

# Лекция

Тема: «**Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами**»



## **План**

- 1. Основные сведения о матрицах**
- 2. Операции над матрицами**
- 3. Свойства алгебраических операций над матрицами**

# Применение матричного исчисления

- Матричное исчисление положено в основу математического аппарата **квантовой и статической механики, квантовой физики, химии, радиоэлектроники.** Одно из первых направлений в квантовой механике, заложенное Гейзенбергом, даже носило название **МАТРИЧНОЙ МЕХАНИКИ.**

- *Матричное исчисление* значительно упрощает **описание электромагнитных процессов в цепях**
- *Матричное исчисление* облегчает **решение системы линейных уравнений**
- *Матричное исчисление* широко применяется при **анализе электронных схем**

- *Матричное исчисление* играет большую роль в решении ряда прикладных задач. На нем базируется теория колебаний в электрических, акустических и механических системах, где фундаментальное значение имеют характеристические уравнения, собственные значения и собственные векторы.

- К задачам линейной алгебры сводятся многочисленные алгоритмы обработки экспериментальных данных, минимизации линейных форм, различные задачи теории прочности, упругости и пластичности.

# 1. Основные сведения о матрицах.

**Определение:** Система  $m \times n$  действительных чисел (или элементов матрицы), расположенных в прямоугольную таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



**Матрицу можно записывать кратко:**

в виде  $A = \{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

или в виде  $A = \left\| a_{ij} \right\|$

где  $a_{ij}$  - элемент данной матрицы

Элементы матрицы  $a_{ij}$  образуют столбцы и строки.

Первый индекс  $i$  указывает номер строки, а второй  $j$  – номер столбца, на пересечении которых и стоит элемент  $a_{ij}$ .

Например, элемент  $a_{23}$  матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

находится на пересечении второй строки и  
третьего столбца

и равен  $a_{23} = -2$

Элемент  $a_{13} = 10$

**Набор**  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$   
**называют**  $i$  – **ой** строкой матрицы  $A$ .

**Набор**  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$  **называют**  $j$  – **ым**

**столбцом.**

Если хотят указать размер матрицы,

то пишут

$$A_{m \times n}$$

это означает, что в матрице  $m$  строк  
и  $n$  столбцов.

Например, матрица  $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

имеет порядок  $m \times n = 2 \times 3$ , т.е.  $B_{2 \times 3}$ .

Элемент  $b_{22}$  данной матрицы равен (?)

**МОЛОДЦЫ!**

Верно,  $b_{22} = 0$

## Типы матриц

1. Если матрица содержит только одну строку – это **вектор-строка** (или **строчная матрица**).

Например, матрица  $C = (3 \quad 7 \quad 2)$   
 $1 \times 3$

имеет порядок

$$m \times n = 1 \times 3$$

2. Если один столбец – это **вектор-столбец** (или **столбцовая матрица**).

Матрица  $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$  имеет порядок  $m \times n = 2 \times 1$



3. Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**,  
а число  $n$  – ее **порядком**.

Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы  
называются диагональными и образуют главную  
диагональ матрицы.

4. Матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны 0, называется *диагональной* и записывается в виде

$$Diag_n (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

**Например,**

$$C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Диагональная матрица вида

*единичной*

и обозначается

ИЛИ

$$E = \text{Diag}_n(1, 1, \dots, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 1 & \times & 0 \\ & & \times & \\ 0 & 0 & \times & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{называется}}{=} E$$

6. Нулевая матрица  $(0)$  размера  $m \times n$  есть матрица этого размера, все элементы которой равны нулю:

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Если нули будут под главной диагональю или над главной диагональю, то матрица называется *треугольной*:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Две матрицы *равны*, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах (при этом число строк и столбцов должно быть одинаковым). **То есть размеры и элементы двух равных матриц совпадают.**

## 2. Операции над матрицами

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1. **Сложение матриц.** Суммой двух матриц  $A$  и  $B$  с одинаковым количеством строк и столбцов называется матрица  $C$ , элементы которой определяются равенством,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1 \boxtimes m, j = 1 \boxtimes n$$

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 6 + (-6) & -1 + 6 & 0 + 2 \\ 2 + 1 & -2 + 0 & 1 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

# Замечание

- Строго говоря, операции вычитания матриц одного порядка  $A$  и  $B$  как таковой не существует.

**Разность двух матриц по сути есть сумма матрицы  $A$  и матрицы  $B$ , предварительно умноженной на минус единицу:**  $A - B = A + (-1)B$



2. Произведением матрицы  $A$  на число  $\lambda$  называется матрица, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы  $A$

на число  $\lambda$ :  $\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}$

если  $A = \{a_{ij}\}$ , то, по определению  
для любого  $\lambda \in R$

**Например, если**  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   $\lambda = 2$

то

$$B = 2A = 2 * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Произведением матрицы  $A$ , имеющей  $m$  строк и  $q$  столбцов, на матрицу  $B$ , имеющую  $q$  строк и  $n$  столбцов, называется матрица  $C$ , имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, у которой элемент  $c_{ij}$  равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -ого столбца матрицы  $B$ :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj},$$

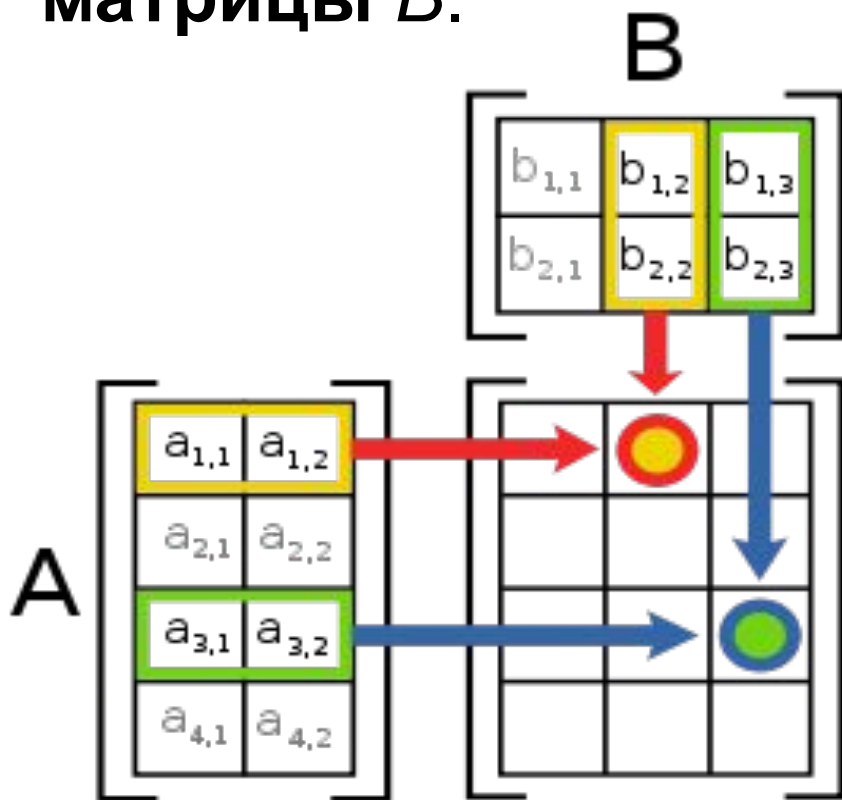
## **ЗАМЕЧАНИЕ:**

**1) если число столбцов первой матрицы и число строк второй матрицы не совпадают, то произведение не определено, т. е. не существует.**

**2) размерность полученной матрицы быстро определяется с использованием записи:**

$$\begin{matrix} A \times B = C \\ m \times q \quad q \times n \quad m \times n \end{matrix}$$

Произведение матриц  $AB$  состоит из всех возможных комбинаций скалярных произведений строк матрицы  $A$  и столбцов матрицы  $B$ .



$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23}$$

В общем случае, произведение матриц не является коммутативной операцией. К примеру, элемент произведения матриц вычисляется следующим образом

 $x_{3,4}$ 

$$\begin{array}{c} 3 \times 4 \text{ matrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \times 5 \text{ matrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} 3 \times 5 \text{ matrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{3,4} & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x_{3,4} = (1, 2, 3, 4) \cdot (a, b, c, d) = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + 4 \cdot d$$

Например,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Найти произведение 1)  $A \cdot B$  2)  $B \cdot C$

### РЕШЕНИЕ

1) Укажем размеры заданных матриц:

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) Произведение матриц  $A \cdot B = D$  существует:

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = D_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}.$$

### 3) Найдём элементы матрицы D:

$$d_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = -9$$

$$d_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$d_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 = 11$$

$$d_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 14$$

$$d_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) = -12$$

$$d_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 22$$



4) Запишем матрицу D:

$$A \cdot B = D = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 11 \\ 14 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 5) \quad B \cdot C = M &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 + 18 \\ -5 - 6 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 4. Умножение на единичную матрицу.

Единичная матрица обладает замечательным свойством, а именно: умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу не меняет матрицу.

**Замечание:** для произвольной матрицы и единичной матрицы переместительный закон умножения выполняется. Это свойство и объясняет ее название «единичная»: при умножении матриц она обладает таким же свойством, как число 1 при умножении чисел.

$$A \times E = E \times A = A$$

## 5. Транспонирование матриц

Транспонированной к матрице  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  называется матрица  $A^T$ , в которой строки и столбцы поменялись местами.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. Возведение в степень

Пусть  $m$  – натуральное число. Для любой квадратной матрицы  $A$  степенью  $m$  матрицы  $A$  называется матрица

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}$$

### 3. Свойства алгебраических операций над матрицами

#### 1. Свойства операций сложения

1.  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (ассоциативность сложения)

2.  $A + B = B + A$  (коммутативность сложения)

3.  $A + [0] = A$  для любой матрицы  $A$  того же размера, что и нулевая матрица  $[0]$ .

4. Для любой матрицы  $A$  существует матрица  $-A = [-a_{ij}]$ , для которой  $A + (-A) = [0]$ .

#### 2. Свойства операции умножения.

1.  $A(BC) = (AB)C$  (ассоциативность умножения)

2. Равенство  $AB = BA$  выполняется не всегда, то есть умножение матриц некоммутативное.

Например, для матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$$



3. *Дистрибутивность.* Для любых матриц  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$ , у которых определены соответственно операции сложения и умножения,  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(A_1 + B_1)C_1 = A_1C_1 + B_1C_1$

4. *Умножение матрицы на число.*

$$1) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$2) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$3) \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$4) \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

5. *Свойства операции транспонирования*

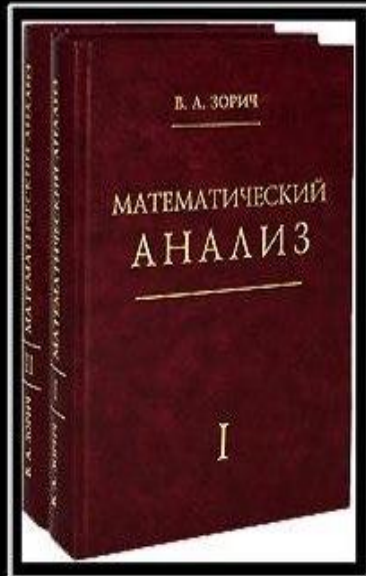
$$1) \quad (A')' = A$$

$$2) \quad (\lambda A)' = \lambda A'$$

$$3) \quad (A + B)' = A' + B'$$

$$4) \quad (AB)' = B'A'$$

□ *ЛИТЕРАТУРА*



не про любовь

но эти книги заставят тебя рыдать

**Математики  
шутят**





## □ *ЛИТЕРАТУРА*

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.II. Гл.ХХI §§2,3,4
2. Данко П.Е. и др. Ч.I, Гл.IY, §2