Теория вероятностей и математическая статистика

Острикова Дарья Юрьевна,
к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей

Условная вероятность.
Независимость событий.
Формула сложения вероятностей.
Формула умножения вероятностей.

IAMCT

Определение условной вероятности Независимость событий

<u>Опр.</u> ***Условной вероятностью*** события A при условии события В (причем Р(В)≠0) называется

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.\ ;\quad P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

<u>Опр.1.</u> События A и B называются ***независимыми***, если

$$P(A\mid B)=P(A).$$

<u>Опр.2.</u> События A и B называются ***независимыми***, если

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Утверждение. Если события A и B являются ***независимыми***, тогда независимыми также являются события:

$$a)\ A\ и\ \bar{B};\qquad б)\ \bar{A}\ и\ B;\qquad в)\ \bar{A}\ и\ \bar{B}.$$

Независимость событий в совокупности

<u>Опр.</u> События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность пересечения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; …; вероятность пересечения всех событий равна произведению вероятностей.

Пример, показывающий, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности

Подбрасывается тетраэдр, на трёх гранях которого написано по одной цифре 1, 2, 3 соответственно, а на четвёртой присутствуют все 3 цифры одновременно. Рассматриваются события A_i = {тетраэдр упадёт на грань, на которой присутствует цифра i}, $i = 1...3$. Показать, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} \quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} \quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

Пример, показывающий, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности

Имеем

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)\cdot P(A_2)$$

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)\cdot P(A_3)$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)\cdot P(A_3)$$

Исходя из проведённых выкладок, делаем вывод о том, что попарная независимость есть.

Проверим теперь, есть ли независимость в совокупности:

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\neq P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\quad =>$$

Теоремы умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей для независимых событий

Пусть события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимые в совокупности события. Тогда

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \dots P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей для произвольных событий

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – произвольные события. Тогда

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1A_2) \dots \times$$
$$\times P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1}).$$

Теоремы сложения вероятностей (1/2)

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПОПАРНО НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Пусть события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны (т.е. $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$). Тогда

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... P(A_n).$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ, НО НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ СОБЫТИЙ

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – совместные, но независимые в совокупности события. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + ... A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \times (1 - P(A_2)) \times (1 - P(A_3)) ... (1 - P(A_n)).$$

Теоремы сложения вероятностей (2/2)

Теорема сложения вероятностей для произвольных событий

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные события. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - \ldots$$

$$+ (-1)^n \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ – для двух произвольных событий

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) +$$
$+ P(ABC)$ – для трёх произвольных событий.

Пример на применение теорем сложения и умножения вероятностей (1/2)

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие A_i — выход из строя элемента i, $i=\overline{1,6}$. Выразите события A и $\overline{A}$ через события A_i, если A — выход из строя всей схемы.

Ответ: $A = A_1A_2 \cup A_5(A_3 \cup A_4) \cup A_6$,
$\overline{A} = (\overline{A_1A_2})(\overline{A_5(A_3 \cup A_4)})\overline{A_6}$.

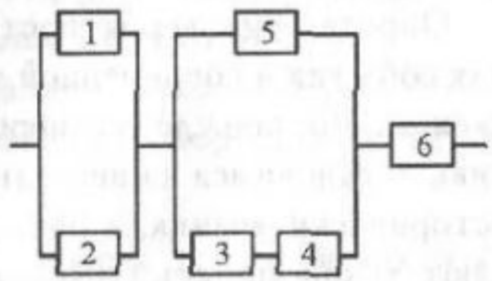
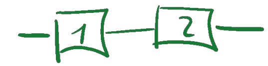


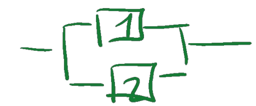
Рис. 1.5

I II

1) 

$A = A_1 \cup A_2$

$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1-(1-P(A_1))\cdot(1-P(A_2))$

2) 

$A = A_1 \cap A_2$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2)$

A_i - независимые, но совместные

Дано: $P(A_i)$, $i=1,\dots,6$
Найти: $P(A)$ - вся цепь откажет.

Решение

Пример на применение теорем сложения и умножения вероятностей (2/2)

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие A_i — выход из строя элемента i, $i = \overline{1,6}$. Выразите события A и $\overline{A}$ через события A_i, если A — выход из строя всей схемы.

Ответ: $A = A_1A_2 \cup A_5(A_3 \cup A_4) \cup A_6$, $\overline{A} = \overline{(A_1A_2)}\,\overline{(A_5(A_3 \cup A_4))}\,\overline{A_6}$.

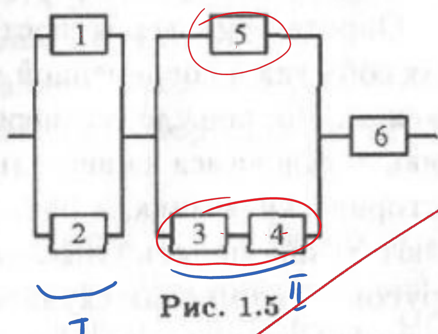


Рис. 1.5

$$A_I = A_1 \cap A_2$$

$$P(A_I) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$A_{II} = A_5 \cap (A_3 \cup A_4)$$

$$P(A_{II}) = P(A_5 \cap (A_3 \cup A_4)) = P(A_5) \cdot P(A_3 \cup A_4) = P(A_5) \cdot (1-(1-P(A_3)) \cdot (1-P(A_4)))$$

$$A = A_I \cup A_{II} \cup A_6$$

$$P(A) = 1 - (1-P(A_I)) \cdot (1-P(A_{II})) \cdot (1-P(A_6))$$

Формула полной вероятности.
Формула Байеса.

Формула полной вероятности (1/2)

Пусть в результате опыта может произойти одно из n событий, обладающих свойствами:

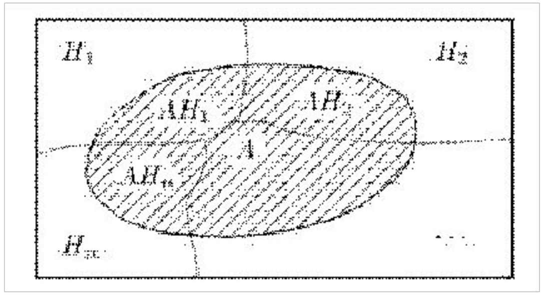
1) события несовместны, т.е.

$$H_i H_j = \varnothing, \; i \neq j.$$

2) события составляют полную группу событий, т.е.

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega.$$

Опр. События, удовлетворяющие свойствам 1) и 2), называются ***гипотезами***.



Формула полной вероятности (2/2)

Пусть имеется некоторое событие A и известны вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, ..., $P(A \mid H_n)$.

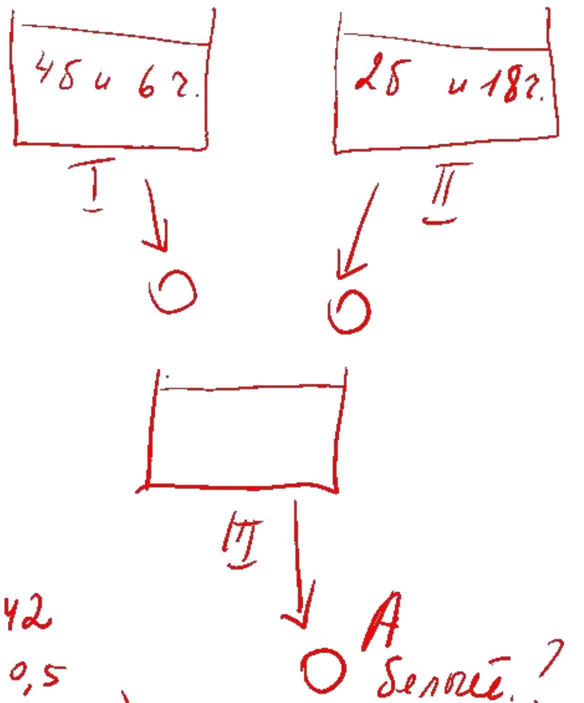
Тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots$$
$$\ldots + P(H_n)P(A \mid H_n).$$

Задача на формулу полной вероятности

Условие:

В первой урне **10** шаров : **4** белых и **6** чёрных. Во второй урне **20** шаров : **2** белых и **18** чёрных. Из каждой урны выбирают случайным образом по одному шару и кладут в третью урну. Затем из третьей урны случайным образом выбирают один шар. Найти вероятность того, что извлечённый из третьей урны шар будет белым.



$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

$H_1 = \{2б.\}$

$H_2 = \{2ч.\}$

$H_3 = \{1б и 1ч.\}$

$$P(H_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{2}{20} = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

$$P(H_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{18}{20} = \frac{54}{100} = 0{,}54$$

$$P(H_3) = \frac{4}{10}\cdot\frac{18}{20} + \frac{6}{10}\cdot\frac{2}{20} = 0{,}42$$

$$P(A) = \underbrace{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}_{0{,}04\,\cdot\,1} + \underbrace{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}_{0{,}54\,\cdot\,0} + \underbrace{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}_{0{,}42\,\cdot\,0{,}5} = 0{,}25$$

$P(A|H_1) = 1$ $\quad P(A|H_2) = 0$ $\quad P(A|H_3) = \frac{1}{2}$

Формула Байеса

Пусть опыт завершён, и известно, что в результате опыта произошло событие А. Тогда можно с учётом этой информации переоценить вероятности гипотез:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n)}$$

Задача на формулу Байеса

1. В урну, содержащую 2 шара неизвестного цвета, опустили белый шар. После этого из этой урны извлекаем 1 шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из урны, будет белым. A

2. Шар, извлечённый из вышеописанной урны, оказался белым. Найти вероятности того, ***что в урне до перекладывания было 0 белых шаров, 1 белый шар и 2 белых шара***.

2 шара

О белых?

1) $P(A)$ – ?

$H_1 = \{$в урне 2 б. шара$\}$ $\quad P(H_1) = \frac{1}{3}$

$H_2 = \{$в урне 1 б шар., а 2-ой не белый$\}$ $\quad P(H_2) = \frac{1}{3}$

$H_3 = \{$оба не белые$\}$ $\quad P(H_3) = \frac{1}{3}$

$P(A|H_1) = 1$

$P(A|H_2) = \frac{2}{3}$

$P(A|H_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$$

Вопросы