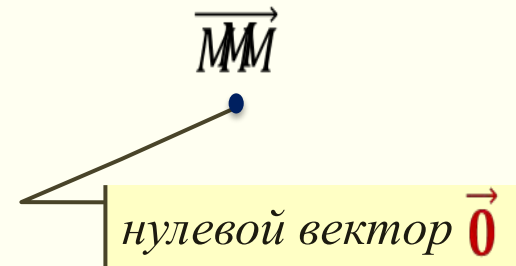
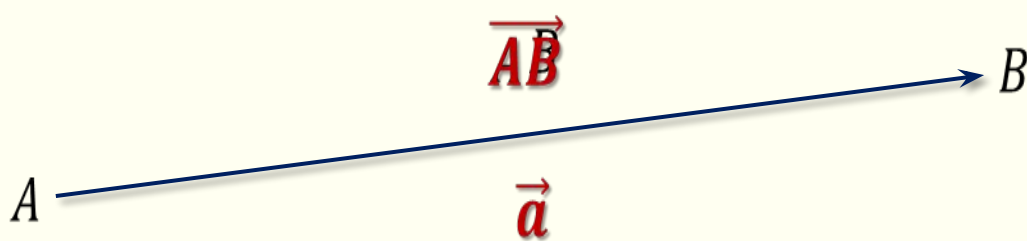


Векторы

Вектор — направленный отрезок



Длина ненулевого вектора
равна длине отрезка

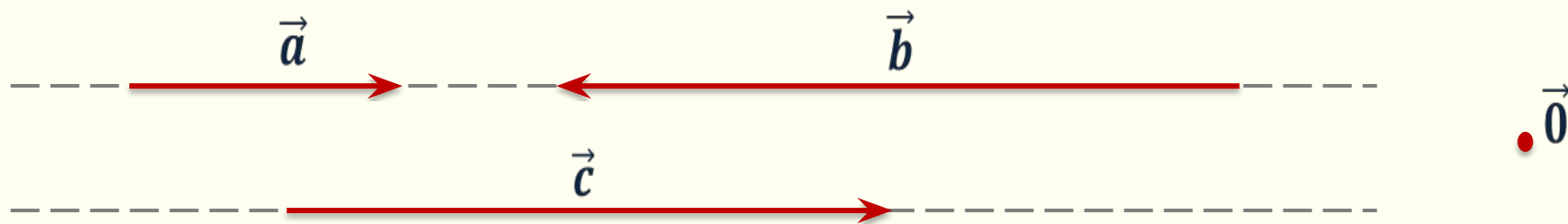
$$|\overrightarrow{AB}| = AB$$

Длина нулевого вектора
равна 0

$$|\vec{0}| = 0$$

Коллинеарные векторы — ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору



Коллинеарные векторы, имеющие **одинаковые** направления, называют

сопоставленными

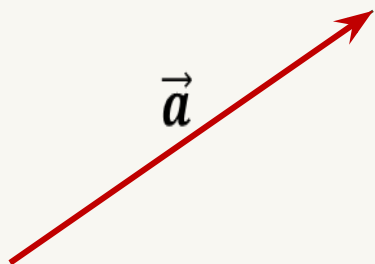
$\vec{a} \uparrow \vec{c}$ $\vec{0} \uparrow \vec{a}$ $\vec{0} \uparrow \vec{b}$ $\vec{0} \uparrow \vec{c}$

Коллинеарные векторы, имеющие **противоположные** направления, называют

противоположно
направленными

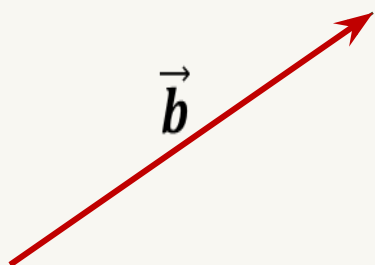
$\vec{a} \uparrow \vec{b}$ $\vec{b} \uparrow \vec{c}$

Равные векторы



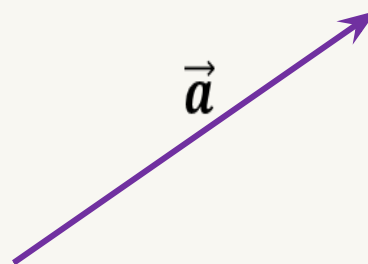
$$\vec{a} = \vec{b}$$

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



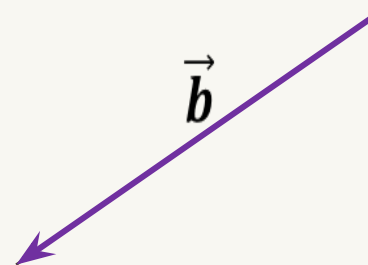
сонаправленные
векторы,
длины которых равны

Противоположн ые векторы



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

1. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

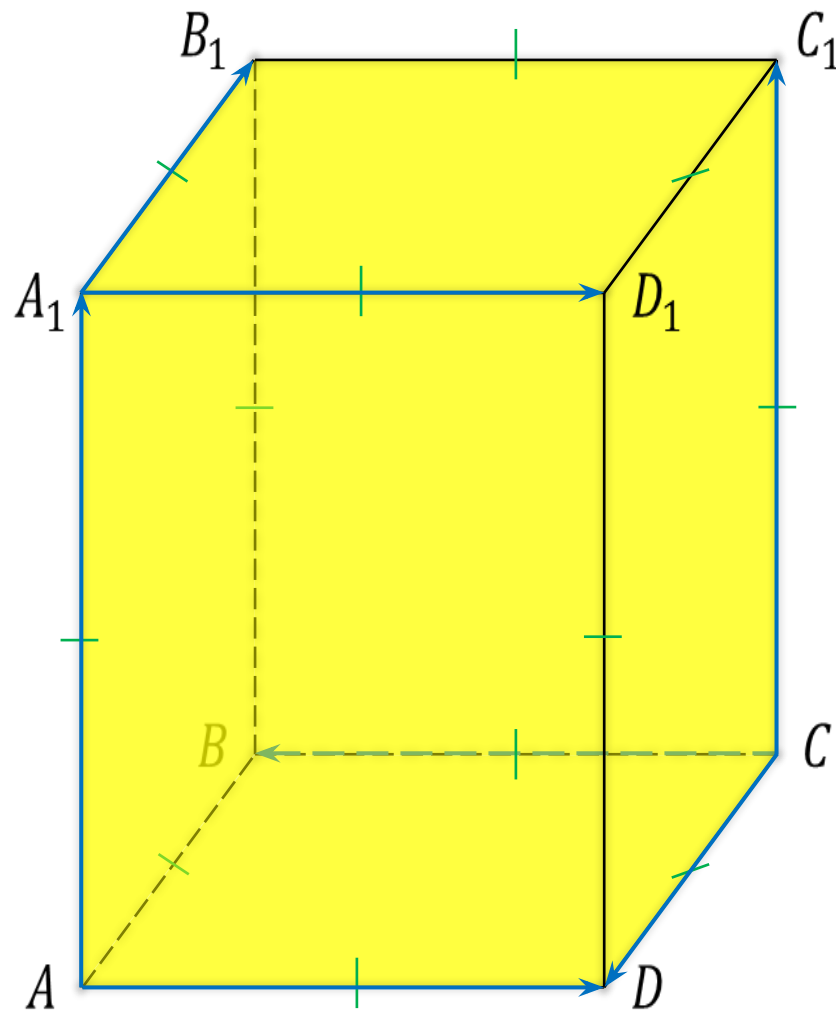


противоположно
направленные векторы,
длины которых равны

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

Равные
векторы:

Противоположные
векторы:



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

Равные

векторы:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1} = \overrightarrow{AD}$$

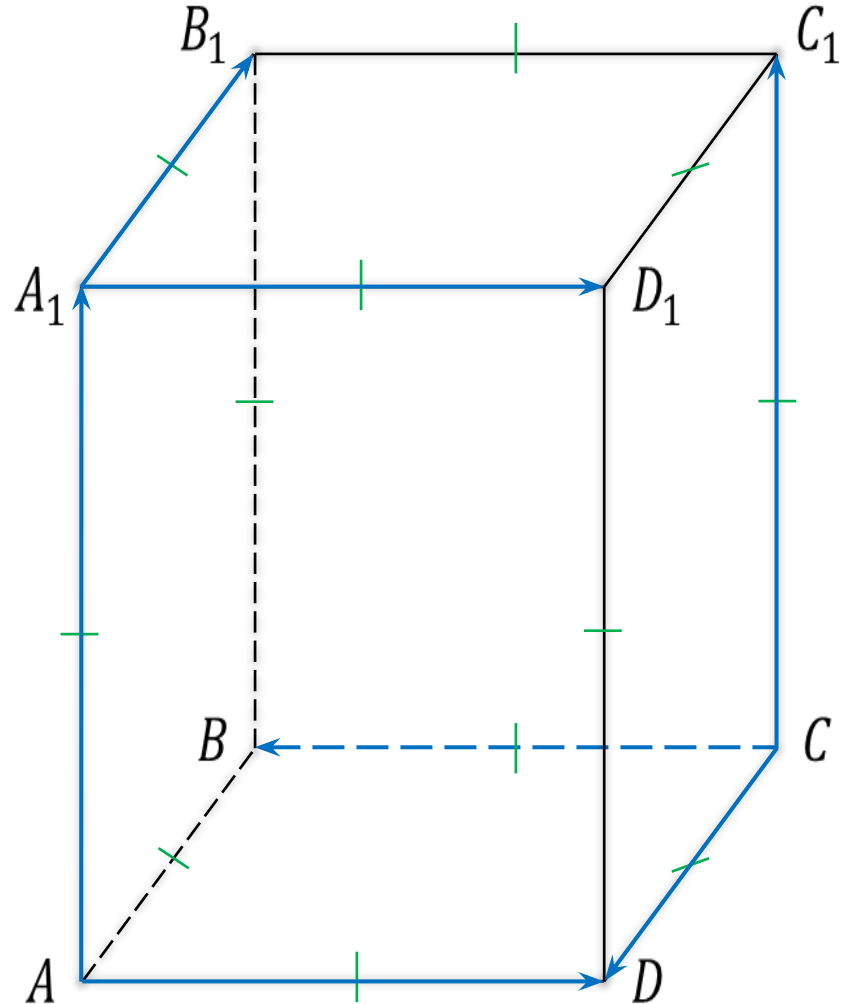
Противоположные

векторы:

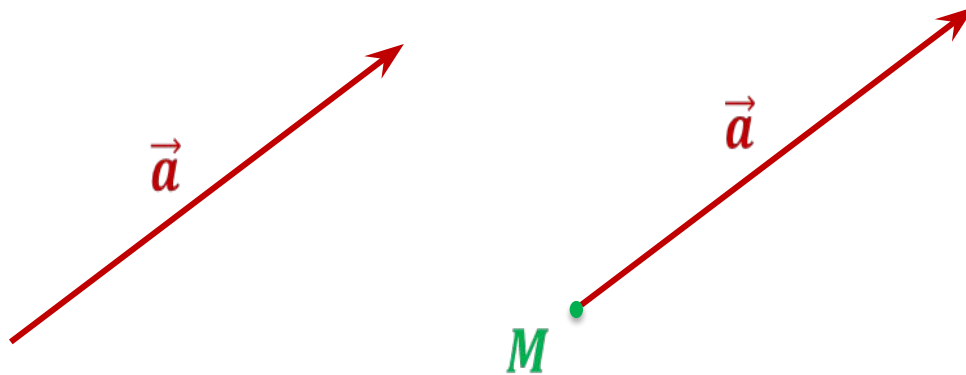
$$\overrightarrow{A_1 B_1} = -\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$$

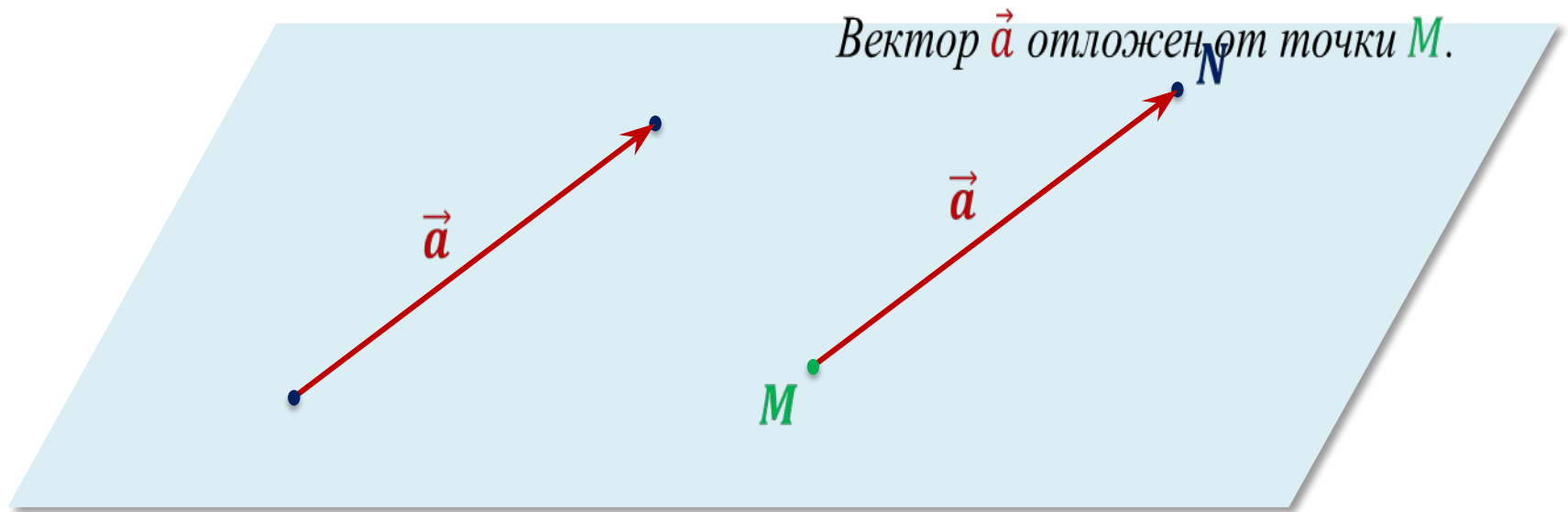
$$\overrightarrow{A_1 D_1} = -\overrightarrow{CB}$$



От любой точки M плоскости можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.



От любой точки M пространства можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.



Сложение и вычитание векторов

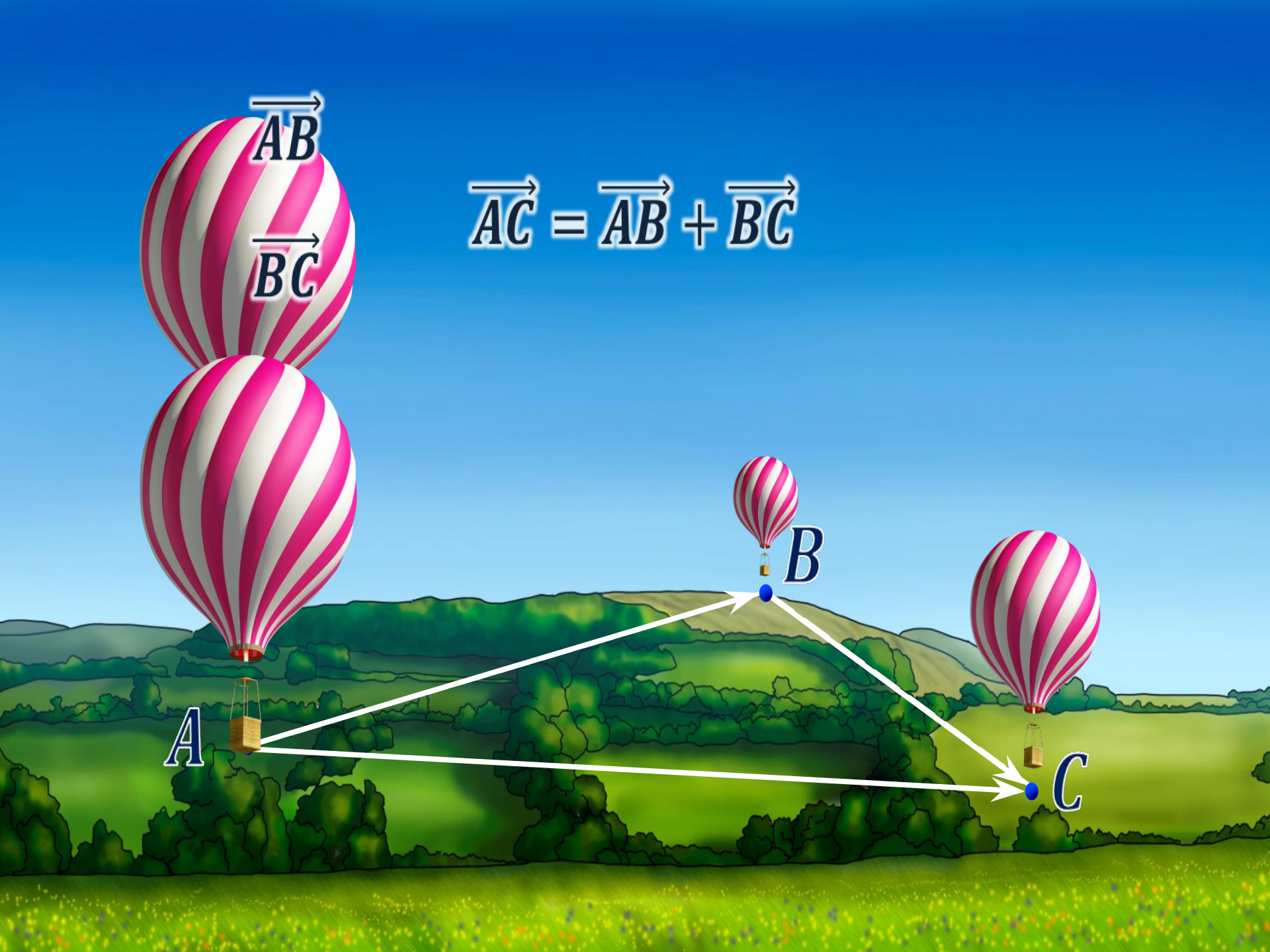


$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

A

B

C

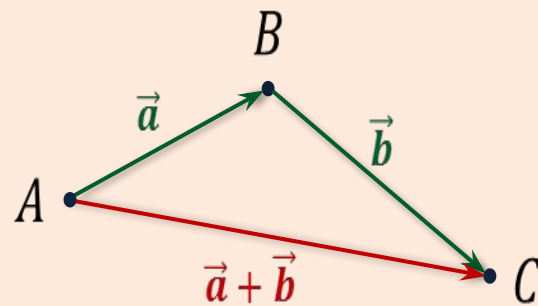
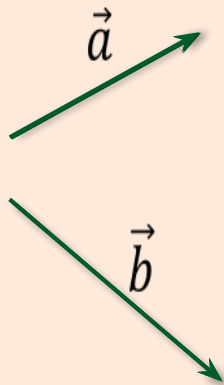


Правило треугольника

$$1. \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$2. \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$3. \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



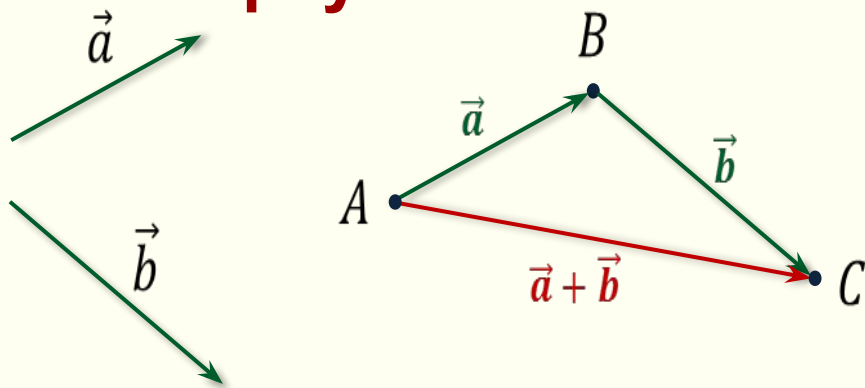
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$$

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

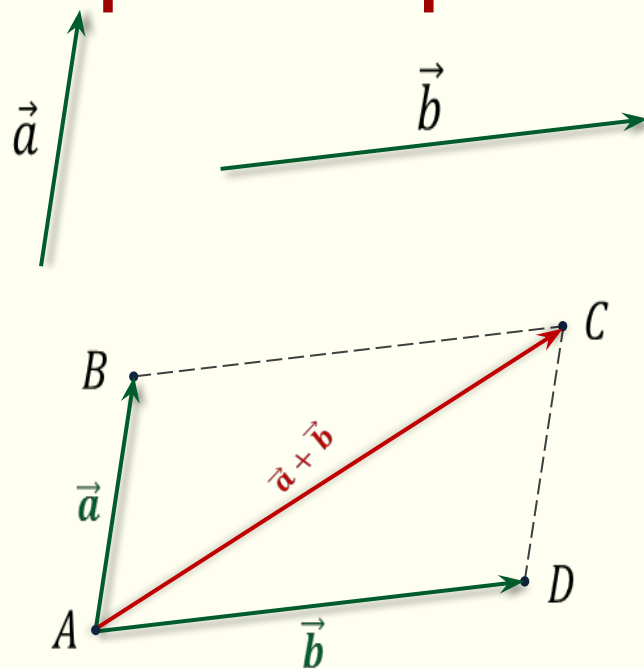
$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$$

Правило треугольника



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Правило параллелограмма



Законы сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

переместительный

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

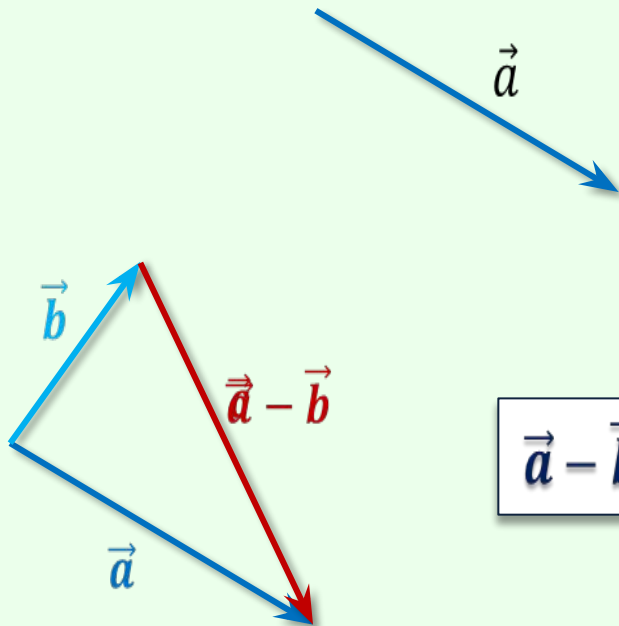
сочетательный

Разность векторов

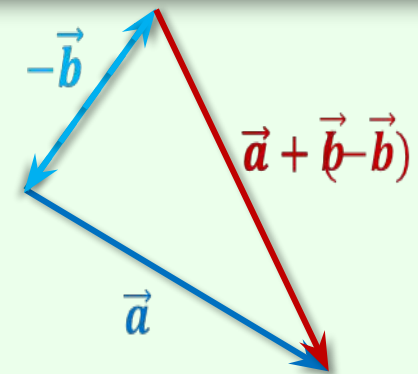
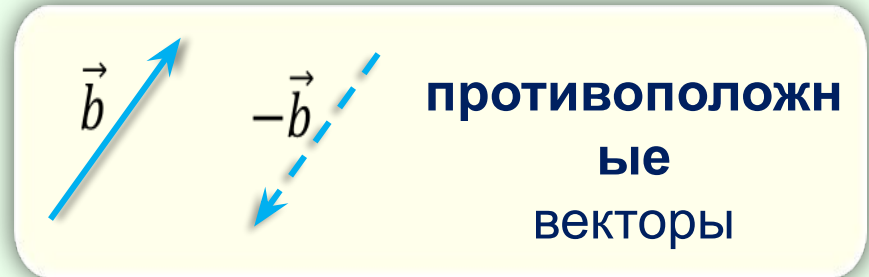
$$\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называют такой вектор \vec{c} , сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .

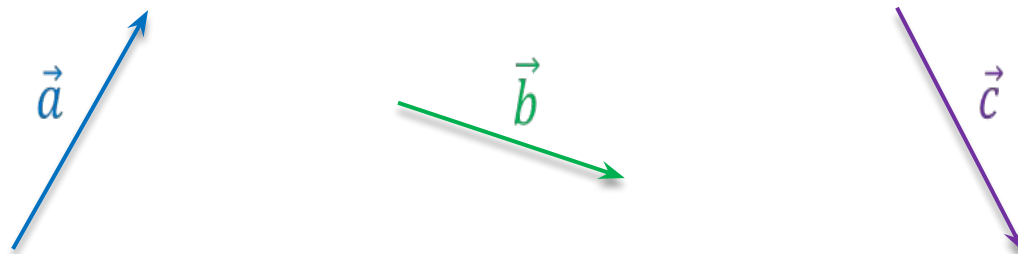


$$\vec{a} - \vec{b}$$

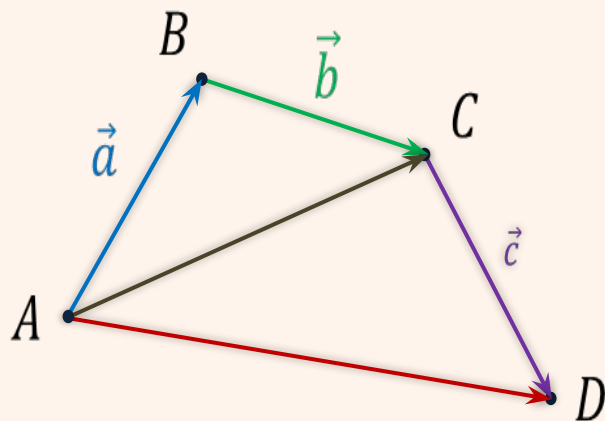


Сумма

нескольких векторов



Правило многоугольника



$$1. \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$2. \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$3. \overrightarrow{CD} = \vec{c}$$

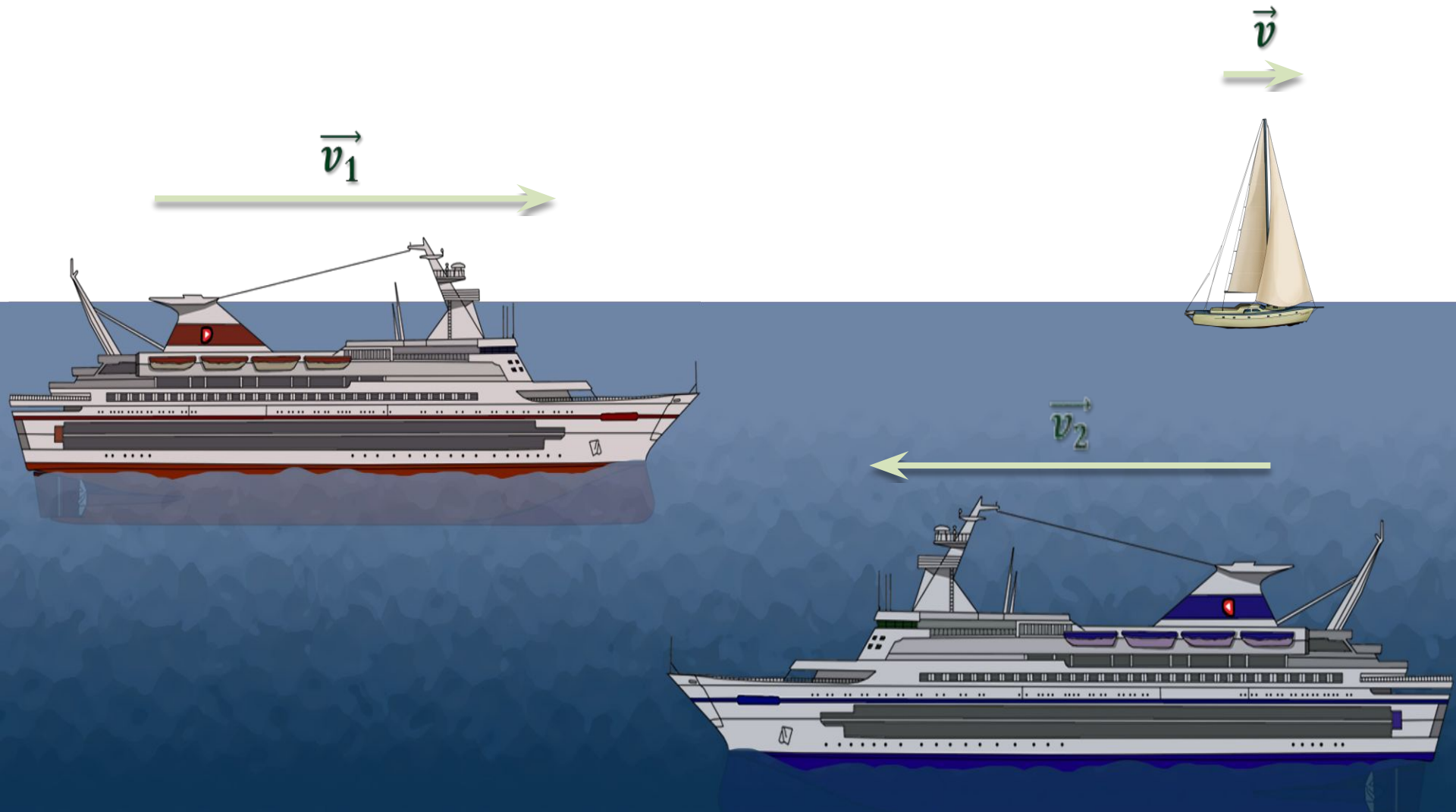
$$4. \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Умножение вектора на число

$$\vec{v}$$

$$\vec{v}_1 = 5\vec{v}$$

$$\vec{v}_2 = -5\vec{v}$$



Определение. Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

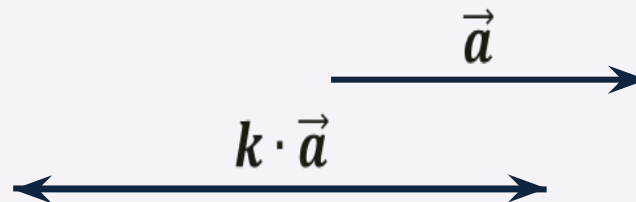
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

Следствия

1. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

2. \vec{a} и $k \cdot \vec{a}$ – коллинеарны



Свойства произведения вектора на число

$$1. (kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$

сочетательный закон

$$2. (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

1-ый распределительный закон

$$3. k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

2-ой распределительный закон

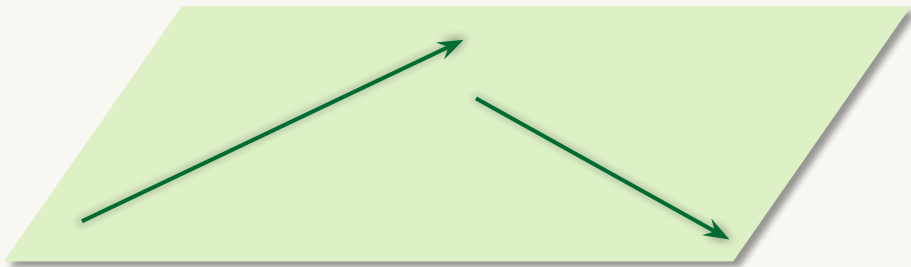
позволяют выполнять преобразования в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, так же, как и в числовых выражениях

$$\begin{aligned} \text{а) } 2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m} &= \\ &= 2\vec{m} + 2\vec{n} - 12\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{m} = 5\vec{n} - 9\vec{m} \end{aligned}$$

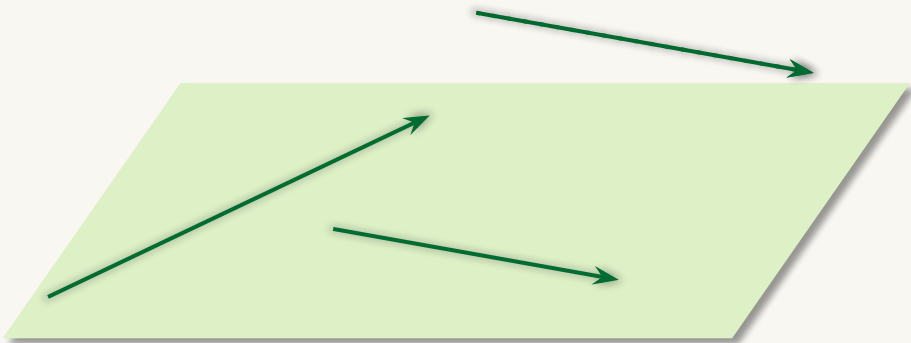
$$\begin{aligned} \text{б) } \vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m}) &= \\ &= \vec{m} - 3\vec{n} + 6\vec{m} - 3\vec{p} + 5\vec{p} - 20\vec{m} = \\ &= -13\vec{m} - 3\vec{n} + 2\vec{p} \end{aligned}$$

Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут **лежать в одной плоскости**



Векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, **лежащие в одной плоскости**



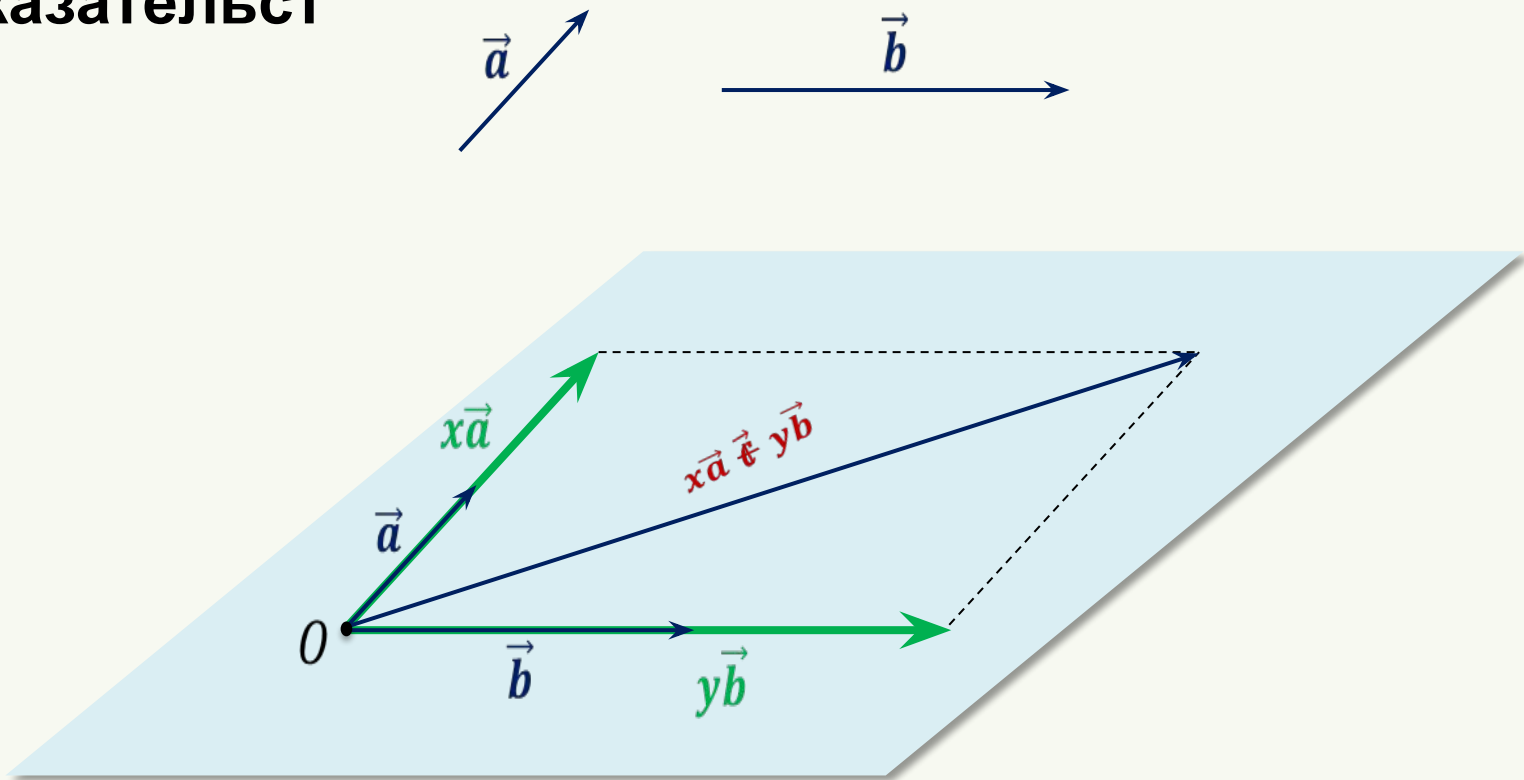
Любые **2** вектора являются **компланарными**

3 вектора являются **компланарными**, если среди них есть пара коллинеарных векторов

Теорема. (признак компланарности трёх векторов)

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,
то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

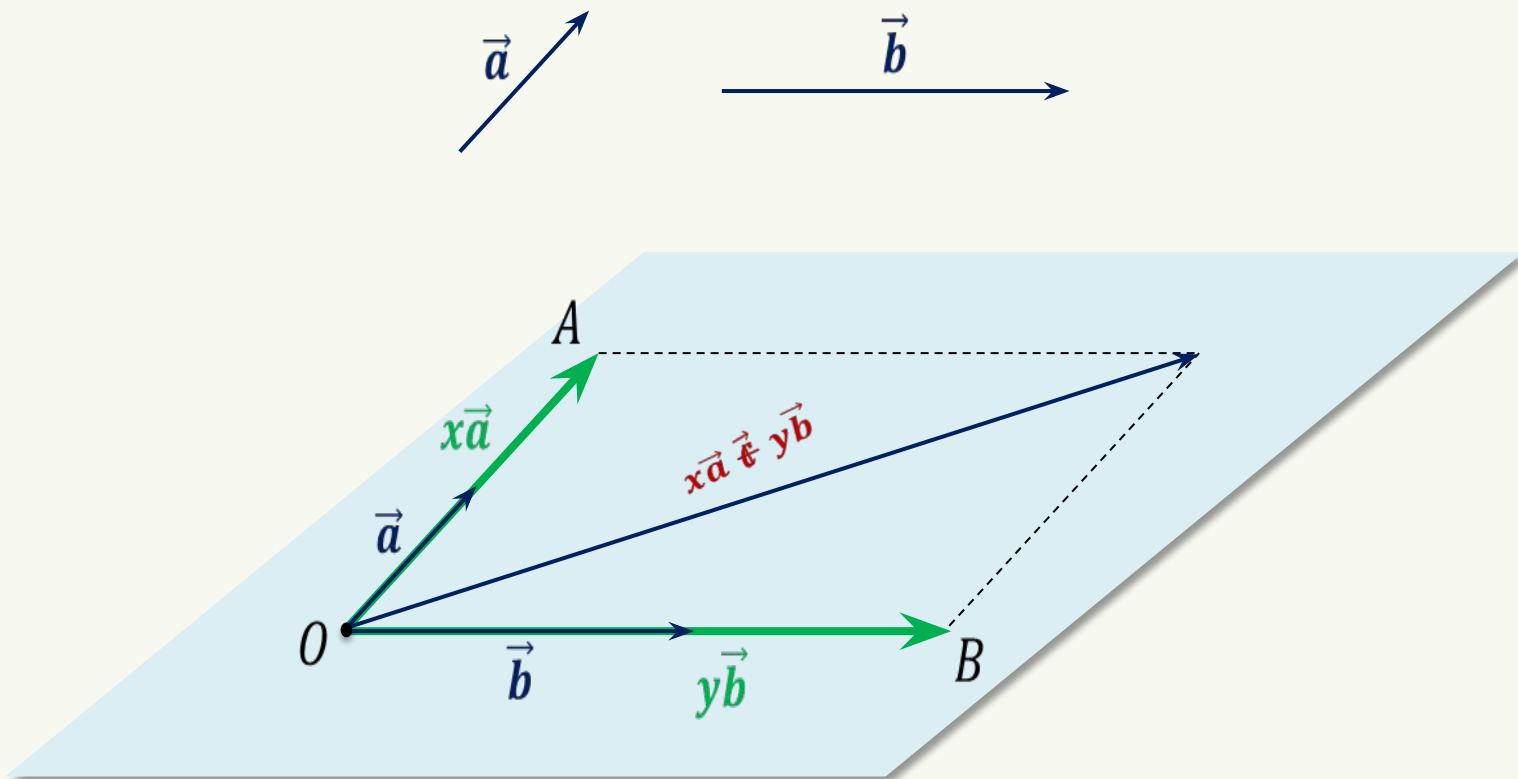
**Доказательст
во**



Теорема. (свойство трёх компланарных векторов)

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$),
то вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Доказательство.



Правило параллелепипеда

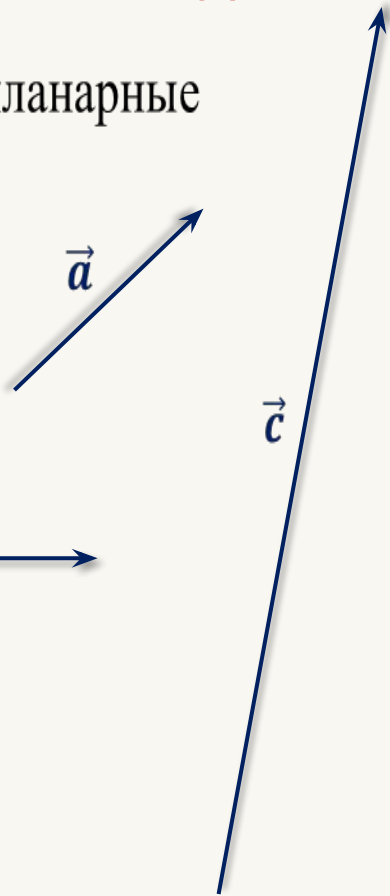
Правило параллелепипеда

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – не компланарные

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

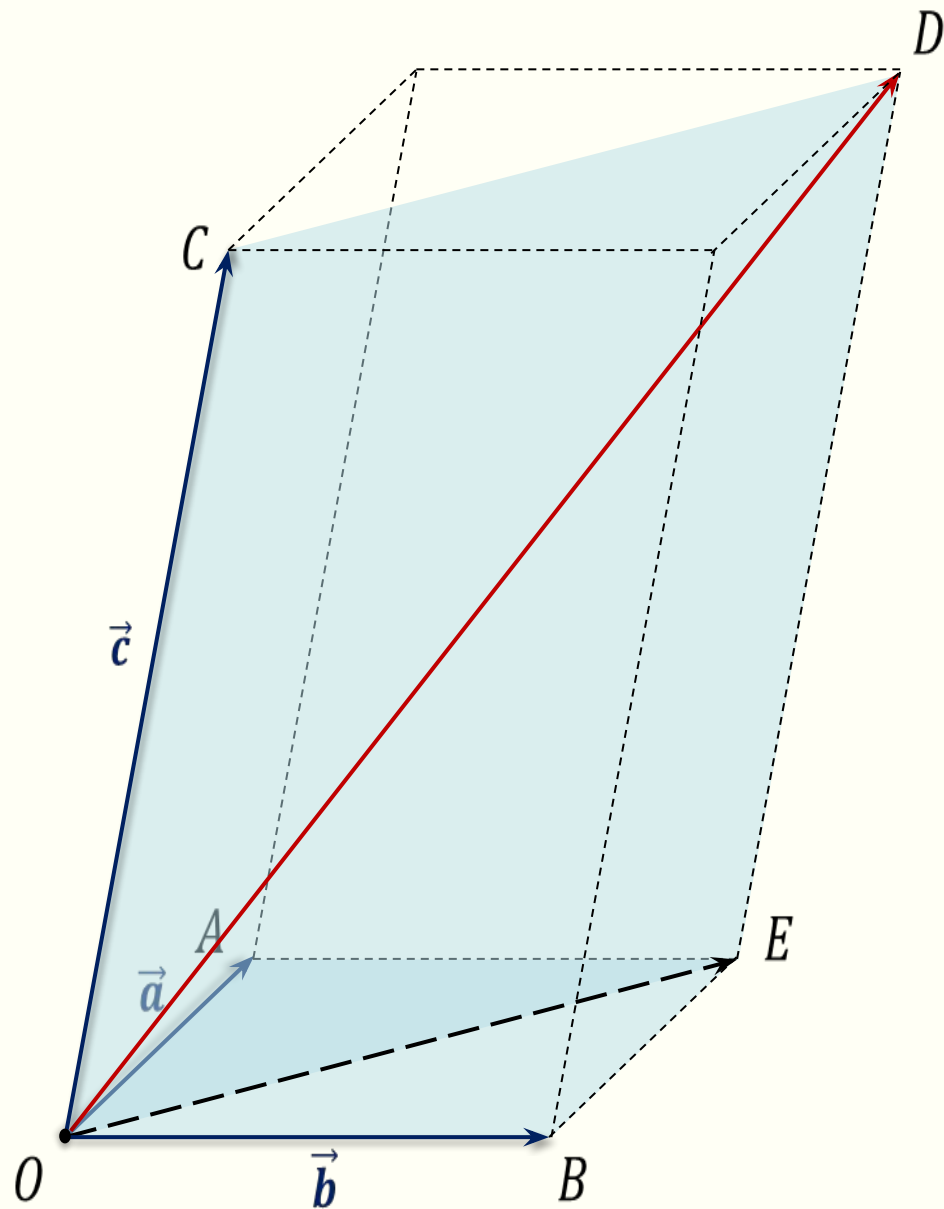


$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

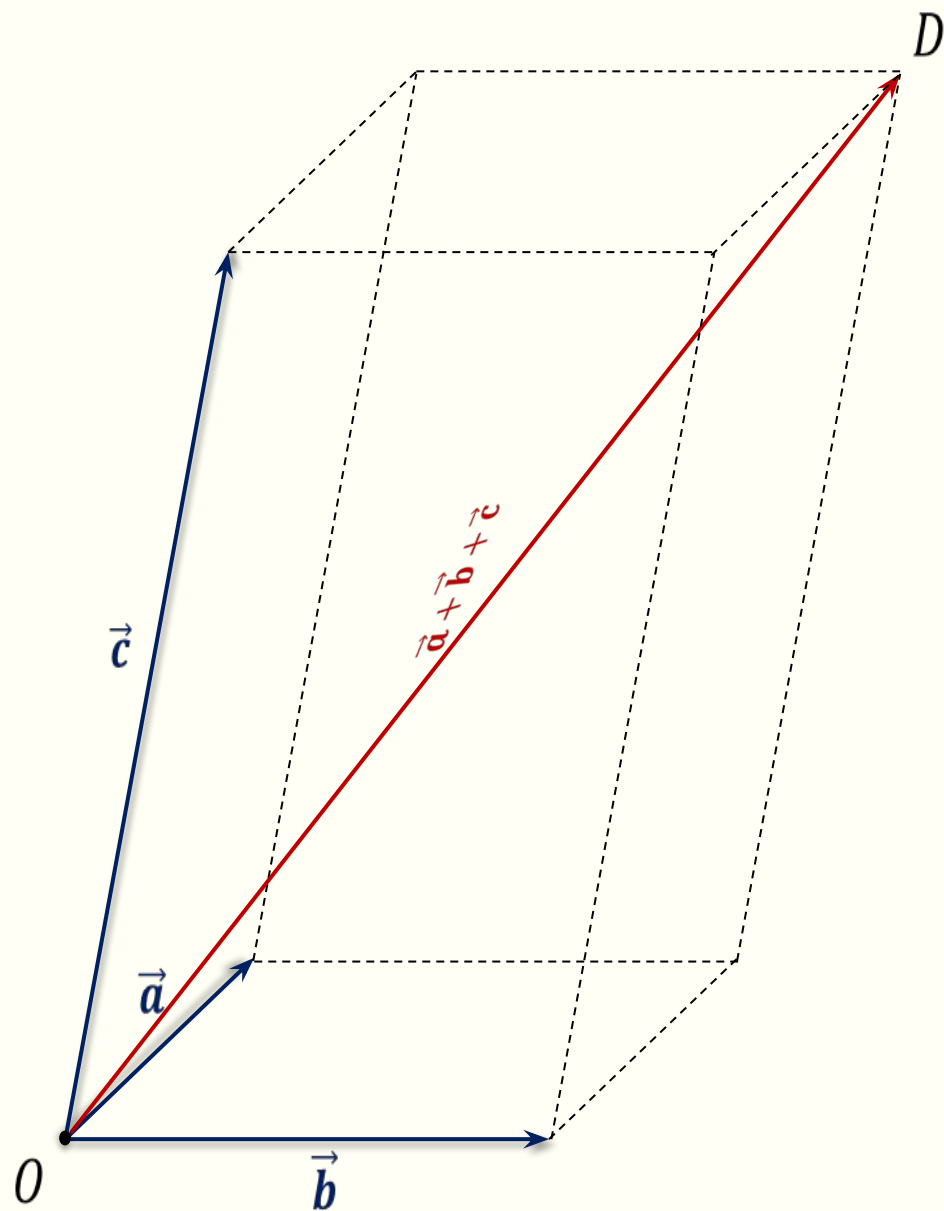
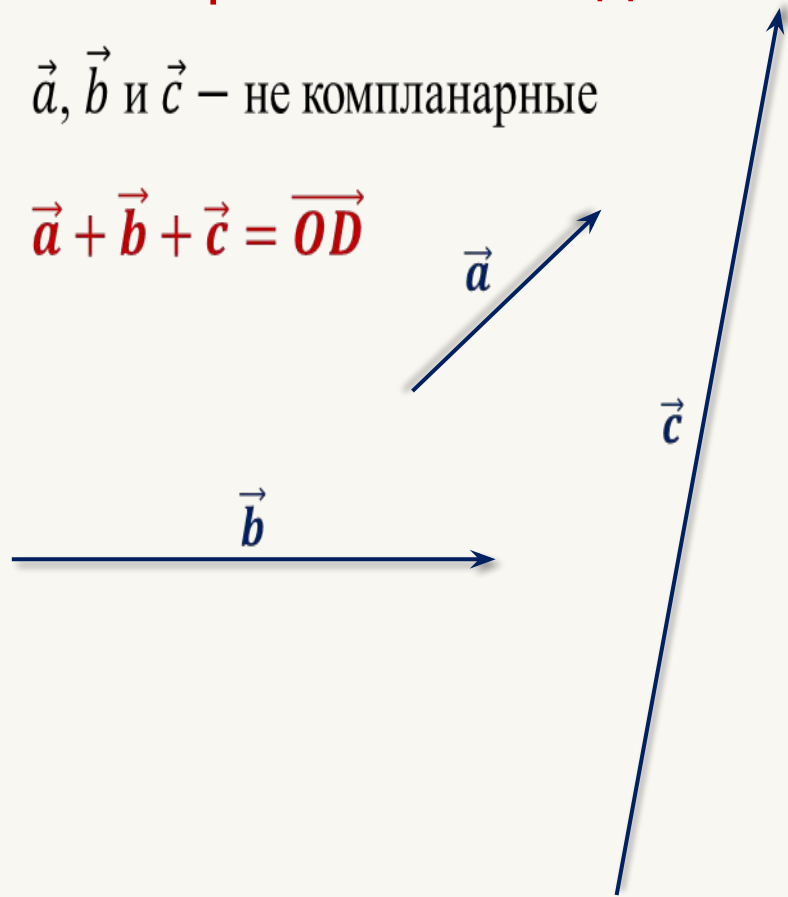
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}$$



Правило параллелепипеда

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – не компланарные

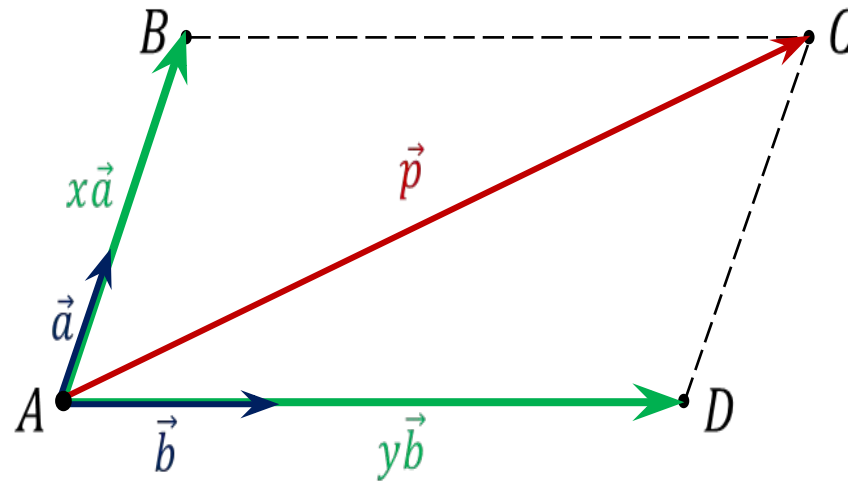
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD}$$



Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Вектор \vec{p} разложен по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} .
 x, y – коэффициенты разложения.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Прямоугольная система координат в пространстве

Рене Декарт

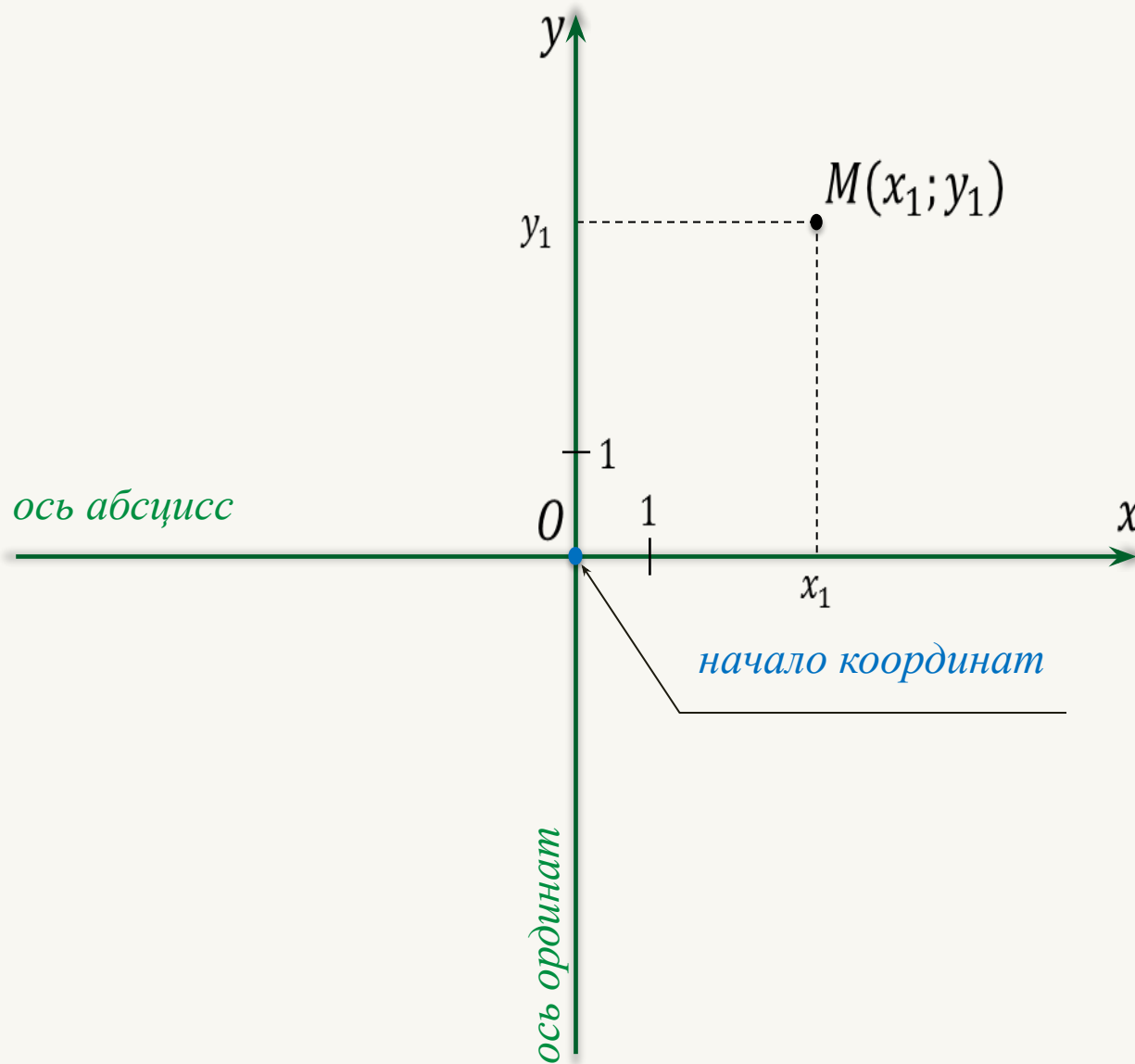


Французский философ,
математик, механик,
физик и физиолог

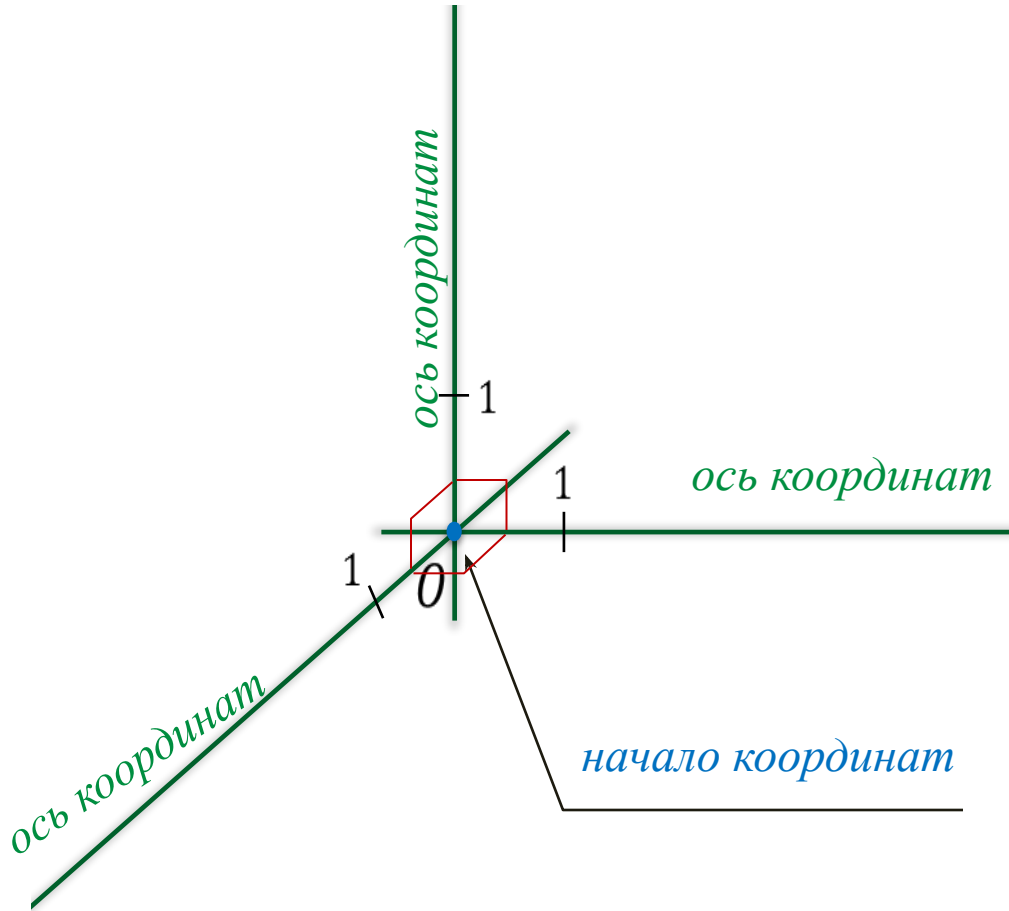
Создатель **аналитическо
й геометрии** и
современной
алгебраической символик
и

1596 - 1650

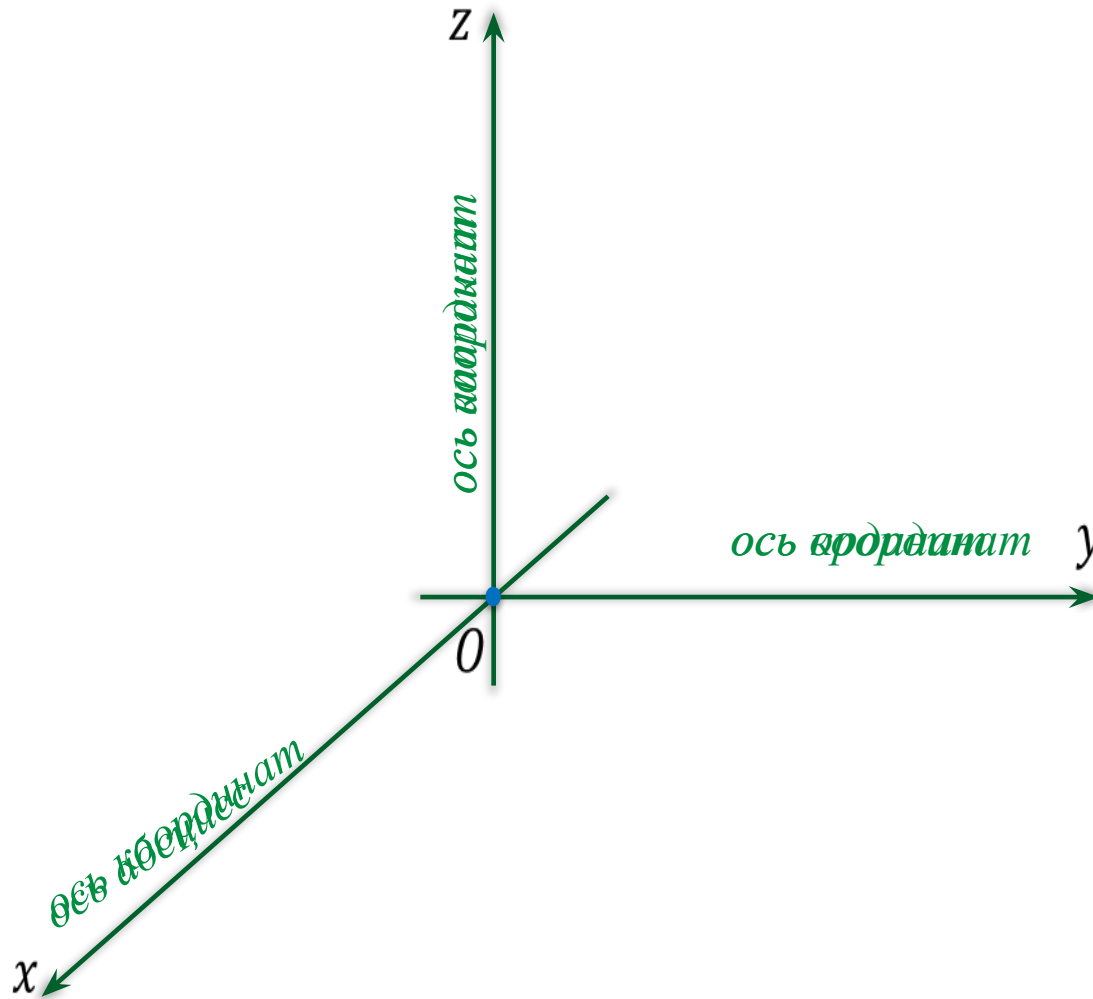
Декартова прямоугольная система координат на плоскости



Декартова прямоугольная система координат в пространстве



Декартова прямоугольная система координат в пространстве $OXYZ$



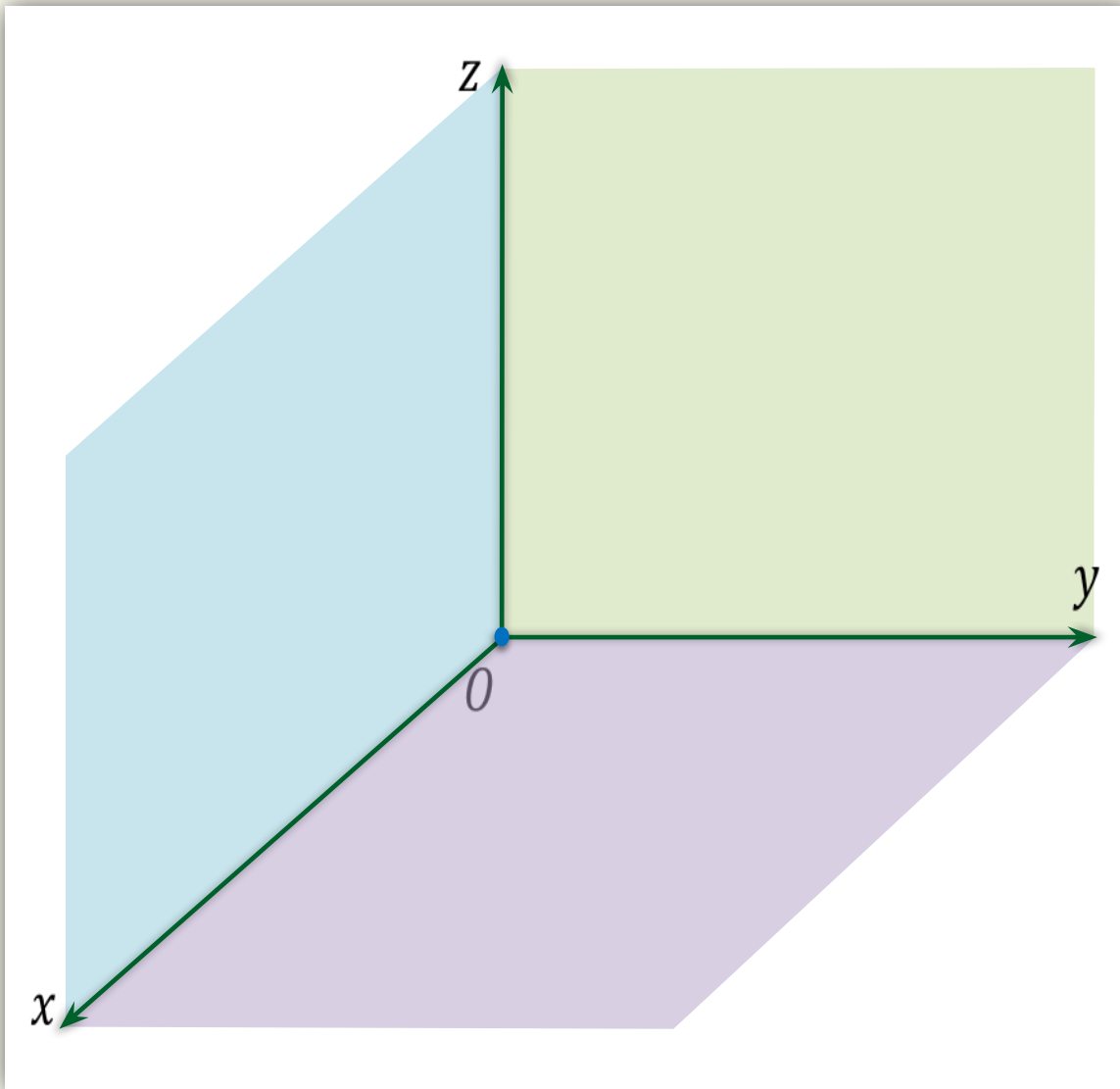
Координатные оси:

Ox

Oy

Oz

Декартова прямоугольная система координат в пространстве $OXYZ$



Координатные оси:

Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось **апplikат**

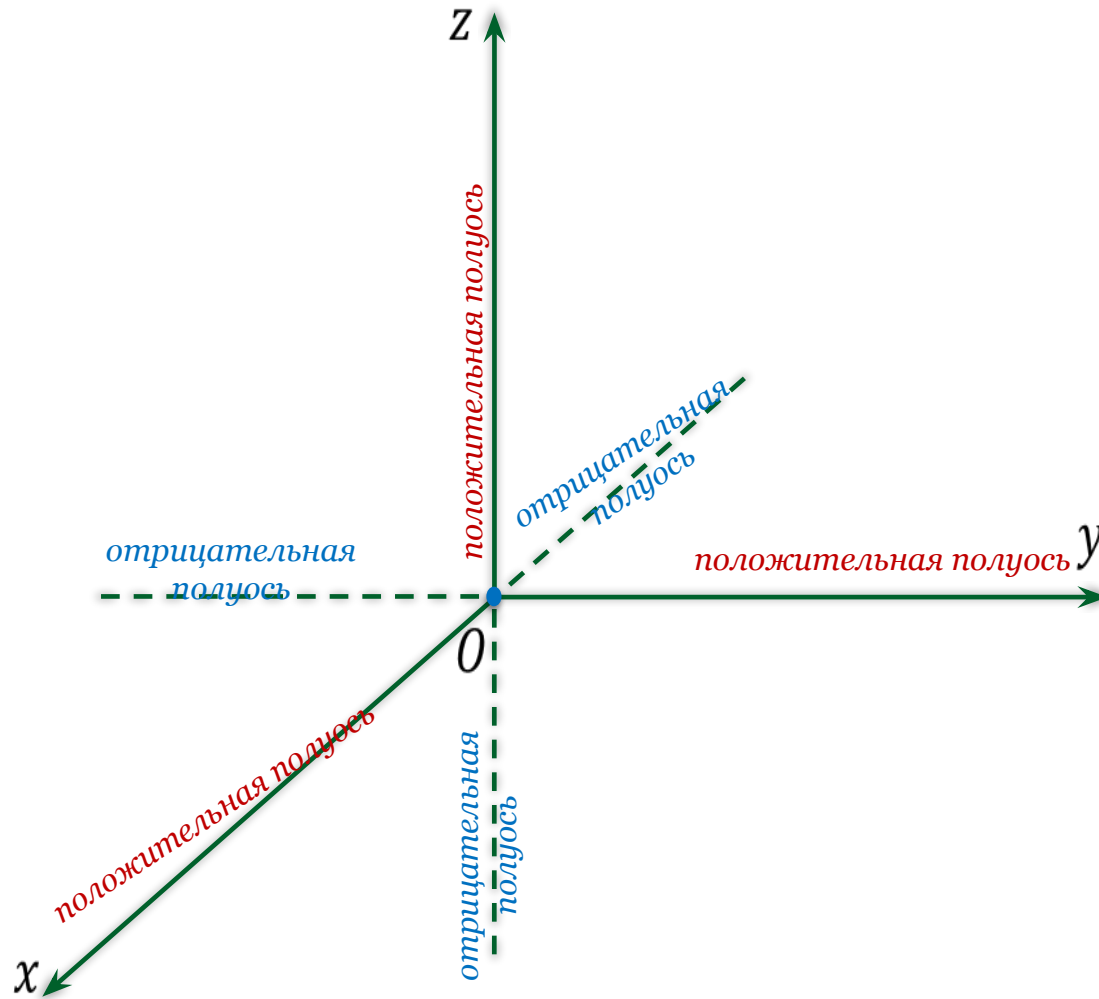
Координатные плоскости:

Oxy

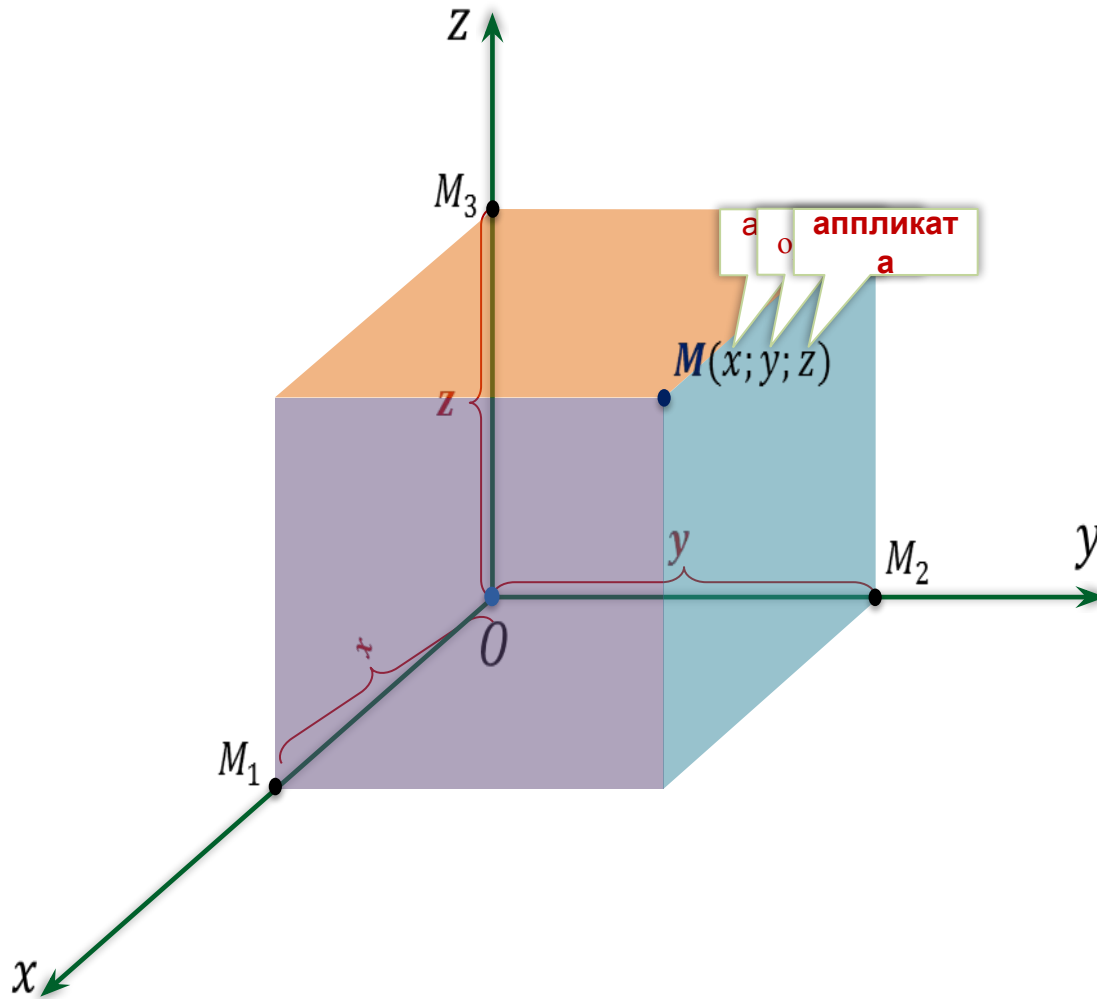
Oyz

Oxz

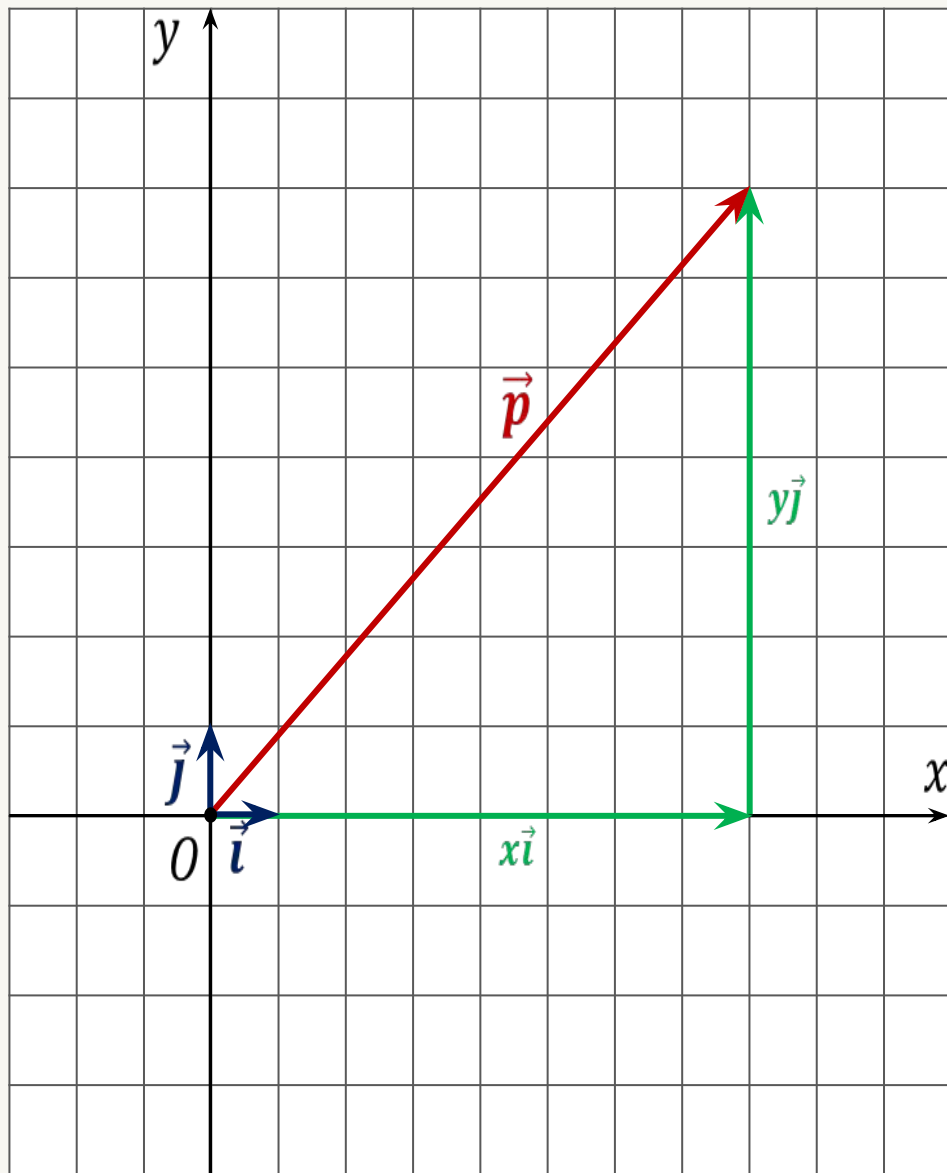
Декартова прямоугольная система координат в пространстве $OXYZ$



Декартова прямоугольная система координат в пространстве $OXYZ$



Координаты вектора



$|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1$
единичные векторы

\vec{i}, \vec{j} – координатные векторы

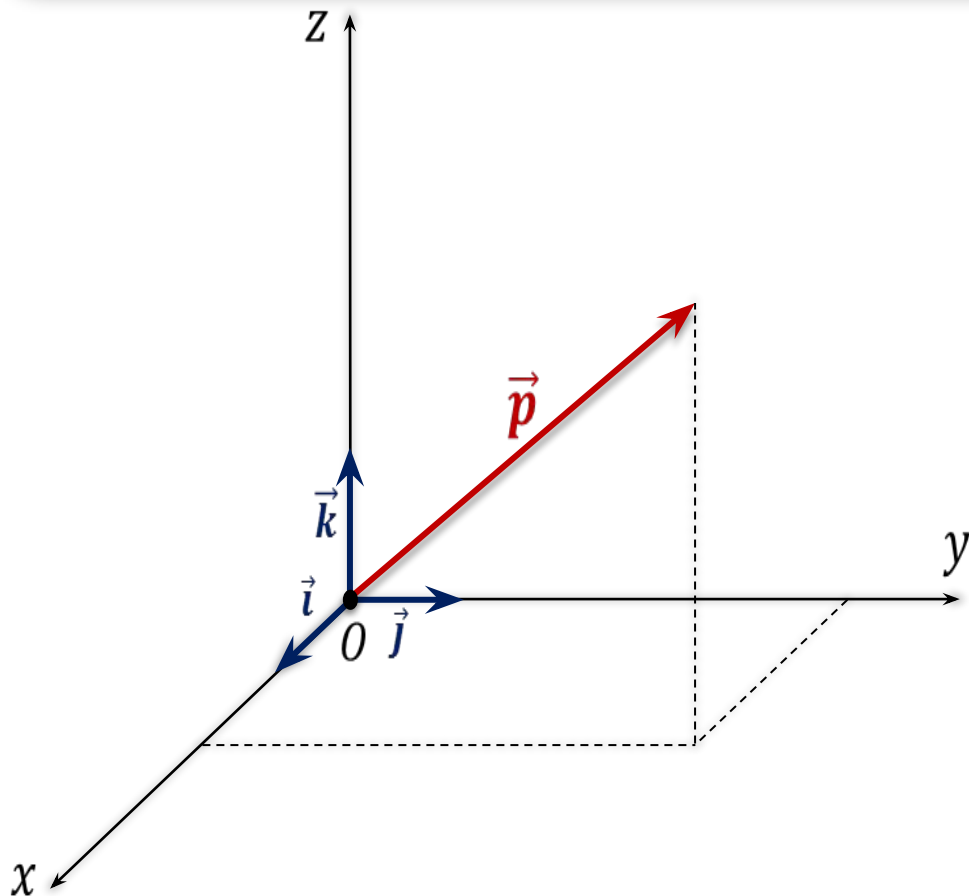
$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

x, y – координаты вектора \vec{p}

$$\vec{p} \{x; y\}$$

Теорема

Любой вектор можно разложить по трём некопланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные векторы

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$x; y; z$
координаты вектора \vec{p}

Пользуясь разложениями векторов по координатным векторам, записать их координаты

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} \quad \vec{a} \{3; 2; -5\}$$

$$\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \quad \vec{b} \{-5; 3; -1\}$$

$$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} \quad \vec{c} \{1; -1; 0\}$$

$$\vec{d} = \vec{j} + \vec{k} \quad \vec{d} \{0; 1; 1\}$$

$$\vec{m} = -\vec{i} + \vec{k} \quad \vec{m} \{-1; 0; 1\}$$

$$\vec{n} = 7\vec{k} \quad \vec{n} \{0; 0; 7\}$$

Пользуясь координатами векторов, запишем их разложения по координатным векторам

$$\vec{a} \{5; -1; 2\} \quad \vec{a} = 5\vec{i} + (-1)\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{b} \{-3; -1; 0\} \quad \vec{b} = -3\vec{i} + (-1)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{c} \{0; 1; 0\} \quad \vec{c} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{d} \{0; 0; 0\} \quad \vec{d} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Координаты вектора

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

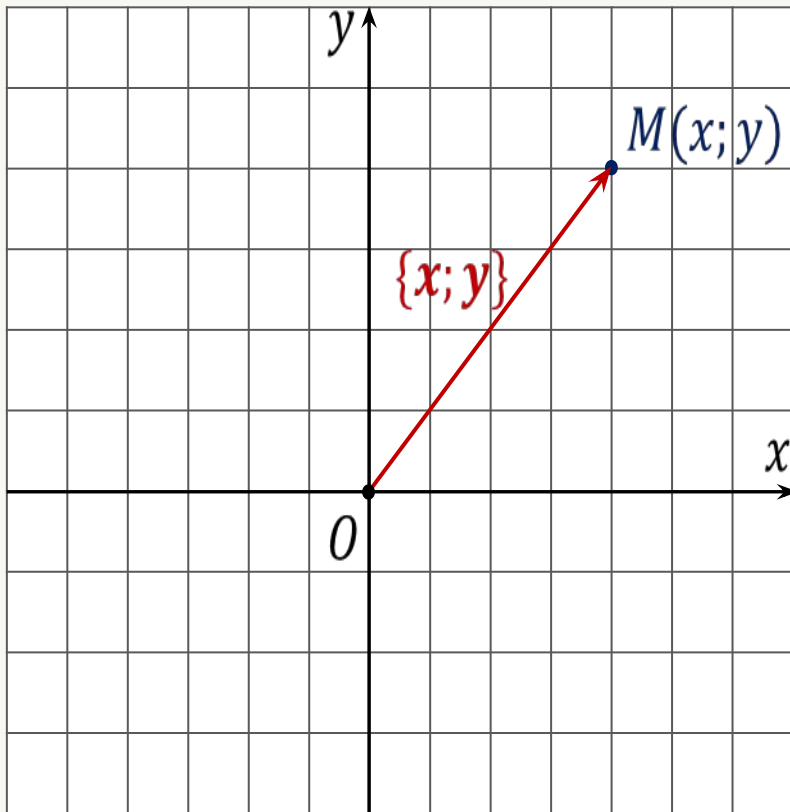
$$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad k$$

$$k\vec{a} \{kx_1; ky_1; kz_1\}$$

Позволяют определять
координаты любого
вектора,
представленного в виде
алгебраической суммы
данных векторов
с известными
координатами

Связь между координатами векторов и координатами точек



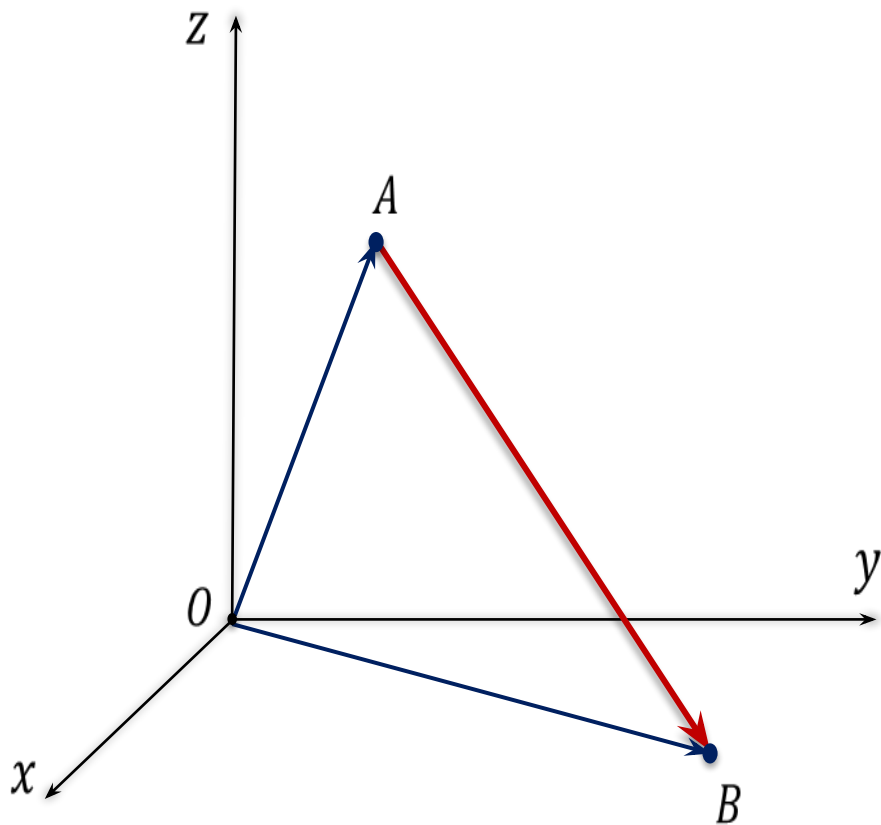
\overrightarrow{OM}
радиус-вектор точки M

$M(x; y)$

\Leftarrow

$\overrightarrow{OM} \{x; y\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



$$\overrightarrow{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\overrightarrow{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$$

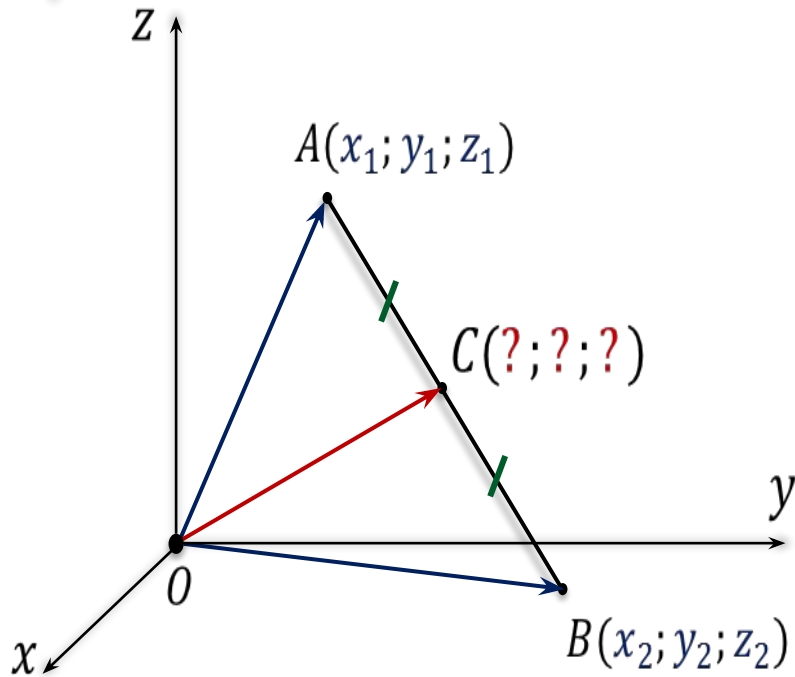
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала

Простейшие задачи в координатах

1. Определение координат середины отрезка



Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

\vec{OA} – радиус-вектор точки A

\vec{OB} – радиус-вектор точки B

$\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$

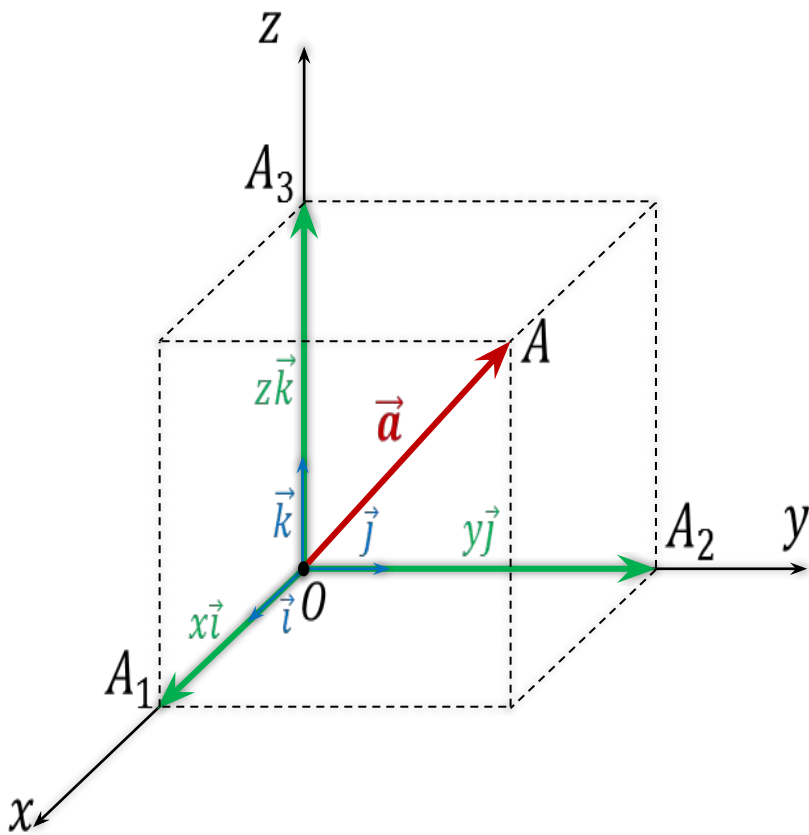
$\vec{OA} + \vec{OB} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

$$\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right\}$$

$$\vec{OC} \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right)$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a} \{x; y; z\}$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задача. Вычислить длину вектора \overrightarrow{AB} .

а) $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$;

б) $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8)$.

$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Решение.

а) $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \{1 - (-1); -2 - 0; 3 - 2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{2; -2; 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3$$

б) $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8)$

$$\overrightarrow{AB} \{-34 - (-35); -5 - (-17); 8 - 20\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{1; 12; -12\}$$

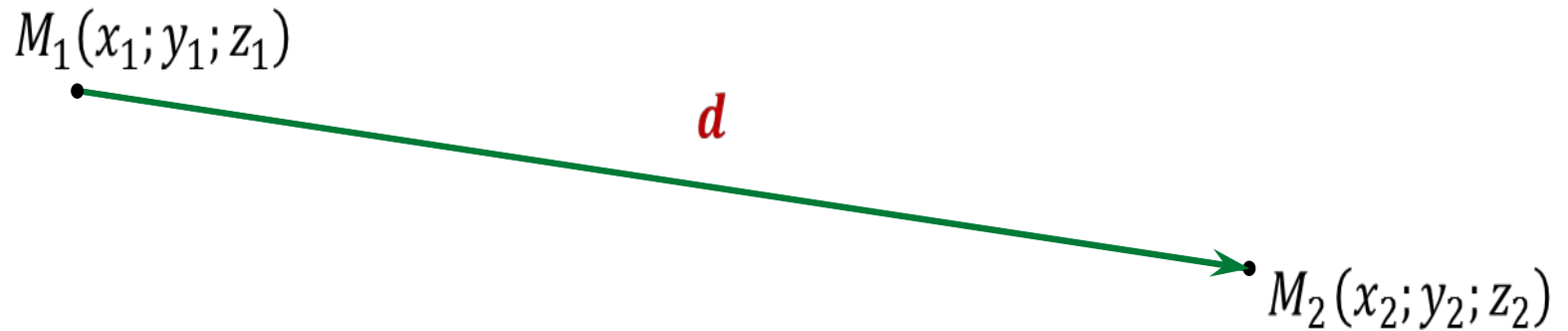
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 144 + 144}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{289}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 17$$

3. Определение расстояния между двумя точками



$$\overrightarrow{M_1M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

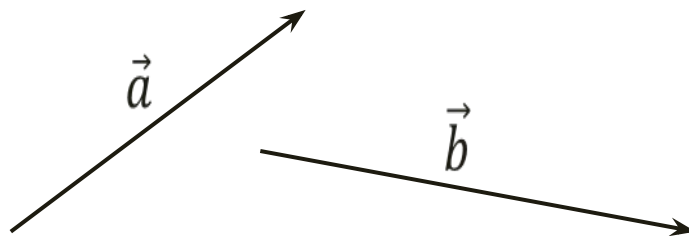
$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = M_1M_2 = d$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов –
произведение их длин на косинус угла между

НИМИ



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

Скалярное произведение векторов в координатах

$\vec{a} \{x_1; y_1\}$

$\vec{b} \{x_2; y_2\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Скалярное произведение векторов в координатах

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{a} \{1; -1; 2\}$$

$$\vec{b} \{-1; 1; 1\}$$

$$\vec{c} \{5; 6; 2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

выражается формулой: $\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 \neq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон)

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)