2. Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Очень важно уметь из данного уравнения прямой извлечь всю информацию об этой прямой: координаты точки, через которую проходит прямая, координаты вектора — либо направляющего, либо вектора нормали, т.к. практически во всех задачах о взаимном расположении прямых используются средства векторной алгебры.

Уравнение одной и той же прямой может быть записано различными способами, причем из одного вида уравнения легко получить другие (таблица 8).

Таблица 8 — Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Исходное уравнение	Полученное уравнение	Связь параметров уравнений
Каноническое $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Параметрические $\begin{cases} x=mt+x_0; \\ y=nt+y_0. \end{cases}$	$M_0(x_0;y_0)$ — данная точка, $\vec{s}=(m;n)$ — направляющий вектор
Каноническое $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Общее $Ax+By+C=0$	$A=n$, $B=-m$, $C=-nx_0+my_0$
Каноническое $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	С угловым коэффициентом $y-y_0=k(x-x_0)$, $y=kx+b$	$k=\dfrac{n}{m}$, $b=y_0-\dfrac{n}{m}x_0$
Общее $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Каноническое $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	$m=-\dfrac{B}{A}$, $n=1$
Общее $Ax+By+C=0$	В «отрезках» на осях $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	$a=-\dfrac{C}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$
Общее $Ax+By+C=0$, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	С угловым коэффициентом $y=kx+b$, $y-y_0=k(x-x_0)$	$k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$
Общее $Ax+By+C=0$	Нормальное $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$	$p=-C\lambda$, $\cos\alpha=A\lambda$, $\sin\alpha=B\lambda$, $\lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ знак λ противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой

Пример 111

Прямая задана каноническим уравнением $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}$, записать другие виды уравнений этой прямой.

► Из исходного уравнения имеем: координаты точки, через которую проходит прямая $M_0(2;-4)$ и координаты направляющего вектора $\vec{s}=(m;n)=(3;-5)$.

Перейдем к *параметрическим уравнениям* $\begin{cases} x=mt+x_0; \\ y=nt+y_0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x=3t+2; \\ y=-5t-4. \end{cases}$$

Перейдем к *общему уравнению* $Ax+By+C=0$: $A=n=-5$, $B=-m=-3$, $C=-nx_0+my_0=5\cdot 2+3\cdot(-4)=-2$, тогда $-5(x-2)-3(y+4)=0$, $5(x-2)+3(y+4)=0$, $5x+3y+2=0$, где $\vec{n}=(5;3)$ — вектор нормали данной прямой.

Перейдем к уравнению с *угловым коэффициентом* $y-y_0=k(x-x_0)$, где $k=\frac{n}{m}=-\frac{5}{3}$, $x_0=2$, $y_0=4$: $y+4=-\frac{5}{3}(x-2)$, $y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$.

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x+3y+2=0$, выразив из него y: $3y=-5x-2$, $y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$.

Перейдем к уравнению *в «отрезках»*, из общего уравнения $5x+3y+2=0$ имеем: $A=5$, $B=3$, $C=2$, тогда $a=-\frac{C}{A}=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{C}{B}=-\frac{5}{3}$, т.е. $\frac{x}{-\frac{2}{5}}+\frac{3y}{-\frac{2}{3}}=1$.

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x+3y=-2$, разделив все члены уравнения на свободный коэффициент, так чтобы в правой части получилась единица: $\frac{5x}{-2}+\frac{3y}{-2}=1$ или $\frac{x}{-\frac{2}{5}}+\frac{3y}{-\frac{2}{3}}=1$. Из полученного уравнения видно, что прямая отсекает на оси OX отрезок $a=-\frac{2}{5}$, а на оси OY отрезок $b=-\frac{2}{3}$.

От общего уравнения $5x+3y+2=0$ перейдем к ***нормальному уравнению***: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, определим нормирующий множитель $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5^2+3^2}}=-\frac{1}{\sqrt{34}}$, $\lambda<0$, т.к. $C=2>0$ (знак для λ выбирается противоположный знаку параметра C), $\cos\alpha=A\lambda=-\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin\alpha=B\lambda=-\frac{3}{\sqrt{34}}$, $p=-C\lambda=\frac{2}{\sqrt{34}}$, тогда $-\frac{5x}{\sqrt{34}}-\frac{3y}{\sqrt{34}}-\frac{2}{\sqrt{34}}=0$, $\frac{5x}{\sqrt{34}}+\frac{3y}{\sqrt{34}}+\frac{2}{\sqrt{34}}=0$. ◄

3. Основные задачи на прямую на плоскости

1. Построение прямых на плоскости

Пример 112

Построить прямые а) $3x+2y-6=0$, б) $y=2x$; в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}$,

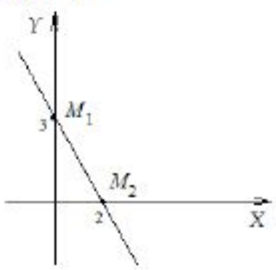
г) $\begin{cases} x=2t-1; \\ y=t+5. \end{cases}$ д) $x-5=0$, е) $5y+7=0$.

► Общий подход к решению задач состоит в определении координат двух точек, через которые проходит данная прямая.

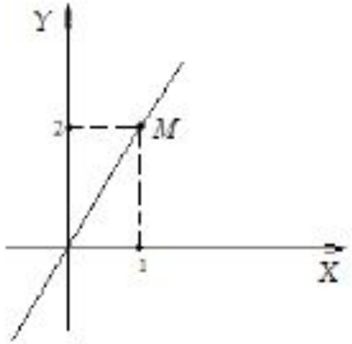
а) Найдем точки пересечения прямой $3x+2y-6=0$ с осями координат. Зададим $x=0$, тогда $y=3$, т.е. точка $M_1(0;3)$, зададим $y=0$, тогда $x=2$, т.е. $M_2(2;0)$.

x	y
0	3
2	0

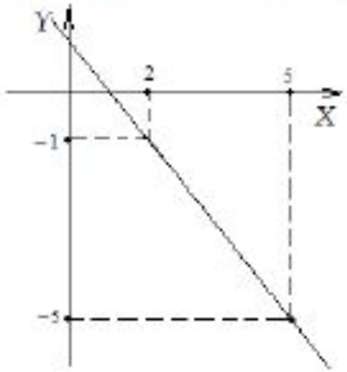
Строим точки $M_1(0;3)$ и $M_2(2;0)$.



б) Прямая $y=2x$ проходит через начало координат $O(0;\ 0)$. Вторую точку прямой получим, взяв значение $x=1$, тогда значение $y=2$, т.е. точка $M(1;2)$.

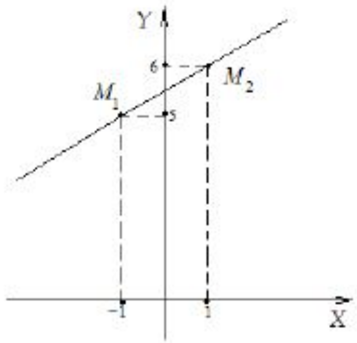


в) Прямая задана каноническим уравнением $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}$, поэтому координаты одной точки известны $M_1(2;-1)$. Координаты второй точки получим, взяв в уравнении прямой $x=5$ (чтобы получилось целочисленное значение), тогда $y=-5$, т.е. $M_2(5;-5)$.

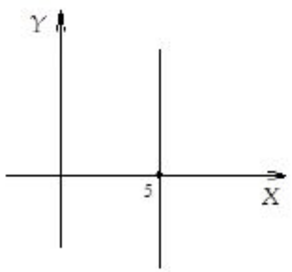


г) Прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 5. \end{cases}$

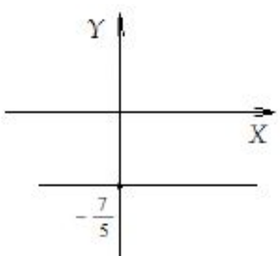
Из уравнений имеем координаты одной точки: $M_1(-1;5)$. Координаты второй точки получим, взяв какое-либо значение параметра t и вычислив соответствующее значение x и y. Пусть $t = 1$, тогда $x = 2 - 1 = 1$, $y = 1 + 5 = 6$, т.е. $M_2(1;6)$.



д) В уравнении $x - 5 = 0$ отсутствует переменная y, данная прямая параллельная оси OY и проходит через точку $(5;0)$.



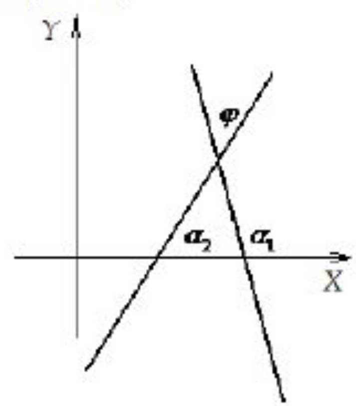
е) В уравнении $5y + 7 = 0$ отсутствует переменная x, данная прямая параллельная оси OX и проходит через точку $\left(0; -\frac{7}{5}\right)$.



2. Взаимное расположение прямых

Прямые на плоскости могут быть параллельными, перпендикулярными или в общем случае пересекаться под каким-либо углом. Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости (см. таб. 9).

Под *углом между прямыми на плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Угол φ между прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $y_1 = k_1 x + b$, $y_2 = k_2 x + b_2$
или
уравнениями в общем виде
$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$,
$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$</td>
<td>$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right|$$
или
$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>• Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями: $y_1 = k_1 x + b$, $y_2 = k_2 x + b_2$.

</td>
</tr>
</table>

Угол $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника), $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, тогда

$$tg\,\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2}$$

$tg\,\alpha_1 = k_1$, $tg\,\alpha_2 = k_2$, тогда $tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Если не учитывать, какая прямая является первой, а какая второй, то правая часть формулы берется по модулю. ●

Таблица 9 — Взаимное расположение двух прямых

Способ задания прямых	Условие параллельности	Условие перпендикулярности	Угол между прямыми
Общее уравнение $l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$, где $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$ — нормальные векторы	$\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{n_2}$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$	$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ $A_1A_2+B_1B_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}=$ $=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, $tg\ \varphi=\left\lvert\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right\rvert$
Канонические уравнение $l_1:\ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$, $l_2:\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$, где $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2)$ — направляющие векторы	$\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2}$, $\overrightarrow{s_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{s_2}$, $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$	$\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2}$ $\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0$ $m_1m_2+n_1n_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\lvert\overrightarrow{s_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{s_2}\rvert}=$ $=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$
Уравнения с угловым коэффициентом $l_1:\ y=k_1x+b_1$, $l_2:\ y=k_2x+b_2$, где $k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$	$k_1=k_2$	$k_1k_2+1=0$, $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$	$tg\ \varphi=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$

Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

При нахождении общих точек двух прямых, заданных общим уравнением, т.е. при решении системы алгебраических уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ возможны случаи:

1.	если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, т.е. $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые пересекаются;
2.	если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;
3.	если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

⋙ Три прямые, заданные общими уравнениями имеют общую точку, если: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$.

Пример 113	Найти угол между прямыми а) $5x-12y-16=0$ и $3x+4y-12=0$, б) $3x+2y-4=0$ и $3x+6y=1$.

► а) Прямые заданы общими уравнениями, перейдем к уравнениям с угловым коэффициентом, т.е. $y=\frac{5}{12}x-\frac{4}{3}$ и $y=-\frac{3}{4}x+3$, где $k_1=\frac{5}{12}$, $k_2=-\frac{3}{4}$, тогда угол между прямыми найдем по формуле: $tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\frac{5}{12}+\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{12}\left(-\frac{3}{4}\right)}\right|=\frac{56}{33}$, $\varphi=arctg\frac{56}{33}$.

б) Прямые заданы общими уравнениями, их вектора нормали $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$, $\overrightarrow{n_2}=(3;6)$, тогда $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{3\cdot3+2\cdot6}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+36}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$,

$\varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{65}}$. ◄

Пример 114

Составить уравнение прямой,

а) проходящей через точку $M(-2;4)$ параллельно прямой $2x-3y+6=0$;

б) проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно прямой $5x-4y-20=0$.

► а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y-y_0=k(x-x_0)$, где $x_0=-2$, $y_0=4$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y=\frac{2}{3}x+2$, т.е. $k_1=\frac{2}{3}$. Если прямые параллельны, то их коэффициенты равны, т.е. $k_1=k_2=\frac{2}{3}$.

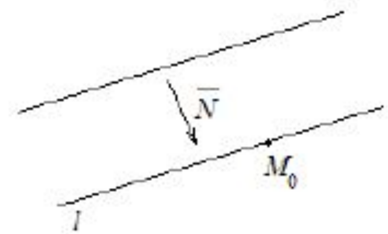
Тогда $y-4=\frac{2}{3}(x+2)$, $3y-12=2x+4$, т.е. $2x-3y+16=0$;

б) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y-y_0=k(x-x_0)$, где $x_0=2$, $y_0=3$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y=\frac{5}{4}x-5$, т.е. $k_1=\frac{5}{4}$. Если прямые перпендикулярны, то их коэффициенты связаны соотношением $k_1=-\frac{1}{k_2}$, следовательно, $k_2=-\frac{4}{5}$. Тогда

$y-3=-\frac{4}{5}(x-2)$, $5y-15=-4x+8$, т.е. $4x+5y-23=0$. ◄

Пример 115	Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;-4)$: а) параллельно, б) перпендикулярно к прямой $l: 3x-5y+2=0$.

► а) Исходная прямая задана общим уравнением $3x-5y+2=0$, из которого следует, что нормальный вектор прямой $\vec{n}=(3;-5)$. Вектор нормали данной прямой может служить и нормалью к параллельной прямой.



Возьмем общее уравнение в координатной форме $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, подставив координаты точки $M_0(2;-4)$ и вектора нормали $\vec{n}=(3;-5)$ имеем: $3(x-2)-5(y+4)=0$, $3x-5y-26=0$.

б) Вектор нормали исходной прямой служит направляющим вектором для перпендикулярной прямой $\vec{s}=(3;-5)$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, подставив координаты точки $M_0(2;-4)$ и направляющего вектора $\vec{s}=(3;-5)$ имеем:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5},$$

$$-5(x-2)=3(y+4),$$

$$5x+3y+2=0. \blacktriangleleft$$

Задание 30	1) При каком значении параметра a прямые $3ax-8y+13=0$ и $(a+1)x-2ay-21=0$ параллельны? 2) при каком значении параметра a прямые $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ и $2x-3y+7=0$ будут перпендикулярны друг к другу?

Ответ: а) $a_1=2$ или $a_2=-\dfrac{2}{3}$; б) $a=-\dfrac{1}{18}$.

Пример 116

Найти точку пересечения прямых: а) $3x-4y+11=0$ и $4x-y-7=0$, б) $\frac{x+4}{-2}=\frac{y-8}{3}$ и $3x+6y=1$.

► Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$

а) Исходя из условия задачи следует решить систему: $\begin{cases} 3x-4y+11=0; \\ 4x-y-7=0. \end{cases}$

Решим ее по формулам Крамера: $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=13$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=39$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, тогда $x=3$, $y=5$, т.е. точка пересечения заданных прямых $(3;5)$;

б) Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему уравнений, в которой предварительно перевести каноническое уравнение прямой l_1 в параметрический вид, т.е. получим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} x=-2t-4; \\ y=3t+8; \end{cases} \\ 3x+6y-1=0. \end{cases}$$

Для решения, которой в уравнении прямой l_2 подставляем выражения для x и y через t из уравнений первой прямой и находим значение параметра t, соответствующее точке пересечения: $3(-2t-4)+6(3t+8)-1=0$, $12t+35=0$, $t=-\frac{35}{12}$. Подставим полученное значение t в первое уравнение системы: $x=2\cdot\frac{35}{12}-4=\frac{11}{6}$,

$y = 3\cdot\left(-\frac{35}{12}\right)+8=-\frac{3}{4}$, т.е. точка пересечения заданных прямых $\left(\frac{11}{6};-\frac{3}{4}\right)$. При решении данной задачи можно пользоваться общими уравнениями прямых. ◄

Пример 117

При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3tx-8y+1=0$ и $(1+t)x-2ty=0$, параллельны?

► Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\frac{3t}{1+t}=\frac{-8}{-2t}$ или $\frac{3t}{1+t}=\frac{4}{t}$, $3t^2-4t-4=0$, $t_1=2$, $t_2=-\frac{2}{3}$. ◄

Пример 118

Определить взаимное расположение прямых: а) $10x+6y-1=0$ и $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{5}$, б) $y=-3x+7$ и $\begin{cases} x=-t+2; \\ y=3t. \end{cases}$ в) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ и $y=\frac{2}{3}x+1$, г) $\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{4}$ и $5x+4y-1=0$.

► а) Вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(10;6)$, направляющий вектор второй прямой $\overrightarrow{s_2}=(-3;5)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\overrightarrow{n_2}=(5;3)$. Векторы $\overrightarrow{n_1}=(10;6)$ и $\overrightarrow{n_2}=(5;3)$ коллинеарны, т.к. их одноименные координаты пропорциональны: $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$, т.о. прямые параллельны;

б) вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$, направляющий вектор второй прямой $\overrightarrow{s_2}=(-1;3)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$. Прямые параллельны, т.к. имеют один и тот же вектор нормали;

в) первое уравнение прямой в «отрезках», второе уравнение прямой с угловым коэффициентом, запишем оба уравнения в общем виде: $3x+2y=6$ и $2x-3y+3=0$, вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$, второй прямой $\overrightarrow{n_2}=(2;-3)$, т.к. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=3\cdot 2+2\cdot(-3)=0$, то прямые перпендикулярны;

г) направляющий вектор первой прямой $\overrightarrow{s_1}=(5;4)$, нормальный вектор первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(4;-5)$, второй прямой $\overrightarrow{n_2}=(5;4)$, т.к. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=5\cdot 4+4\cdot(-5)=0$, то прямые перпендикулярны. ◄

▼ *Проекцией точки* $M(x;y)$ *на прямую* l называется точка пересечения прямой, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой l. ▲

Алгоритм нахождения проекции точки на прямую

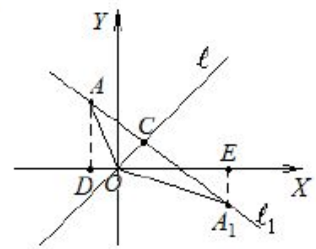
1.	Составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой l;
2.	найти точку пересечения прямых l и l_1.

Пример 119

Найти точку, симметричную точке $A(-2;4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

► Проведём через точку A прямую l_1, перпендикулярно прямой l (биссектриса первого координатного угла): $l_1 \cap l = C$.

На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Необходимо найти координаты точки A_1.



Прямые AA_1 и l перпендикулярны, т.е. их коэффициенты связаны соотношением: $k_{AA_1} = -\dfrac{1}{k_l}$, т.е. $k_{AA_1} = -1$. Воспользуемся уравнением прямой проходящей через точку в заданном направлении: $y-4=-(x+2)$, преобразуя его имеем: $x+y-2=0$.

Найдем координаты точки C, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y-2=0; \\ y=x. \end{cases}$$

Точка $C(1;1)$ — середина AA_1, тогда координаты точка A_1:

$\dfrac{-2+x}{2}=1$, $x=4$; $\dfrac{4+y}{2}=1$, $y=-2$; т.е. $A_1(4;-2)$. ◄

4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

▼ *Расстоянием d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. ▲

Расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой, заданной	общим уравнением $Ax+By+C=0$ $d=\left\|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\|$;
	нормальным уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ $d=\left\|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right\|$.

Пример 120

Найти расстояние

а) от точки $M(6;8)$ до прямой $4x+3y+2=0$;

б) от точки $A(4;3)$ до прямой $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$;

в) между параллельными прямыми $12x-5y+10=0$ и $12x-5y+2=0$.

► а) Прямая задана общим уравнением, используя формулу, $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ имеем: $d=\left|\dfrac{4\cdot6+3\cdot8+2}{\sqrt{16+9}}\right|=\dfrac{50}{5}=10$ ед. дл.;

б) прямая задана нормальным уравнением, т.к. $p=2$ и $\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, воспользуемся формулой $d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|$ имеем: $d=\left|-\frac{3}{5}4+\frac{4}{5}3-2\right|=|-2|=2$ ед. дл.;

в) необходимо найти расстояние от какой-либо точки одной прямой до второй прямой. При этом для нахождения точки на прямой достаточно задать значение одной из координат и из уравнения прямой получить значение другой: в уравнении $12x-5y+10=0$ пусть $x_1=0$, тогда $-5y+10=0$, $y_1=2$.

Теперь воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки $M(0;2)$ до прямой $12x-5y+2=0$: $d=\left|\dfrac{10\cdot0-5\cdot2+2}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right|=\dfrac{8}{13}$ ед. дл. ◄

Пример 121

Найти прямую, которая проходит через точку пересечения прямых $x+2y-19=0$; $2x-y-3=0$ и находится от точку $M(2;3)$ на расстоянии 5 единиц.

► За образующие примем прямые, данные в условии задачи. Уравнение пучка прямых имеет вид:

$x+2y-19+\lambda(2x-y-3)=0$,

$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-19-3\lambda=0$.

Чтобы определить значение параметра λ для искомой прямой, воспользуемся формулой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. По условию $d=5$; $A=1+2\lambda$; $B=2-\lambda$; $C=-19-3\lambda$; $x_0=2$; $y_0=3$, тогда подставляя эти значения в формулу имеем: $5=\dfrac{|(1+2\lambda)2+(2-\lambda)3-19-3\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}$,

$5=\dfrac{|-2\lambda-11|}{\sqrt{1++4\lambda+4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2}}$, $5\sqrt{5\lambda^2+5}=|-2\lambda-11|$,

$121\lambda^2-44\lambda+4=0$, $\lambda=\dfrac{2}{11}$.

Подставляя найденное значение параметра в уравнение пучка прямых имеем: $\left(1+2\cdot\dfrac{2}{11}\right)x+\left(2-\dfrac{2}{11}\right)y-19-3\cdot\dfrac{2}{11}=0$,

$3x+4y-43=0$. ◄

5. Уравнение биссектрис углов между прямыми

Уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеют вид: $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Пример 122	Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x - 4y - 7 = 0$, $8x + 6y - 1 = 0$.
	► Воспользуемся формулой $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ получаем: $\dfrac{3x - 4y - 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm\dfrac{8x + 6y - 1}{\sqrt{8^2 + 6^2}}$ преобразуя это выражение, находим $\dfrac{3x - 4y - 7}{5} = \pm\dfrac{8x + 6y - 1}{10}$, $6x - 8y - 14 = \pm(8x + 6y - 1)$. Отсюда получаем уравнения биссектрис: $2x + 14y + 13 = 0$, $14x - 2y - 15 = 0$. ◄

4. Расположение точки относительно прямой

Теорема	Прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, точка $M(x; y)$ не принадлежит заданной прямой, тогда • если точка M лежит *правее* прямой, то $Ax + By + C > 0$; • если точка M лежит *левее* прямой, то $Ax + By + C < 0$.

Так как прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости, то для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax + By + C < 0$, а в какой $Ax + By + C > 0$, применяют *метод контрольных точек.* Для этого берут контрольную точку (не лежащую на прямой) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax + By + C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax + By + C$ имеет противоположный знак.

Пример 123

Изобразить множество точек удовлетворяющих системе неравенств:

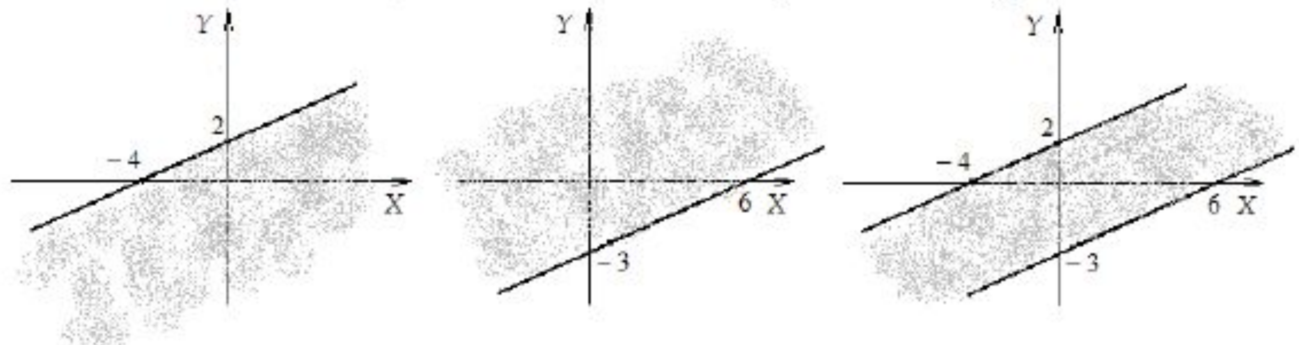
$$\begin{cases} x - 2y + 4 \ge 0; \\ x - 2y - 6 \le 0. \end{cases}$$

► Построим прямые:

$l_1 : x - 2y + 4 = 0$, через точки $(0;2)$ и $(-4;0)$. Используя метод контрольной точки для первой прямой: $O(0;0)$, тогда $0 - 0 + 4 \ge 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие ниже прямой являются решением данного неравенства;

$l_2 : x - 2y - 6 = 0$, через точки $(0;-3)$ и $(6;0)$. Используя метод контрольной точки для второй прямой: $O(0;0)$, тогда $0 - 0 - 6 \le 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие выше прямой являются решением данного неравенства.

Таким образом, решение системы неравенств является множество точек плоскости XOY, заключенных между данными прямыми.



Пример 124

Составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC: $A(2;0)$, $B(8;-3)$, $C(5;-4)$.

► Для решения задачи найдем уравнения сторон треугольника, а затем для определения знаков неравенств в левую часть каждого уравнения

подставим координаты противоположной вершины, которая гарантированно принадлежит соответствующей полуплоскости.

Уравнение стороны AB $: x+2y-2=0$. Подставим координаты точки $C(5;-4)$ в полученное уравнение: $5+2(-4)-2<0$, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x+2y-2\le 0$.

Уравнение стороны BC: $x-3y-17=0$. Подставим координаты точки $A(2;0)$: $2-0-17<0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x-3y-17\le 0$.

Уравнение стороны AC: $4x+3y-8=0$. Подставим координаты точки $B(8;-3)$: $4\cdot 8+3(-3)-8>0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $4x+3y-8\ge 0$.

ΔABC определяется системой неравенств: $\begin{cases} x+2y-2\le 0; \\ x-3y-17\le 0; \\ 4x+3y-8\ge 0. \end{cases}$