Лекция

# Тема: «Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами»

## План

1. *Основные сведения о матрицах*
2. *Операции над матрицами*
3. *Свойства алгебраических операций над матрицами*

# Применение матричного исчисления

- Матричное исчисление положено в основу математического аппарата **квантовой и статической механики**, **квантовой физики, химии, радиоэлектроники.** Одно из первых направлений в квантовой механике, заложенное Гейзенбергом, даже носило название

  МАТРИЧНОЙ МЕХАНИКИ.

- *Матричное исчисление* значительно упрощает описание электромагнитных процессов в цепях
- *Матричное исчисление* облегчает решение системы линейных уравнений
- *Матричное исчисление* широко применяется при анализе электронных схем

- *Матричное исчисление* играет большую роль в решении ряда прикладных задач. На нем базируется теория колебаний в электрических, акустических и механических системах, где фундаментальное значение имеют характеристические уравнения, собственные значения и собственные векторы.

- К задачам линейной алгебры сводятся многочисленные алгоритмы обработки экспериментальных данных, минимизации линейных форм, различные задачи теории прочности, упругости и пластичности.

## 1. Основные сведения о матрицах.

***Определение:*** Система $m \times n$ действительных чисел (или *элементов матрицы*), расположенных в прямоугольную таблицу из $m$ строк и $n$ столбцов, называется *матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Матрицу можно записывать коротко:**

*в виде* $A = \{a_{ij}\}\ 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$

*или в виде* $A =,\|a_{ij}\|$

где $a_{ij}$ - элемент данной матрицы

Элементы матрицы $a_{ij}$ образуют столбцы и строки.

Первый индекс $i$ указывает номер строки,

а второй $j$ – номер столбца, на пересечении

которых и стоит элемент $a_{ij}$

**Например,** элемент $a_{23}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

находится на пересечении второй строки и третьего столбца

и равен $a_{23} = -2$

Элемент $a_{13} = 10$

**Набор** $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

**называют** $i - ой$ **строкой матрицы** $A$**.**

**Набор** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \ldots \\ a_{мj} \end{pmatrix}$ **называют** $j - ым$

**столбцом.**

**Если хотят указать размер матрицы, то пишут** $\underset{m\times n}{A}$

**это означает, что в матрице** $m$ **строк и** $n$ **столбцов.**

**Например**, матрица $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

имеет порядок $m \times n = 2 \times 3$, т.е. $\underset{2\times 3}{B}$.

Элемент $b_{22}$ данной матрицы равен (?)

**МОЛОДЦЫ!**

Верно, $b_{22} = 0$

## Типы матриц

1. Если матрица содержит только одну строку – **это *вектор-строка* (или *строчная* матрица).**

**Например,** матрица $\underset{1\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

имеет порядок

$$m \times n = 1 \times 3$$

2. Если один столбец – это ***вектор-столбец* (или *столбцевая* матрица).**

**М**атрица $\underset{2\times 1}{D} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ имеет порядок $m \times n = 2 \times 1$

3. Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной***, а число – ее порядком. $m = n$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы называются диагональными и образуют главную диагональ матрицы.

4. Матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны 0, называется *диагональной* и записывается в виде

$$Diag_n(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

**Например,** $\underset{3\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$ называется *единичной*

и обозначается

$$E = \left\| \delta_{ij} \right\|, \textit{где} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } i = j \\ 0, \textit{если } i \neq j \end{cases}$$

или

$$E = Diag_n(1,1,...,1)$$

6. *Нулевая* матрица (0) размера $m \times n$ есть матрица этого размера, все элементы которой равны нулю:

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Если нули будут под главной диагональю или над главной диагональю, то матрица называется *треугольной*:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

***Определение.*** Две матрицы *равны*, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах (при этом число строк и столбцов должно быть одинаковым). **То есть размеры и элементы двух равных матриц совпадают.**

# 2. Операции над матрицами

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1. ***Сложение матриц.*** *Суммой* двух матриц *A* и *B* с ***одинаковым количеством строк и столбцов*** называется матрица *C*, элементы которой определяются равенством,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1 \ldots m,\ j = 1 \ldots n$$

# Например,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 6+(-6) & -1+6 & 0+2 \\ 2+1 & -2+0 & 1+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

# Замечание

- Строго говоря, операции вычитания матриц одного порядка *A* и *B* как таковой не существует.

  **Разность двух матриц по сути есть сумма матрицы *A* и матрицы *B*, предварительно умноженной на минус единицу:** $A - B = A + (-1)B$

2. ***Произведением*** матрицы $A$ на число $\lambda$ называется матрица, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы $A$ на число $\lambda$: $\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}$

если $A = \{a_{ij}\}$, то, по определению для любого $\lambda \in R$

**Например**, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda = 2$

то

$$B = 2A = 2 * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. ***<u>Произведением</u>*** матрицы А, имеющей $m$ строк и $q$ столбцов, на матрицу $B$, имеющую $q$ строк и $n$ столбцов, называется матрица $C$, имеющая $m$ строк и $n$ столбцов, у которой элемент $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А и j-ого столбца матрицы В:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \, ,$$

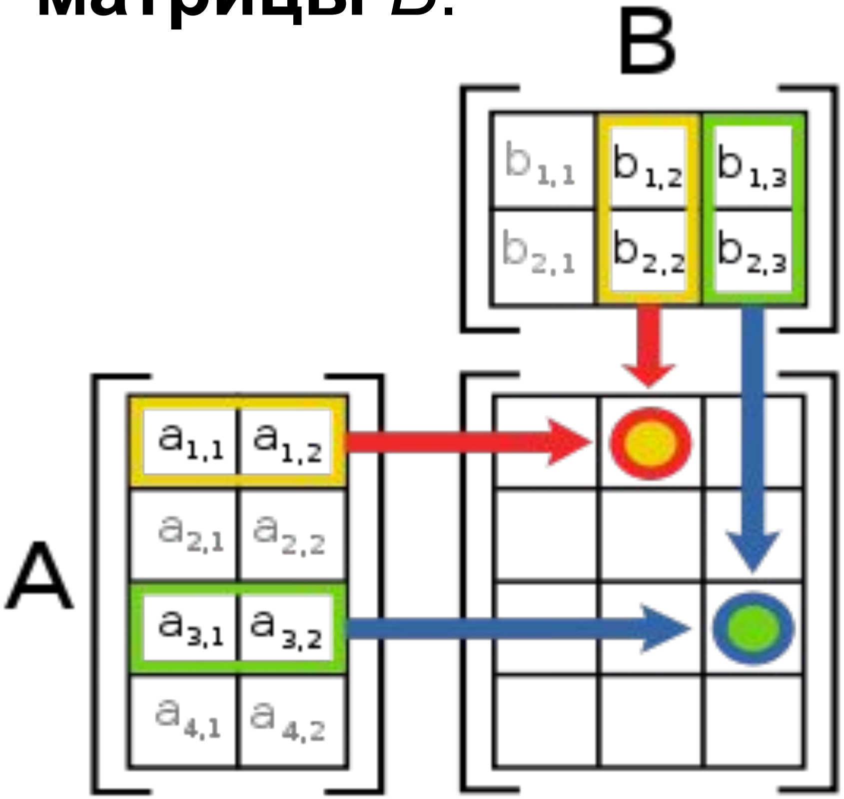
**ЗАМЕЧАНИЕ:**

1) **если число столбцов первой матрицы и число строк второй матрицы не совпадают, то произведение не определено, т. е. не существует.**

**2) размерность полученной матрицы быстро определяется с использованием записи:**

$$\underset{m\times q}{A} \times \underset{q\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

**Произведение матриц *AB* состоит из всех возможных комбинаций скалярных произведений строк матрицы *A* и столбцов матрицы *B*.**




$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23}$$

**В общем случае, произведение матриц не является коммутативной операцией. К примеру, элемент произведения матриц вычисляется следующим образом** $x_{3,4}$

$$\overset{3\times4\text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \overset{4\times5\text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot \end{bmatrix}} = \overset{3\times5\text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{3,4} & \cdot \end{bmatrix}}$$

$$x_{3,4} = (1, 2, 3, 4) \cdot (a, b, c, d) = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + 4 \cdot d$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти произведение 1) $A \cdot B$ и 2) $B \cdot C$

**РЕШЕНИЕ**

1)Укажем размеры заданных матриц:

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 3}{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{1\times 3}{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) Произведение матриц $A \cdot B = D$ существует:

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B} = \underset{2\cdot 3}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}.$$

## 3)Найдём элементы матрицы D:

$$d_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = -9$$

$$d_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$d_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 = 11$$

$$d_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 14$$

$$d_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) = -12$$

$$d_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 22$$

4) Запишем матрицу D:

$$\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 3}{B}=\underset{2\times 3}{D}=\begin{pmatrix}-9 & 3 & 11\\ 14 & -12 & 22\end{pmatrix}.$$

5) $$\underset{2\times3}{B}\cdot\underset{3\times1}{C}=\underset{2\times1}{M}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 6\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1)+0\cdot2+6\cdot3\\ 5\cdot(-1)+(-3)\cdot2+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+18\\ -5-6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38\\ -8\end{pmatrix}.$$

4. ***Умножение на единичную матрицу*.**

Единичная матрица обладает замечательным свойством, а именно: умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу не меняет матрицу.

.

**Замечание:** для произвольной матрицы и единичной матрицы переместительный закон умножения выполняется. Это свойство и объясняет ее название «единичная»: при умножении матриц она обладает таким же свойством, как число 1 при умножении чисел.

$$A \times E = E \times A = A$$

## 5. *Транспонирование матриц*

Транспонированной к матрице $\underset{m\times n}{A} = \left[a_{ij}\right]$ называется матрица $\underset{n\times m}{A^T}$, в которой строки и столбцы поменялись местами.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## ***6. Возведение в степень***

Пусть $m$ – натуральное число. Для любой квадратной матрицы А степенью $m$ матрицы А называется матрица

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \quad раз}$$

## *3. Свойства алгебраических операций над матрицами*

*1. Свойства операций сложения*

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (ассоциативность сложения)

2. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения)

3. A+ $[0]=A$ для любой матрицы A того же размера, что и нулевая матрица $[0]$.

4. Для любой матрицы A существует матрица $-A=\left[-a_{ij}\right]$, для которой $A+(-A)=[0]$.

*2. Свойства операции умножения.*

1. $A(BC)=(AB)C$ (ассоциативность умножения)

2. Равенство $AB=BA$ выполняется не всегда, то есть умножение матриц некоммутативное.

Например, для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 * 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$$

3. *Дистрибутивность*. Для любых матриц $A, B, C, A_1, B_1, C_1$, у которых определены соответственно операции сложения и умножения, $A(B+C) = AB + AC$, $(A_1 + B_1)C_1 = A_1C_1 + B_1C_1$

4. *Умножение матрицы на число.*

1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

5. *Свойства операции транспонирования*

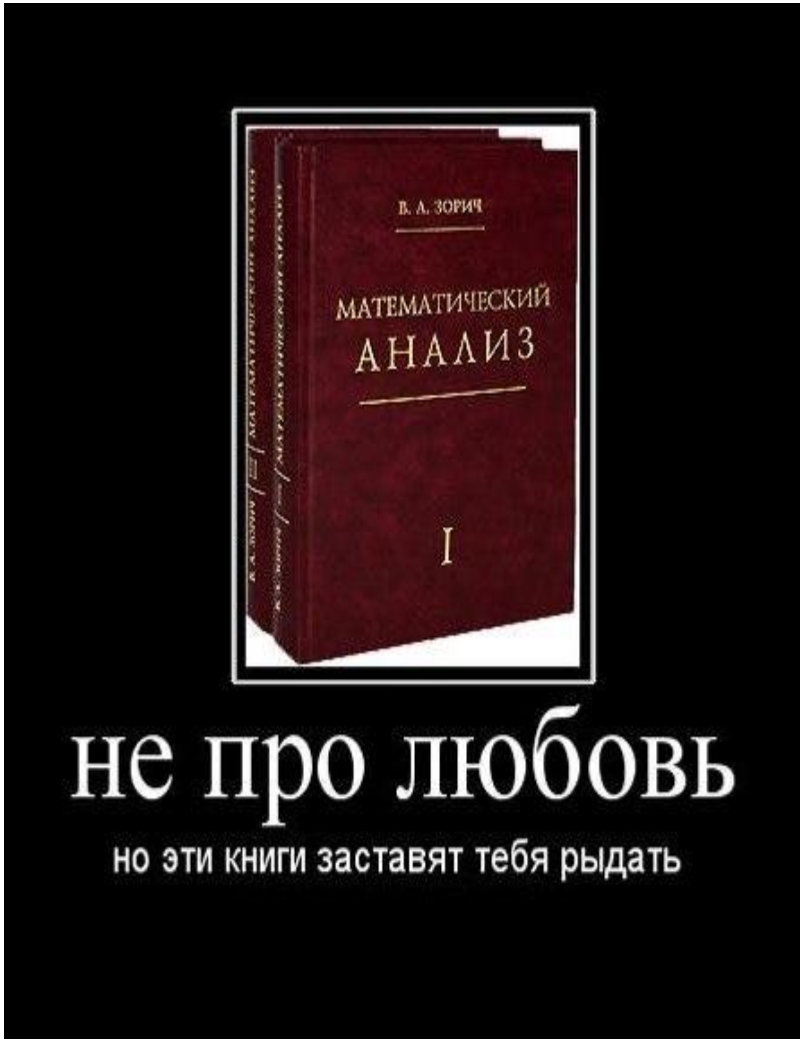
1) $(A')' = A$

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$

3) $(A+B)' = A' + B'$

4) $(AB)' = B'A'$

## *ЛИТЕРАТУРА*




**Математики шутят**

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.II. Гл.XXI §§2,3,4
2. Данко П.Е. и др. Ч.I, Гл.IY, §2