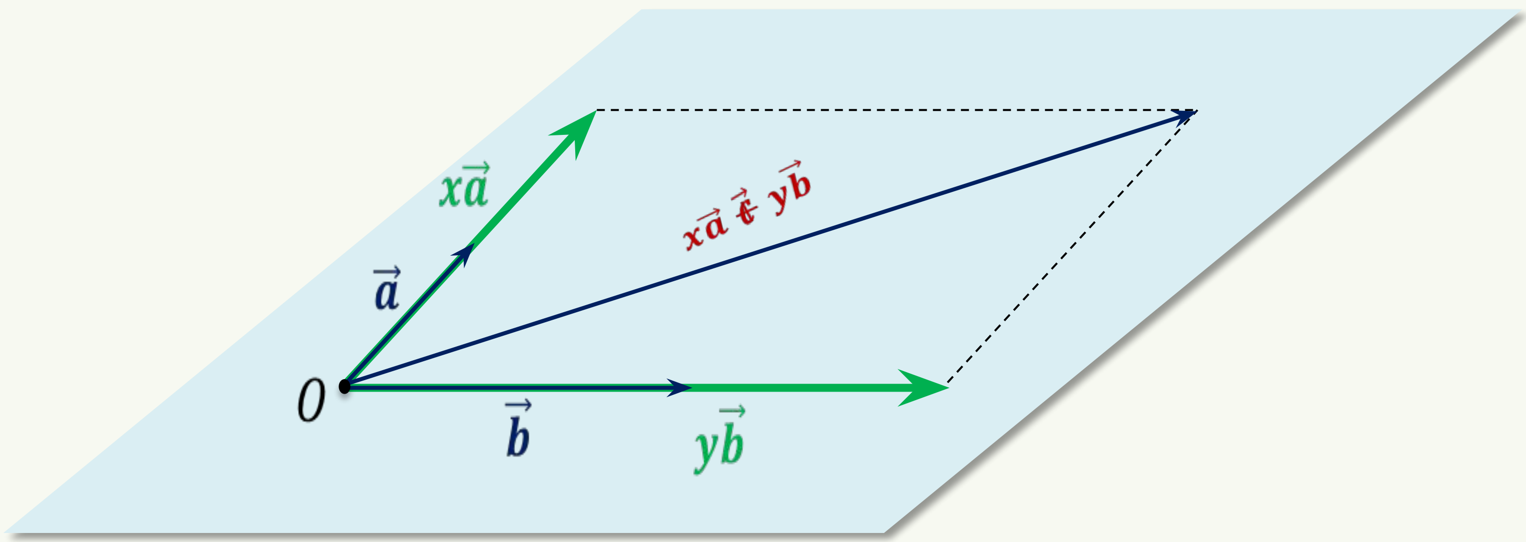
3 вектора являются **компланарными**, если среди них есть пара коллинеарных векторов

Теорема. (признак компланарности трёх векторов)

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$,

то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ <u>компланарны</u>.

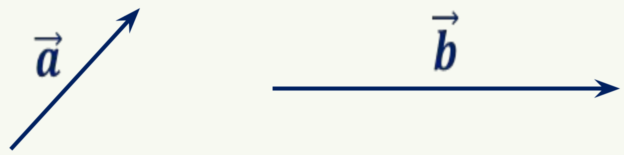
Доказательство

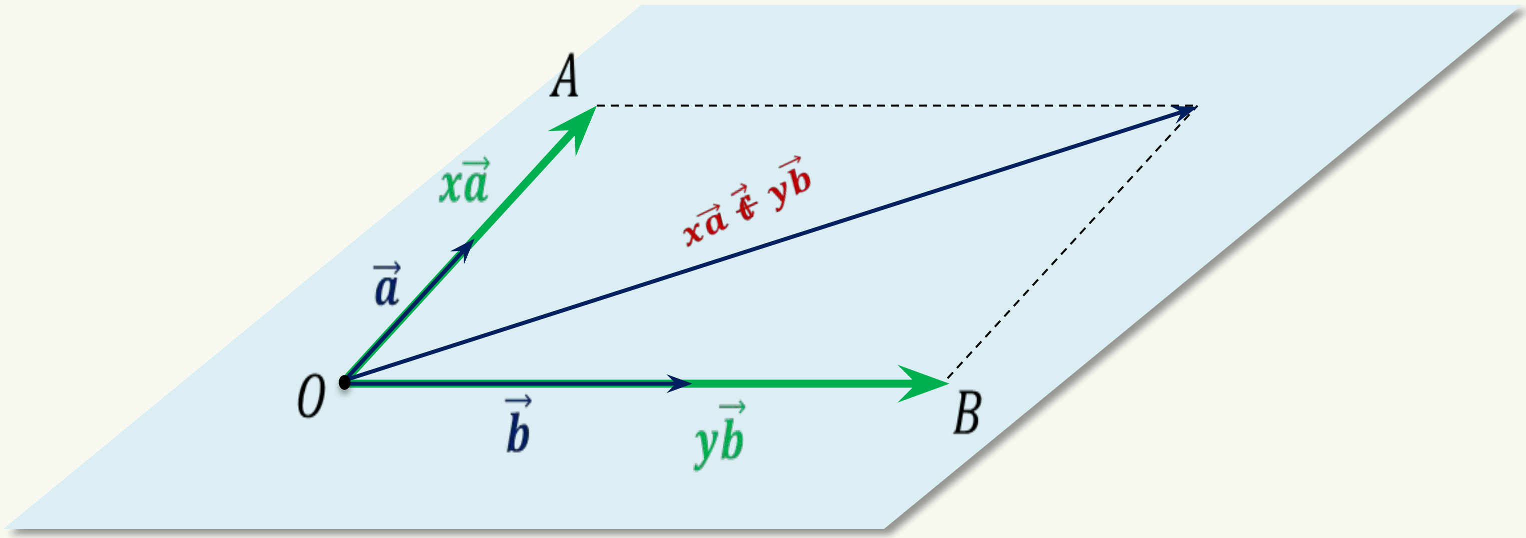


Теорема. (свойство трёх компланарных векторов)

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ <u>компланарны</u> ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$),
то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$.

Доказательство.





Правило параллелепипеда

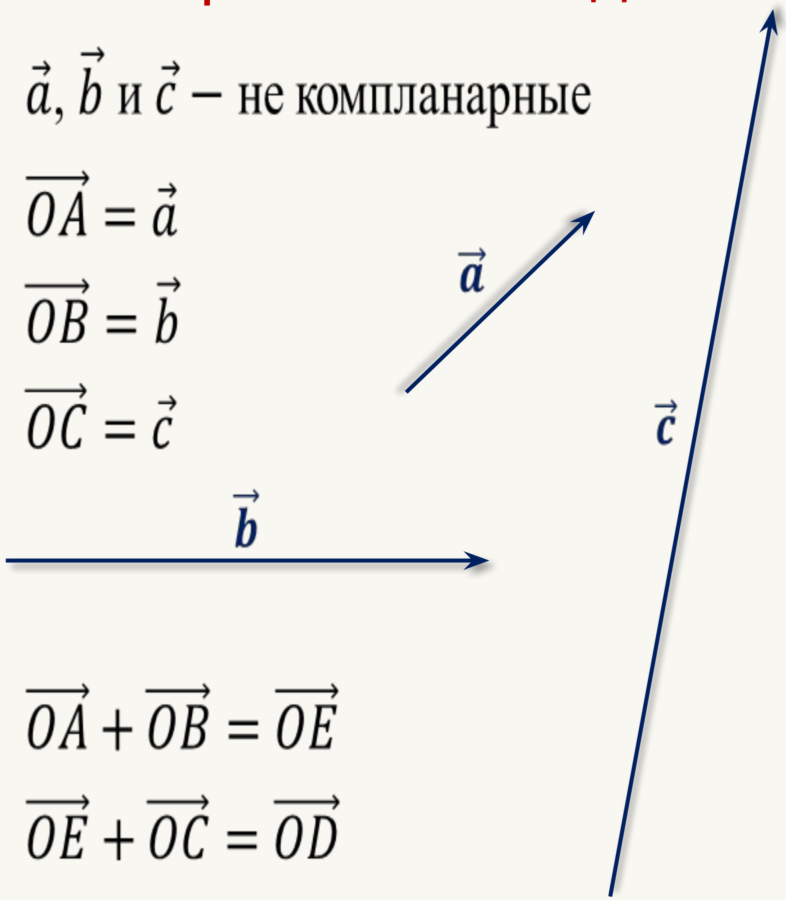
Правило параллелепипеда

$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – не компланарные

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

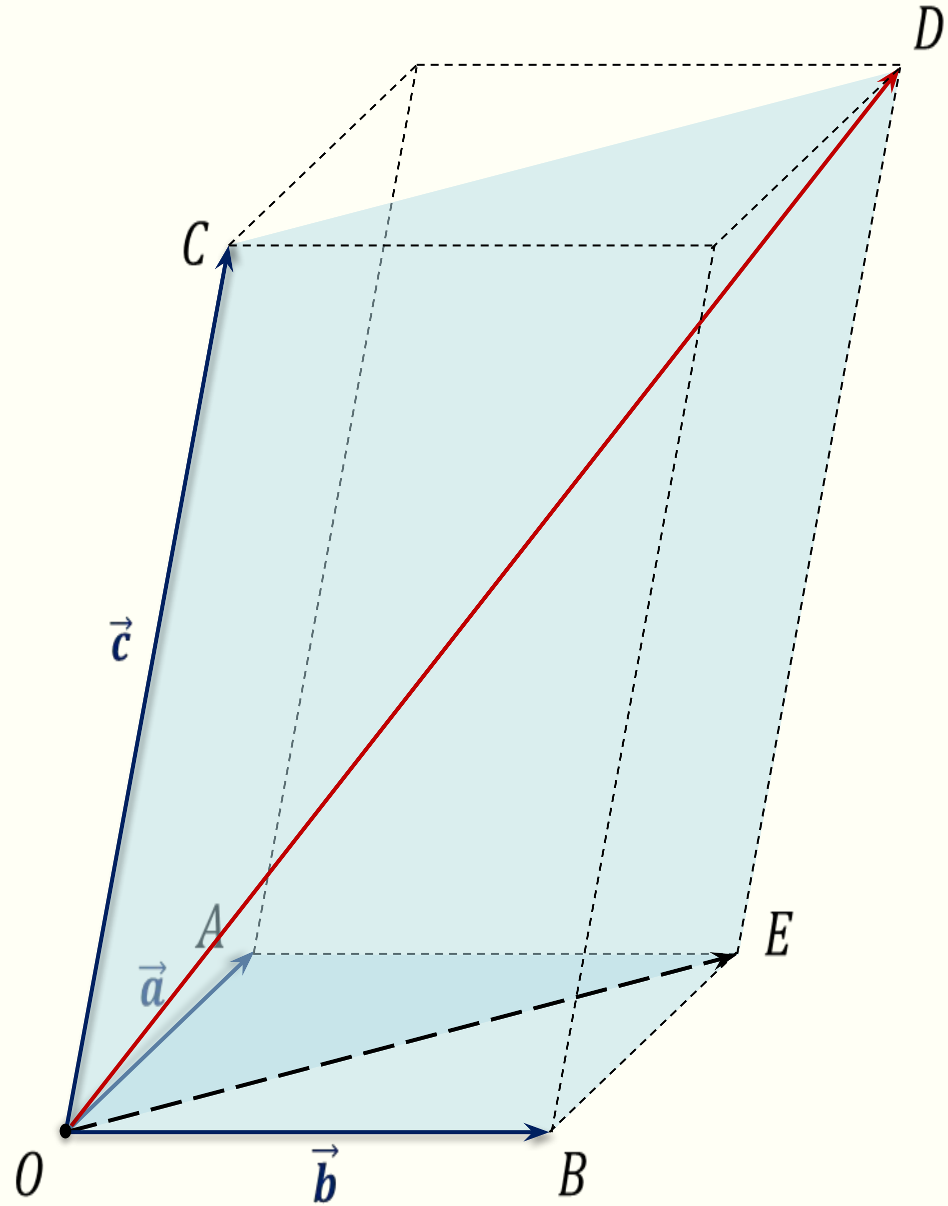


$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

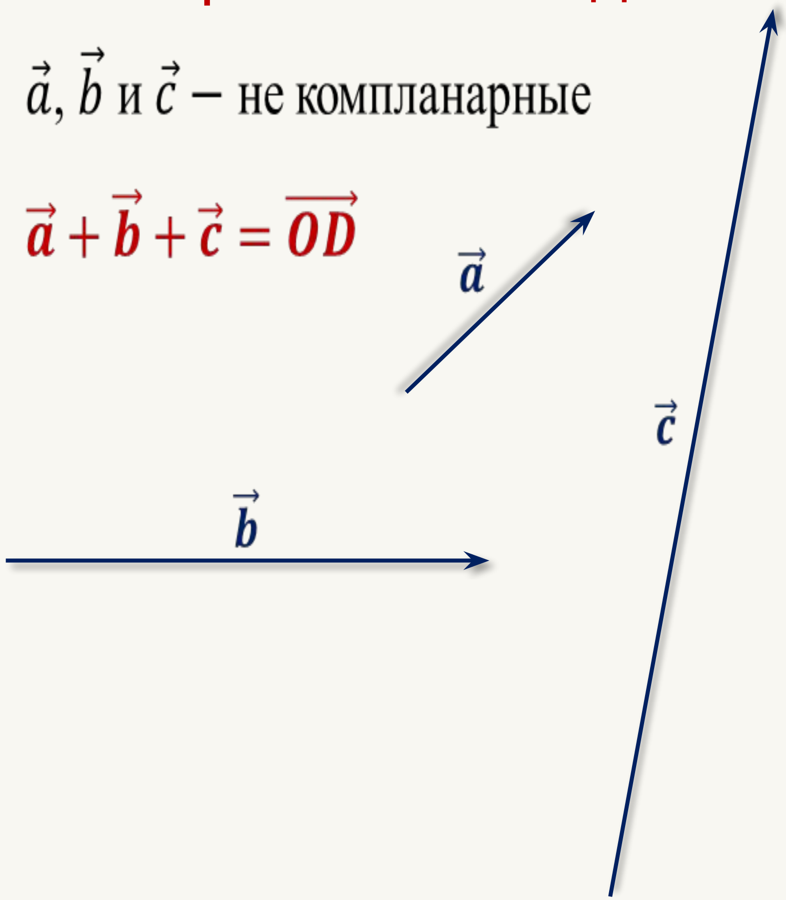
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}$

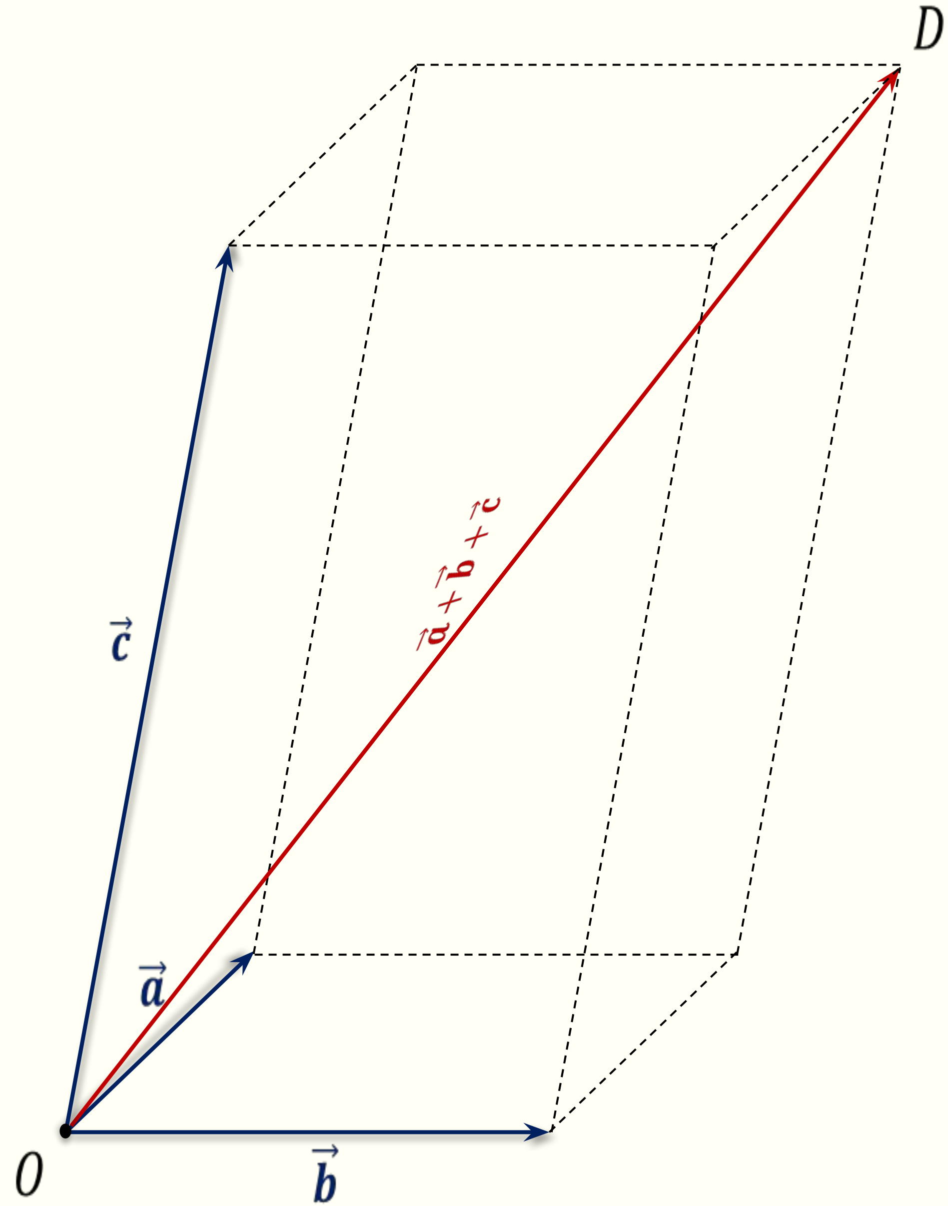


Правило параллелепипеда

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – не компланарные

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}$



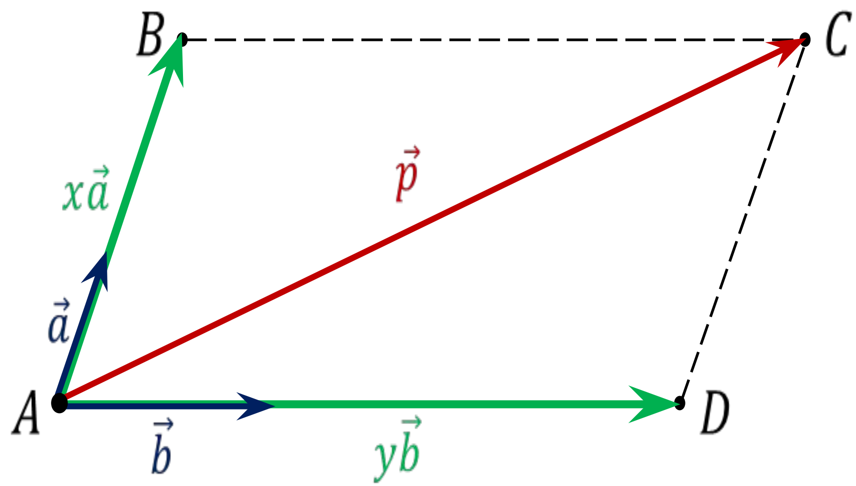


Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Вектор $\vec{p}$ разложен по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

x, y – коэффициенты разложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом

Прямоугольная система координат в пространстве

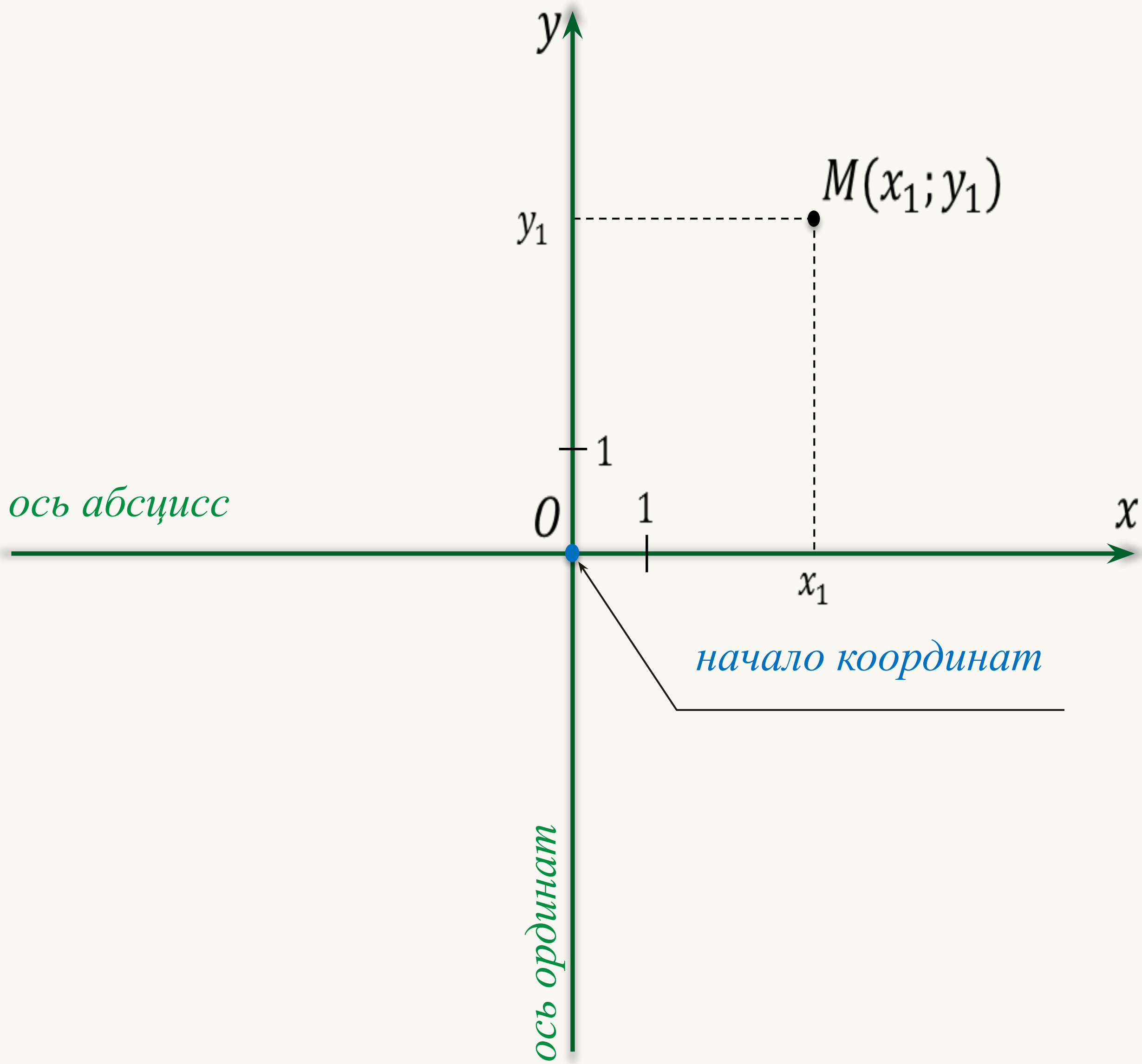
Рене Декарт

Французский философ, математик, механик, физик и физиолог

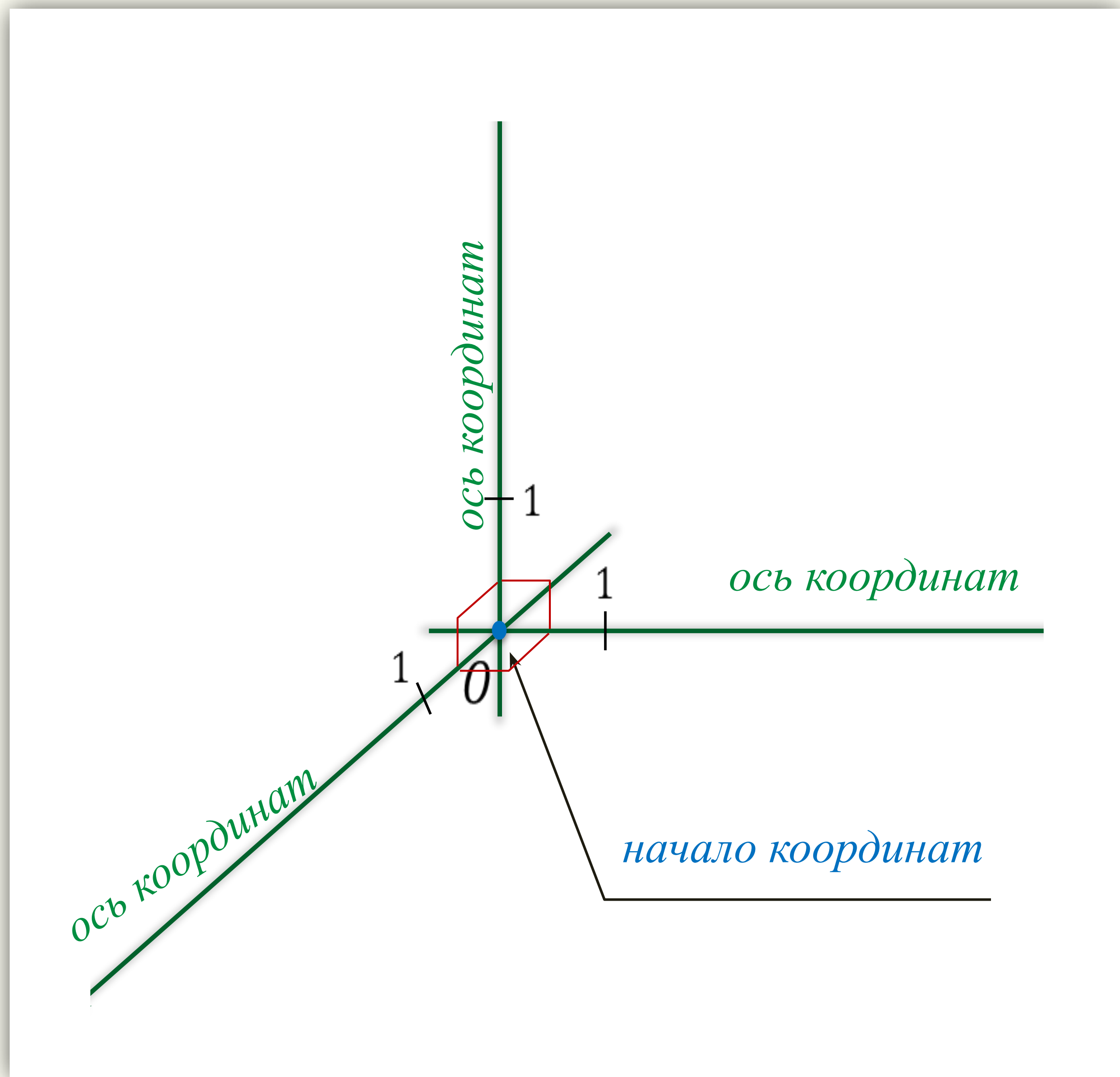
Создатель **аналитическо й геометрии** и современной алгебраической символик и

1596 - 1650

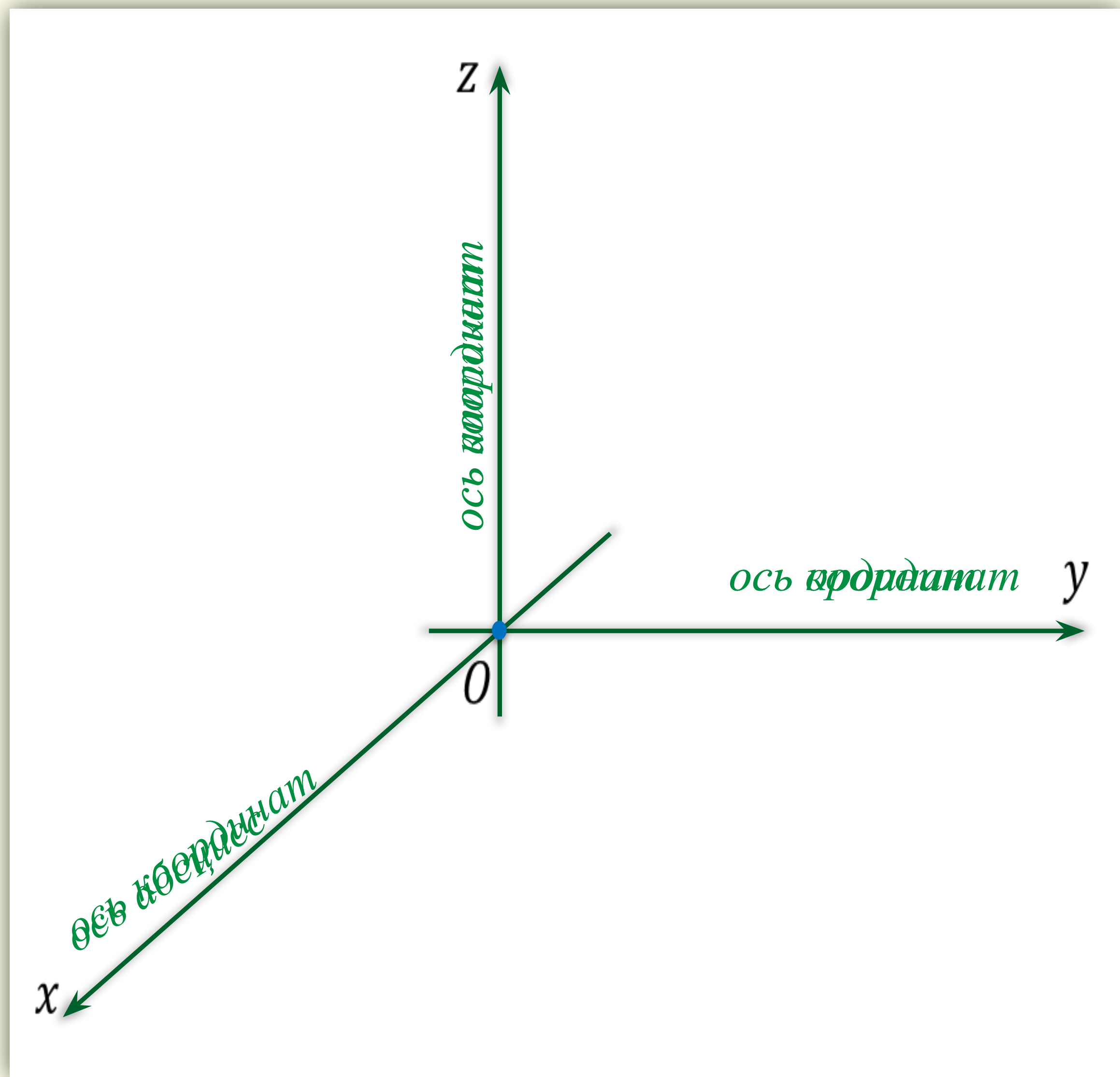
Декартова прямоугольная система координат на плоскости



Декартова прямоугольная система координат в пространстве



Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



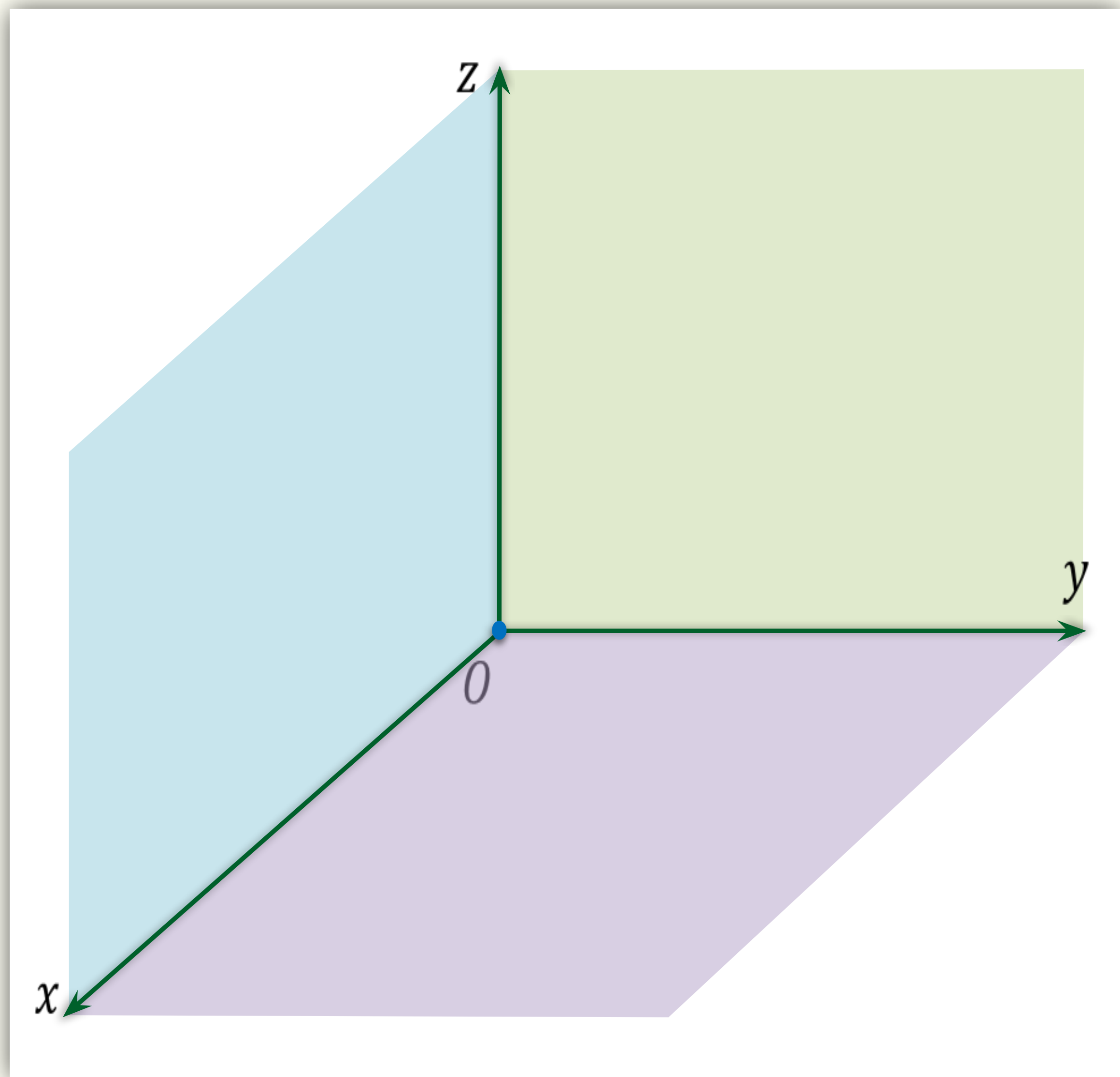
Координатные оси:

$0x$

$0y$

$0z$

Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



Координатные оси:

$0x$ – ось абсцисс

$0y$ – ось ординат

$0z$ – ось аппликат

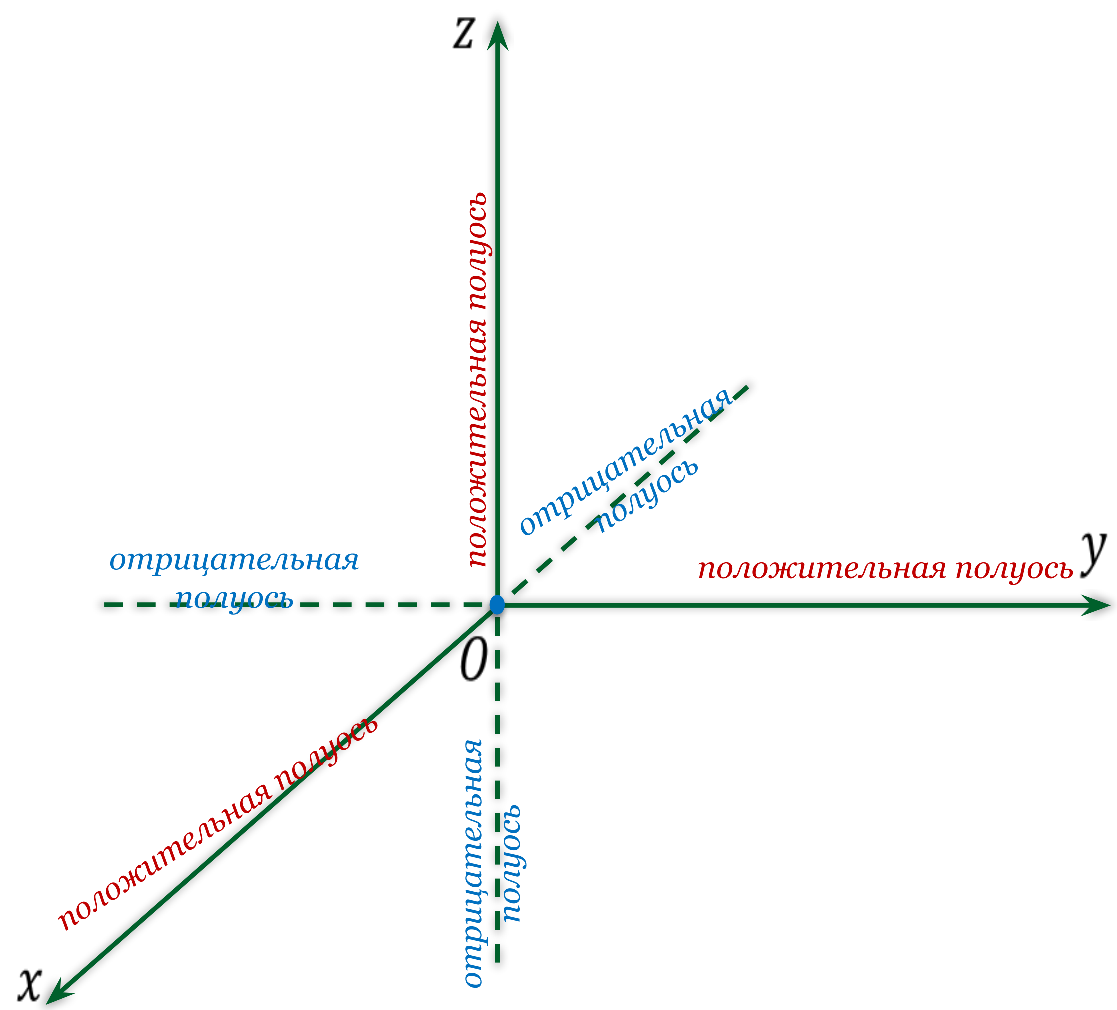
Координатные плоскости:

$0xy$

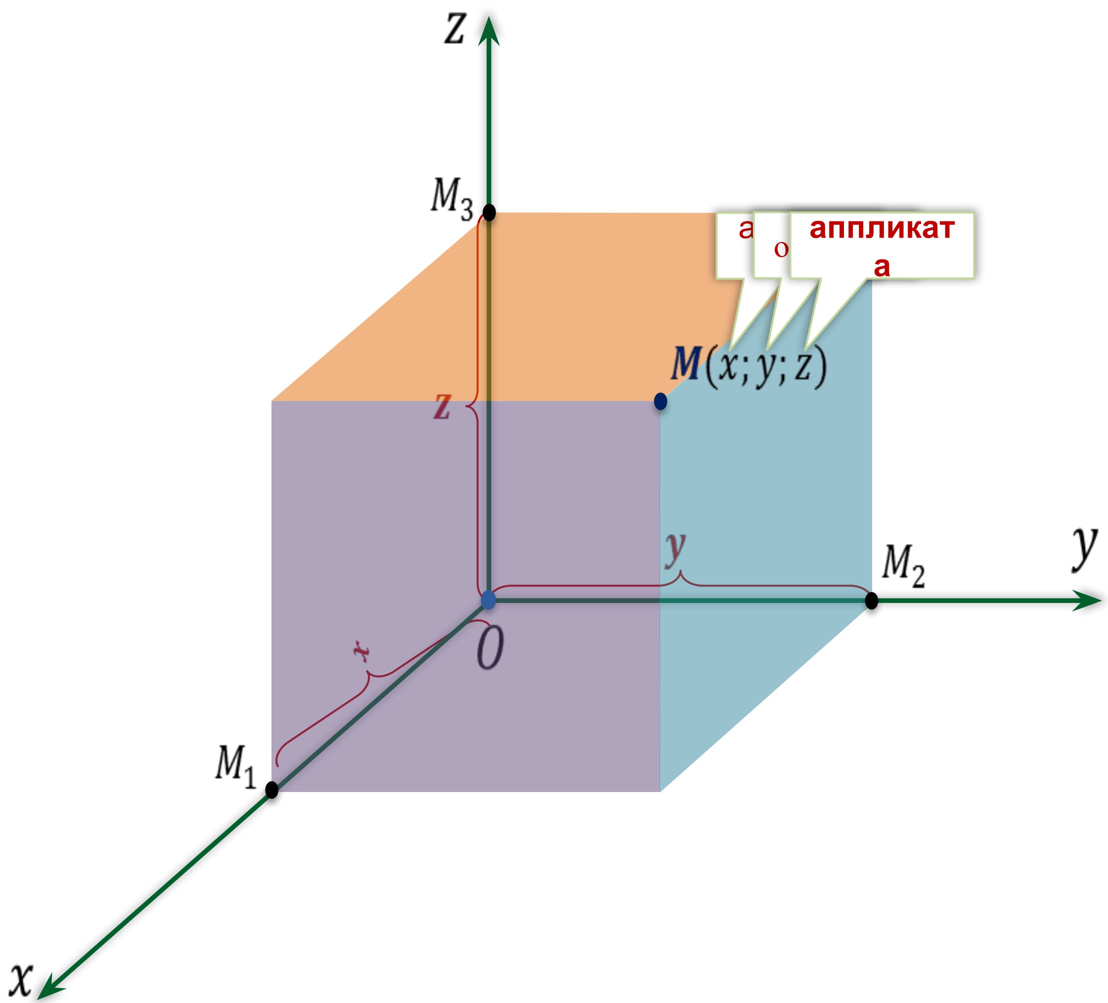
$0yz$

$0xz$

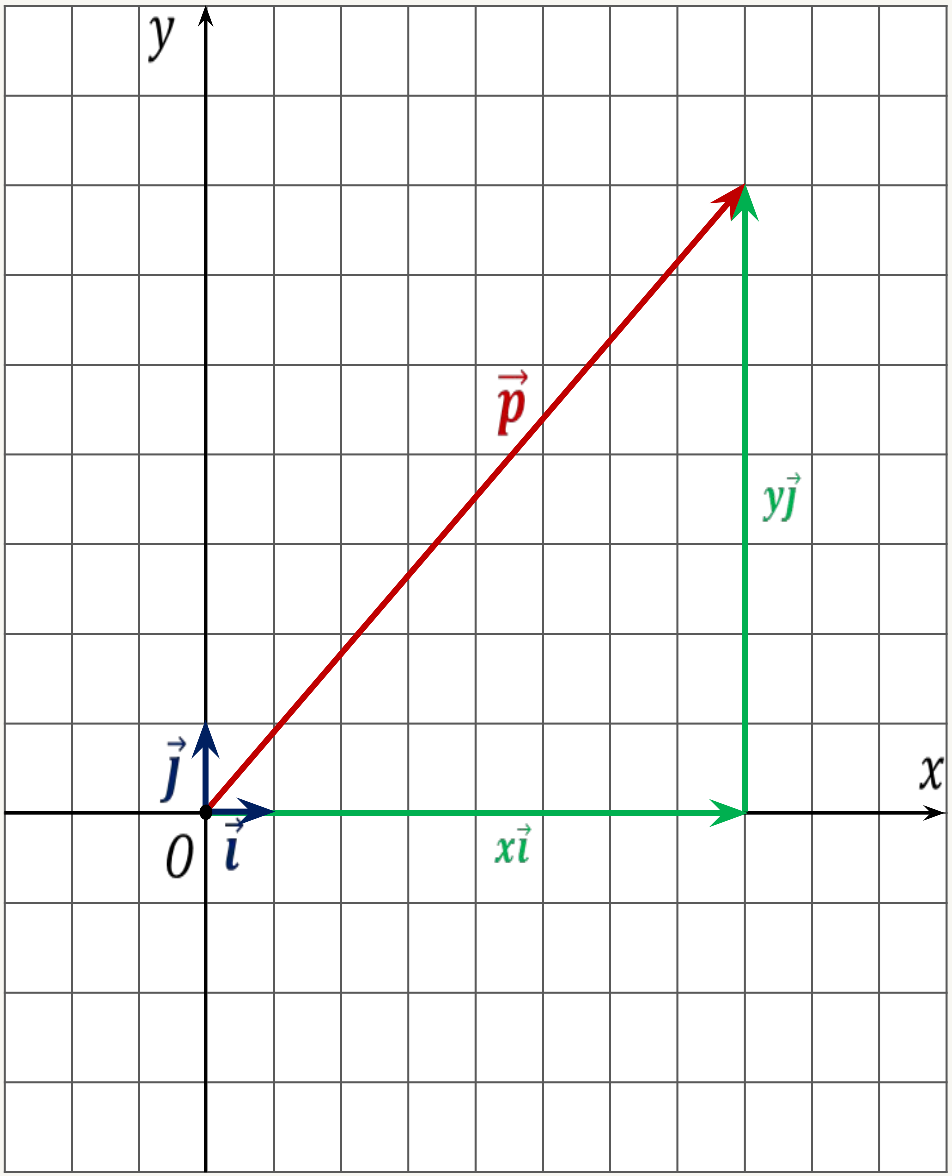
Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



Декартова прямоугольная система координат в пространстве *OXYZ*



Координаты вектора



$$|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1$$

единичные векторы

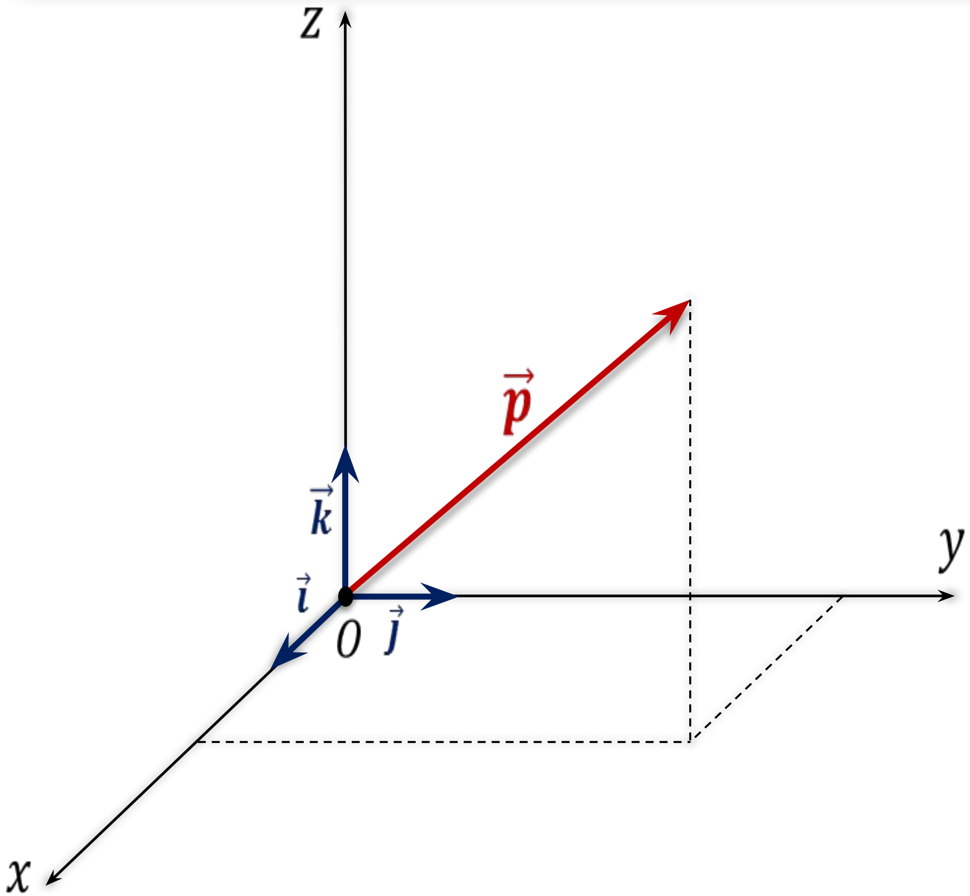
$\vec{i}, \vec{j}$ – координатные векторы

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

x, y – *координаты* вектора $\vec{p}$

$$\vec{p}\,\{x; y\}$$

Теорема
Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные векторы

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$x; y; z$

координаты вектора $\vec{p}$

Пользуясь разложениями векторов по координатным векторам, записать их координаты

$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{a}\,\{3; 2; -5\}$

$\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{b}\,\{-5; 3; -1\}$

$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{c}\,\{1; -1; 0\}$

$\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{d}\,\{0; 1; 1\}$

$\vec{m} = -\vec{i} + \vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{m}\,\{-1; 0; 1\}$

$\vec{n} = 7\vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{n}\,\{0; 0; 7\}$

Пользуясь координатами векторов, запишем их разложения по координатным векторам

$\vec{a}\,\{5; -1; 2\}$ $\quad\quad$ $\vec{a} = 5\vec{i} + (-1)\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{b}\,\{-3; -1; 0\}$ $\quad\quad$ $\vec{b} = -3\vec{i} + (-1)\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{c}\,\{0; 1; 0\}$ $\quad\quad$ $\vec{c} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{d}\,\{0; 0; 0\}$ $\quad\quad$ $\vec{d} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

Координаты вектора

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

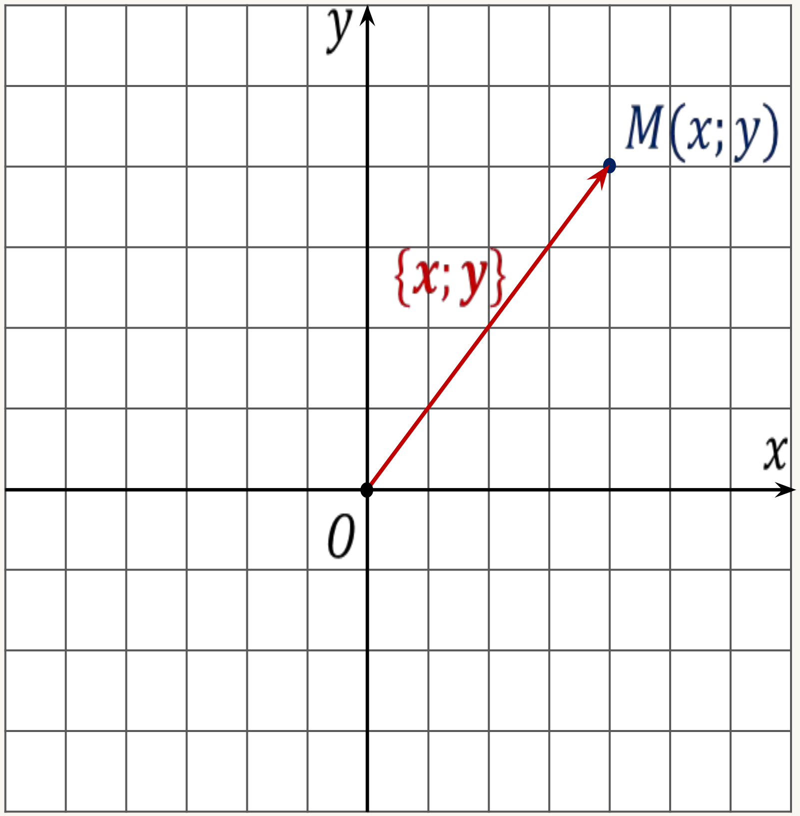
$\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ k

$k\vec{a}\{kx_1; ky_1; kz_1\}$

Позволяют определять координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами

Связь между координатами векторов и координатами точек



$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$

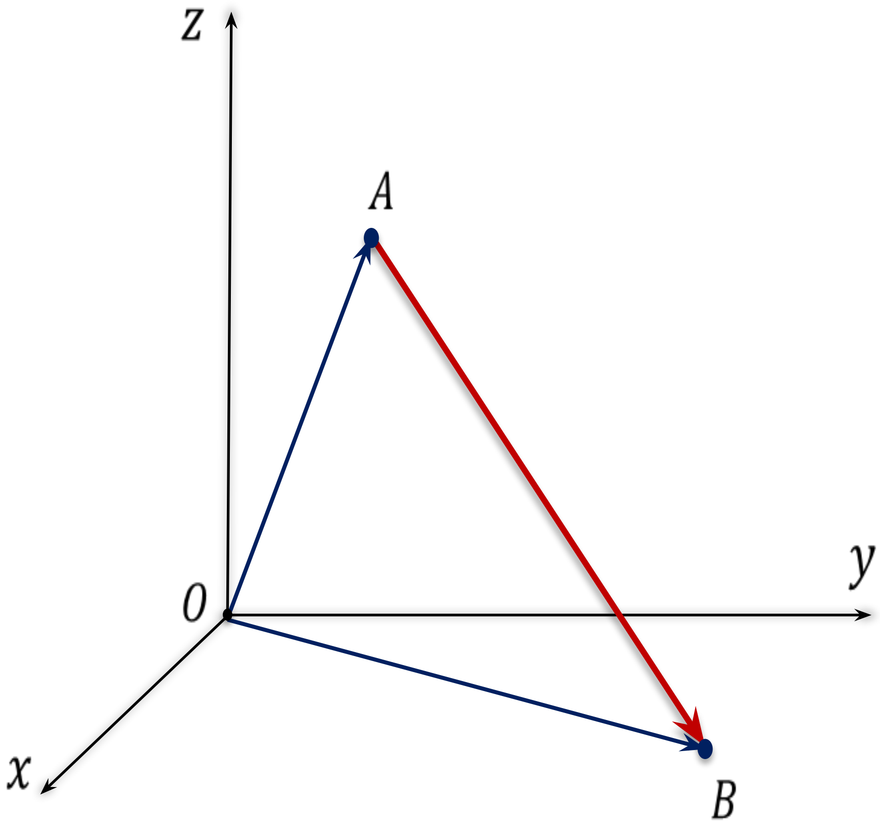
радиус-вектор точки $\boldsymbol{M}$

$M(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$

$\Leftarrow$

$\overrightarrow{OM}\ \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



$\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$

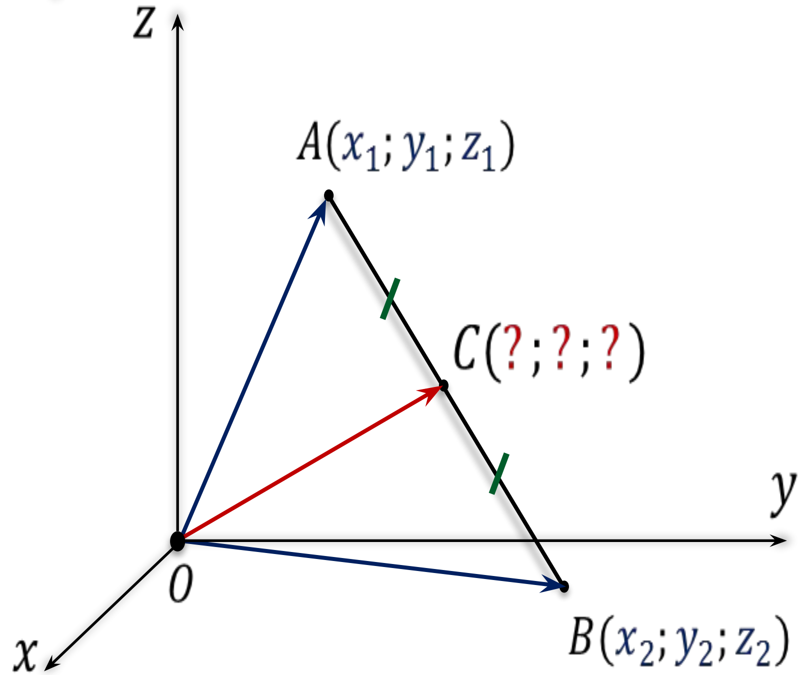
$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\{\quad ;\quad ;\quad \}$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала

Простейшие задачи
в координатах

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2; z_2\}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

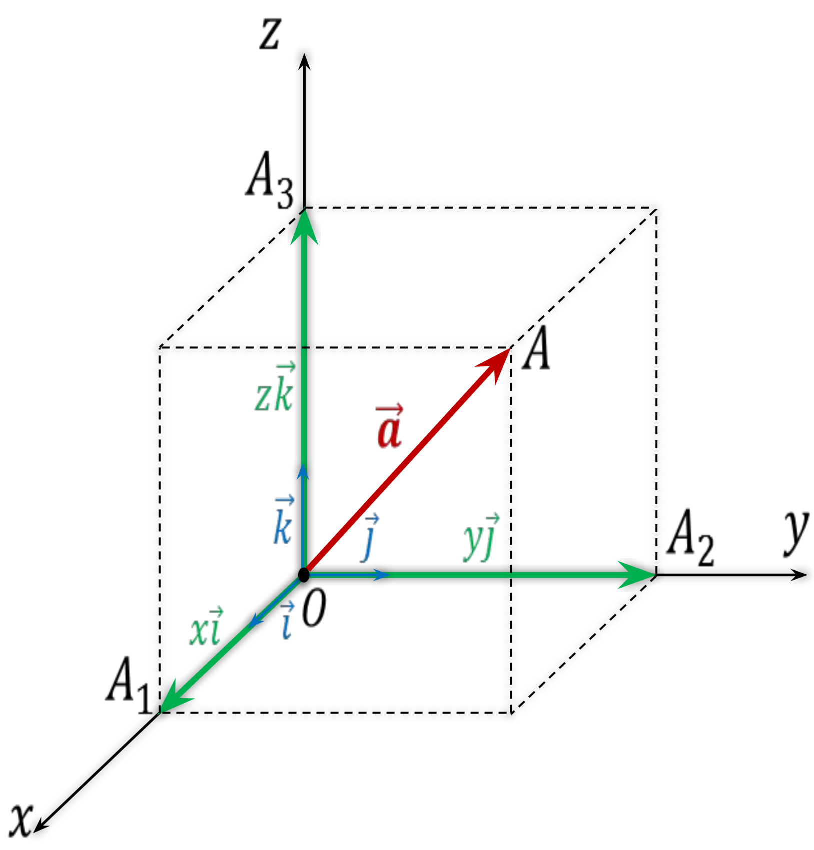
$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

$$\overrightarrow{OC} \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a}\ \{x; y; z\}$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задача. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;3)$;

б) $A(-35;-17;20)$, $B(-34;-5;8)$.

$\vec{a}\,\{x;y;z\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Решение.

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;3)$

$$\overrightarrow{AB}\,\{1-(-1);-2-0;3-2\}$$

$$\overrightarrow{AB}\,\{2;-2;1\}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4+1}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$$

б) $A(-35;-17;20)$, $B(-34;-5;8)$

$$\overrightarrow{AB}\,\{-34-(-35);-5-(-17);8-20\}$$

$$\overrightarrow{AB}\,\{1;12;-12\}$$

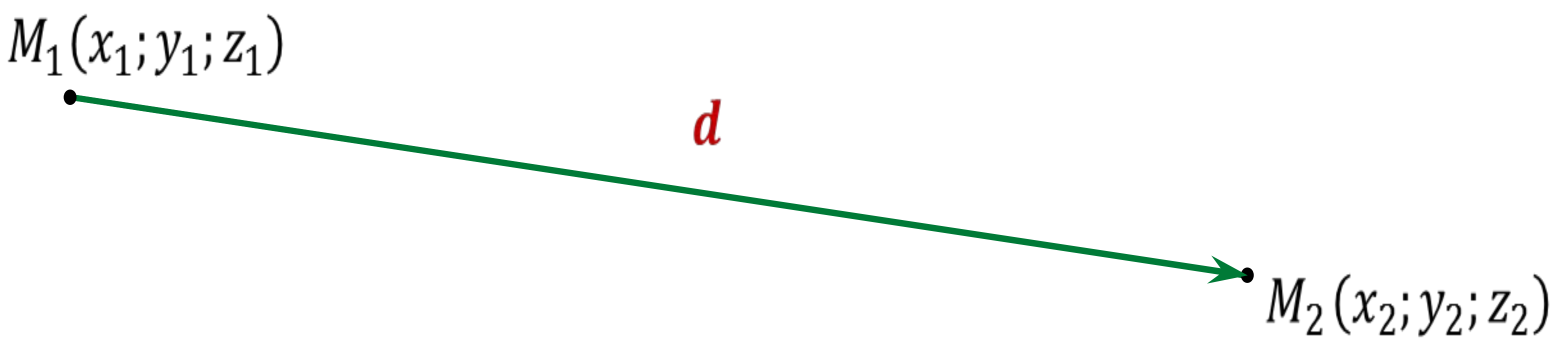
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+12^2+(-12)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+144+144}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{289}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 17$$

3. Определение расстояния между двумя точками



$$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$

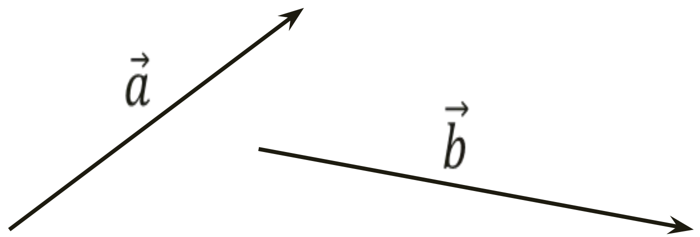
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=M_1M_2=d$$

$$\boldsymbol{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – произведение их длин на косинус угла между ними



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\{x_1; y_1\}$

$\vec{b}\{x_2; y_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

$\vec{a}\{1; -1; 2\}$ $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$ $\vec{c}\{5; 6; 2\}$

$\vec{a} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$

$\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \boldsymbol{cos\,\alpha}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

выражается формулой: $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$.

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 \neq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон)

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)