

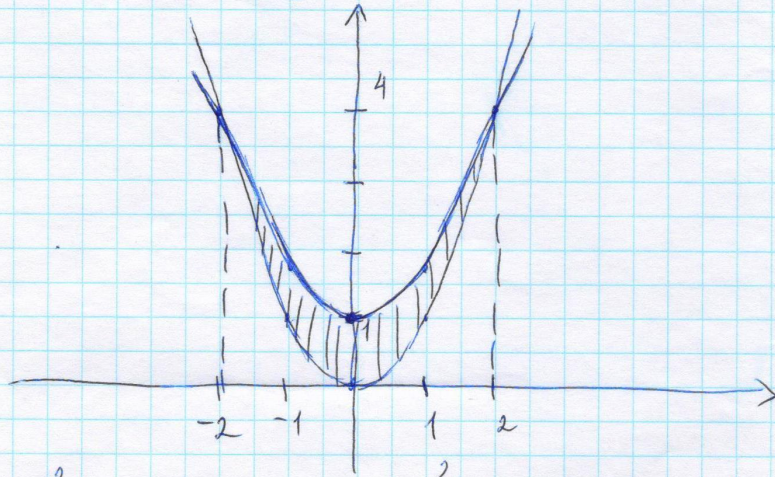
11.46

$$y = x^2, \quad y = 1 + \frac{3}{4}x^2$$

Найдем точки пересечения:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 + \frac{3}{4}x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ 1 + \frac{3}{4}x^2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ \frac{1}{4}x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x_1 = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow (-2; 4), (2; 4)$$



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(1 + \frac{3}{4}x^2 - x^2\right) dx = \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \\ &= \left(x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = 2 - \frac{2^3}{12} - \left(-2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{(-2)^3}{3}\right) = \\ &= 2 - \frac{8}{12} + 2 - \frac{8}{12} = 4 - \frac{16}{12} = 4 - \frac{4}{3} = 4 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

**\* Тема урока:  
Матрицы и  
действия над  
матрицами**

Преподаватель: Шеметова Ирина Геннадьевна

**Матрицей** размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел (элементов матрицы), содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Если  $m=n$ , то матрицу называют **квадратной** матрицей порядка  $n$ .

Обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(размера  $m \times n$ )

Элемент матрицы -

$$a_{ij}$$

где  $i$  - номер строки,  $j$  - номер столбца

Например, матрица A размера 2x3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Матрица B размера 3x2

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются *равными*, если они совпадают поэлементно

# Виды матриц

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

- матрица **противоположная** матрице A

$[a_{11} \quad a_{12} \dots \quad a_{1n}]$  - **Матрица -строка** (состоящая из одной строки)

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- **Матрица-столбец** (состоящая из одного столбца)

# Виды матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- **нулевая матрица** (все элементы равны 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **диагональная матрица** (если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны 0)

Элементы матрицы , у которых номер столбца равен номеру строки ( $i=j$ ) называются диагональными и образуют главную диагональ.

# Виды матриц

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{ *единичная матрица* (если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны 1)}$$

Запишите диагональную матрицу третьего порядка

Запишите единичную матрицу третьего порядка



# Операции над матрицами

## 1. Сложение матриц

*Суммой* матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  одинаковых размеров называется матрица  $C = (c_{ij})$  тех размеров, у которой  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , для любых  $i, j$ .  
 $C = A + B$  (СЛОЖЕНИЕ ВОЗМОЖНО ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА СКЛАДЫВАЮТСЯ МАТРИЦЫ ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА)

Свойства сложения матриц:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = A$$

$A + (-A) = 0$ , для любых  $A, B, C$  одинаковых размеров.

Пример 1: Найти сумму матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Пример 2: Найти разность матриц:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**Чтобы вычесть из матрицы A матрицу B, надо к матрице A прибавить матрицу, противоположную матрице B.**

$$A - B = A + (-B)$$

Пример 3: Найти разность  
матриц В-А

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

# Операции над матрицами

## 2. Умножение матрицы на число

*Произведением* матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $k$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  тех же размеров, у которой  $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$  для любых  $i, j$ .

$$C = k \cdot A$$

*Свойства умножения матрицы на число:*

1)  $1 \cdot A = A$

2)  $\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

3)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

4)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

для любых  $A, B$  одинаковых размеров, любых действительных чисел  $\alpha, \beta$

Пример 4:

Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Найти матрицу  $C = 2A$ .

# Операции над матрицами

## 3. Умножение матриц

*Произведением* матрицы  $A = (a_{ik})$  размеров  $m \times n$  на матрицу  $B = (b_{kj})$  размеров  $n \times r$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размеров  $m \times r$ , у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

$C = AB$  (УМНОЖЕНИЕ ВОЗМОЖНО ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ЧИСЛО СТОЛБЦОВ ПЕРВОЙ МАТРИЦЫ РАВНО ЧИСЛУ СТРОК ВТОРОЙ)

Свойства умножения матриц:

1.  $AE = EA = A$
2.  $A0 = 0A = 0$
3.  $(AB)D = A(BD)$
4.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5.  $(A + B)D = AD + BD$
6.  $D(A + B) = DA + DB$  (при условии, что все указанные операции имеют смысл). Для квадратных матриц  $AB \neq BA$

Пример 5: Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найти произведение матриц  
A и B.



Пример 6: Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти произведение матриц  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  (если возможно).

# Операции над матрицами

## 4. Транспонирование матриц

*Транспонирование* матриц (переход от матрицы  $A$  к матрице  $A^T$ , в которой строки и столбцы поменялись местами)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A^T$  – транспонированная матрица.

**Свойства транспонирования:**

1)  $(A^T)^T = A$

2)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3)  $(A + B)^T = A^T + B^T$

4)  $(AB)^T = B^T A^T$

Пример 7:

Найти  $A + B^T$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 8:

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти:  $2A + 3B^T - C$ ;

$$(A - B)^T + 2C.$$

## Домашнее задание.

1. Учить определения.
2. Учебник Кремера (стр 10-17)  
читать
3. Выполнить упражнения на  
предыдущем слайде пример  
7 и 8