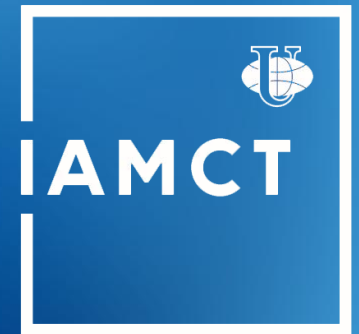




RUDN  
university

# Теория вероятностей и математическая статистика



Острикова Дарья Юрьевна,  
к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной  
информатики и теории вероятностей



RUDN  
university

Условная вероятность.  
Независимость событий.  
Формула сложения вероятностей.  
Формула умножения вероятностей.



# Определение условной вероятности

## Независимость событий

Опр. *Условной вероятностью* события  $A$  при условии события  $B$  (причем  $P(B) \neq 0$ ) называется

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Опр.1. События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если

$$P(A|B) = P(A).$$

Опр.2. События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Утверждение.** Если события  $A$  и  $B$  являются *независимыми*, тогда независимыми также являются события:

$$a) A \text{ и } \bar{B}; \quad б) \bar{A} \text{ и } B; \quad в) \bar{A} \text{ и } \bar{B}. \quad 3$$

# Независимость событий в совокупности

Опр. События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *независимыми в совокупности*, если вероятность пересечения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; ...; вероятность пересечения всех событий равна произведению вероятностей.

# Пример, показывающий, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности

Подбрасывается тетраэдр, на трёх гранях которого написано по одной цифре 1, 2, 3 соответственно, а на четвёртой присутствуют все 3 цифры одновременно. Рассматриваются события  $A_i = \{\text{тетраэдр упадёт на грань, на которой присутствует цифра } i\}$ ,  $i = 1 \dots 3$ . Показать, что события  $A_1, A_2, A_3$  попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} \quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} \quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

# Пример, показывающий, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности

*Имеем*

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Исходя из проведённых выкладок, делаем вывод о том, что попарная независимость есть.

Проверим теперь, есть ли независимость в совокупности:

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

# Теоремы умножения вероятностей

## **ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ**

Пусть события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимые в совокупности события. Тогда

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \dots P(A_n).$$

## **ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СОБЫТИЙ**

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – произвольные события. Тогда

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 A_2) \dots \times P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

# Теоремы сложения вероятностей (1/2)

## **ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПОПАРНО НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ**

Пусть события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместны (т.е.  $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$ ). Тогда

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

## **ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ, НО НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ СОБЫТИЙ**

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – совместные, но независимые в совокупности события. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \times (1 - P(A_2)) \times (1 - P(A_3)) \dots (1 - P(A_n)).$$



# Теоремы сложения вероятностей (2/2)

## ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СОБЫТИЙ

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – произвольные события. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - \dots \\ + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$$

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  – для двух произвольных событий

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$  – для трёх произвольных событий.

# Пример на применение теорем сложения и умножения вероятностей (1/2)

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие  $A_i$  — выход из строя элемента  $i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Выразите события  $A$  и  $\bar{A}$  через события  $A_i$ , если  $A$  — выход из строя всей схемы.

Ответ:  $A = A_1 A_2 \cup A_5 (A_3 \cup A_4) \cup A_6$ ,  
 $\bar{A} = (\overline{A_1 A_2}) (\overline{A_5 (A_3 \cup A_4)}) \bar{A}_6$ .

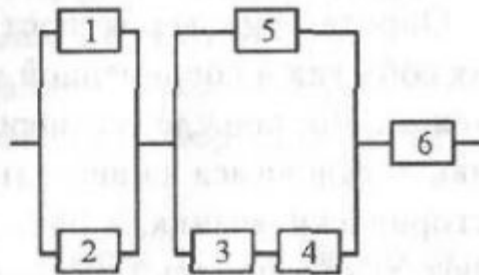


Рис. 1.5

1)  $-\boxed{1}-\boxed{2}-$   
 $A = A_1 \cup A_2$   
 $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2))$

2)  $-\begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{matrix}-$   
 $A = A_1 \cap A_2$   
 $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

$A_i$  - независимые, но совместные

Дано:  $P(A_i), i = \overline{1, 6}$   
 Найти:  $P(A)$  - вся цепь отключена.  
Решение

# Пример на применение теорем сложения и умножения вероятностей (2/2)

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие  $A_i$  — выход из строя элемента  $i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Выразите события  $A$  и  $\bar{A}$  через события  $A_i$ , если  $A$  — выход из строя всей схемы.

Ответ:  $A = A_1 A_2 \cup A_5 (A_3 \cup A_4) \cup A_6$ ,  
 $\bar{A} = (\overline{A_1 A_2}) (\overline{A_5 (A_3 \cup A_4)}) \overline{A_6}$ .

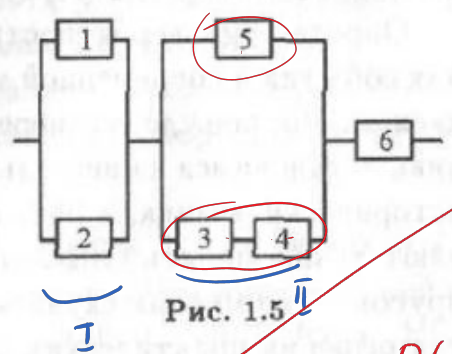


Рис. 1.5

$$A_I = A_1 \cap A_2$$

$$P(A_I) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$A_{II} = A_5 \cap (A_3 \cup A_4)$$

$$P(A_{II}) = P(A_5 \cap (A_3 \cup A_4)) = P(A_5) \cdot P(A_3 \cup A_4) = P(A_5) \cdot (1 - (1 - P(A_3)) \cdot (1 - P(A_4)))$$

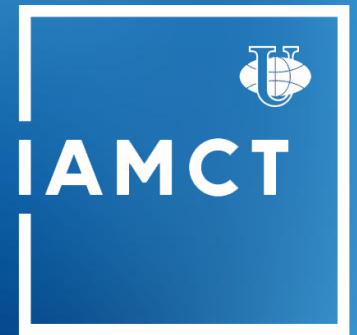
$$A = A_I \cup A_{II} \cup A_6$$

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_I)) \cdot (1 - P(A_{II})) \cdot (1 - P(A_6))$$



RUDN  
university

# Формула полной вероятности. Формула Байеса.



# Формула полной вероятности (1/2)

Пусть в результате опыта может произойти одно из  $n$  событий, обладающих свойствами:

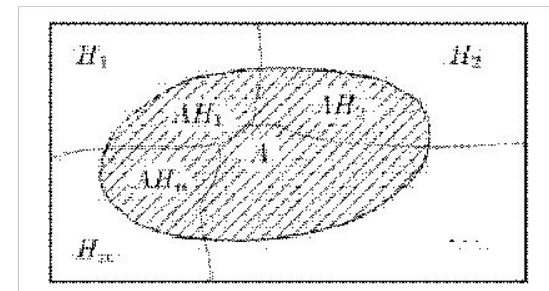
1) события несовместны, т.е.

$$H_i H_j = \emptyset, i \neq j.$$

2) события составляют полную группу событий, т.е.

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega.$$

Опр. События, удовлетворяющие свойствам 1) и 2), называются *гипотезами*.



## Формула полной вероятности (2/2)

Пусть имеется некоторое событие  $A$  и известны вероятности  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n), P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$ .

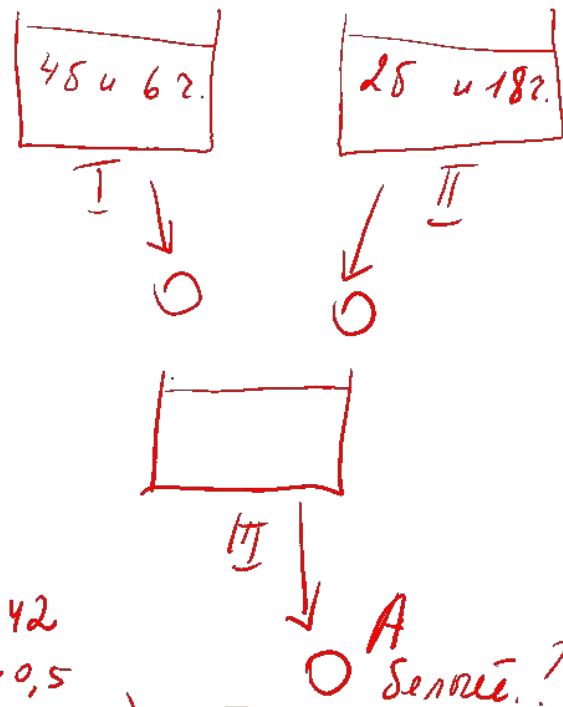
Тогда вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots \\ \dots + P(H_n)P(A|H_n).$$

# Задача на формулу полной вероятности

Условие:

В первой урне 10 шаров : 4 белых и 6 чёрных. Во второй урне 20 шаров : 2 белых и 18 чёрных. Из каждой урны выбирают случайным образом по одному шару и кладут в третью урну. Затем из третьей урны случайным образом выбирают один шар. Найти вероятность того, что извлечённый из третьей урны шар будет белым.



$$H_1 = \{2 \text{ б.}\}$$

$$H_2 = \{2 \text{ ч.}\}$$

$$H_3 = \{1 \text{ б и } 1 \text{ ч.}\}$$

0,04    0,1

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

$$P(H_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{20} = \frac{4}{100} = 0,04$$

$$P(H_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{18}{20} = \frac{54}{100} = 0,54$$

$$P(H_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{18}{20} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{20} = 0,42$$

0,54 · 0                      0,42                      0,5

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = 0,25$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = 0 \quad P(A|H_3) = \frac{1}{2}$$

# Формула Байеса

Пусть опыт завершён, и известно, что в результате опыта произошло событие  $A$ . Тогда можно с учётом этой информации переоценить вероятности гипотез:

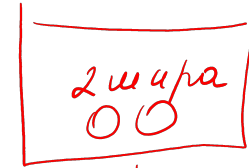
$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) + \dots + P(H_n)P(A | H_n)}$$



# Задача на формулу Байеса

1. В урну, содержащую 2 шара неизвестного цвета, опустили белый шар. После этого из этой урны извлекаем 1 шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из урны, будет белым.  $A$

2. Шар, извлечённый из вышеописанной урны, оказался белым. Найти вероятности того, что в урне до перекладывания было 0 белых шаров, 1 белый шар и 2 белых шара.



↓  
0 белый?

1)  $P(A) = ?$

$H_1 = \{ \text{в урне 2 б. шара} \}$

$H_2 = \{ \text{в урне 1 б. шар, а 2-ой не белый} \}$

$H_3 = \{ \text{оба не белые} \}$

$P(H_1) = \frac{1}{3}$

$P(H_2) = \frac{1}{3}$

$P(H_3) = \frac{1}{3}$

$P(A|H_1) = 1$

$P(A|H_2) = \frac{2}{3}$

$P(A|H_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$$



RUDN  
university

# Вопросы

