2. Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Очень важно уметь из данного уравнения прямой извлечь всю информацию об этой прямой: координаты точки, через которую проходит прямая, координаты вектора — либо направляющего, либо вектора нормали, т.к. практически во всех задачах о взаимном расположении прямых используются средства векторной алгебры.

Уравнение одной и той же прямой может быть записано различными способами, причем из одного вида уравнения легко получить другие (таблица 8).

Таблица 8 — Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Исходное уравнение	Полученное уравнение	Связь параметров уравнений
Каноническое $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	Параметрические $\begin{cases} x=mt+x_0; \\ y=nt+y_0. \end{cases}$	$M_0(x_0;y_0)$ — данная точка, $\vec{s}=(m;n)$ — направляющий вектор
Каноническое $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	Общее $Ax+By+C=0$	$A=n$, $B=-m$, $C=-nx_0+my_0$
Каноническое $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	С угловым коэффициентом $y-y_0=k(x-x_0)$, $y=kx+b$	$k=\frac{n}{m}$, $b=y_0-\frac{n}{m}x_0$
Общее $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Каноническое $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	$m=-\frac{B}{A}$, $n=1$
Общее $Ax+By+C=0$	В «отрезках» на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$
Общее $Ax+By+C=0$, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	С угловым коэффициентом $y=kx+b$, $y-y_0=k(x-x_0)$	$k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$
Общее $Ax+By+C=0$	Нормальное $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$	$p=-C\lambda$, $\cos\alpha=A\lambda$, $\sin\alpha=B\lambda$, $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ знак λ противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой

Пример 111

Прямая задана каноническим уравнением $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}$, записать другие виды уравнений этой прямой.

► Из исходного уравнения имеем: координаты точки, через которую проходит прямая $M_0(2;-4)$ и координаты направляющего вектора $\vec{s}=(m;n)=(3;-5)$.

Перейдем к *параметрическим уравнениям* $\begin{cases} x=mt+x_0; \\ y=nt+y_0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x=3t+2; \\ y=-5t-4. \end{cases}$$

Перейдем к *общему уравнению* $Ax+By+C=0$: $A=n=-5$, $B=-m=-3$, $C=-nx_0+my_0=5\cdot 2+3\cdot(-4)=-2$, тогда $-5(x-2)-3(y+4)=0$, $5(x-2)+3(y+4)=0$, $5x+3y+2=0$, где $\vec{n}=(5;3)$ — вектор нормали данной прямой.

Перейдем к уравнению с *угловым коэффициентом* $y-y_0=k(x-x_0)$, где $k=\frac{n}{m}=-\frac{5}{3}$, $x_0=2$, $y_0=4$: $y+4=-\frac{5}{3}(x-2)$, $y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$.

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x+3y+2=0$, выразив из него y: $3y=-5x-2$, $y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$.

Перейдем к уравнению *в «отрезках»*, из общего уравнения $5x+3y+2=0$ имеем: $A=5$, $B=3$, $C=2$, тогда $a=-\frac{C}{A}=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{C}{B}=-\frac{5}{3}$, т.е. $\frac{x}{-\frac{2}{5}}+\frac{3y}{-\frac{2}{3}}=1$.

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x+3y=-2$, разделив все члены уравнения на свободный коэффициент, так чтобы в правой части получилась единица: $\frac{5x}{-2}+\frac{3y}{-2}=1$ или $\frac{x}{-\frac{2}{5}}+\frac{3y}{-\frac{2}{3}}=1$. Из полученного уравнения видно, что прямая отсекает на оси OX отрезок $a=-\frac{2}{5}$, а на оси OY отрезок $b=-\frac{2}{3}$.

От общего уравнения $5x+3y+2=0$ перейдем к ***нормальному уравнению***: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, определим нормирующий множитель $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5^2+3^2}}=-\frac{1}{\sqrt{34}}$, $\lambda<0$, т.к. $C=2>0$ (знак для λ выбирается противоположный знаку параметра C), $\cos\alpha=A\lambda=-\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin\alpha=B\lambda=-\frac{3}{\sqrt{34}}$, $p=-C\lambda=\frac{2}{\sqrt{34}}$, тогда $-\frac{5x}{\sqrt{34}}-\frac{3y}{\sqrt{34}}-\frac{2}{\sqrt{34}}=0$, $\frac{5x}{\sqrt{34}}+\frac{3y}{\sqrt{34}}+\frac{2}{\sqrt{34}}=0$. ◄

3. Основные задачи на прямую на плоскости

1. Построение прямых на плоскости

Пример 112

Построить прямые а) $3x+2y-6=0$, б) $y=2x$; в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}$,

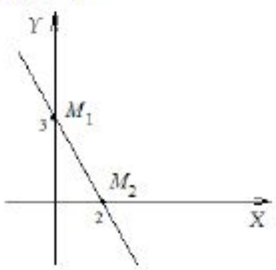
г) $\begin{cases} x=2t-1; \\ y=t+5. \end{cases}$ д) $x-5=0$, е) $5y+7=0$.

► Общий подход к решению задач состоит в определении координат двух точек, через которые проходит данная прямая.

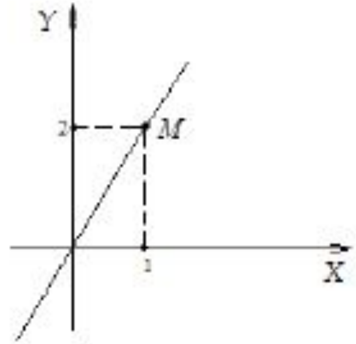
а) Найдем точки пересечения прямой $3x+2y-6=0$ с осями координат. Зададим $x=0$, тогда $y=3$, т.е. точка $M_1(0;3)$, зададим $y=0$, тогда $x=2$, т.е. $M_2(2;0)$.

x	y
0	3
2	0

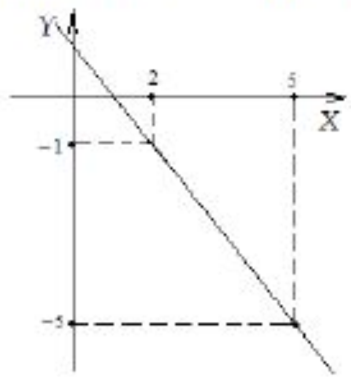
Строим точки $M_1(0;3)$ и $M_2(2;0)$.



б) Прямая $y=2x$ проходит через начало координат $O(0;\ 0)$. Вторую точку прямой получим, взяв значение $x=1$, тогда значение $y=2$, т.е. точка $M(1;2)$.

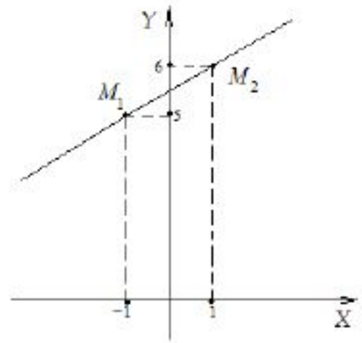


в) Прямая задана каноническим уравнением $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}$, поэтому координаты одной точки известны $M_1(2;-1)$. Координаты второй точки получим, взяв в уравнении прямой $x=5$ (чтобы получилось целочисленное значение), тогда $y=-5$, т.е. $M_2(5;-5)$.

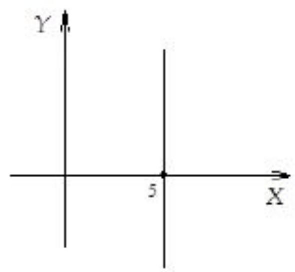


г) Прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 5. \end{cases}$

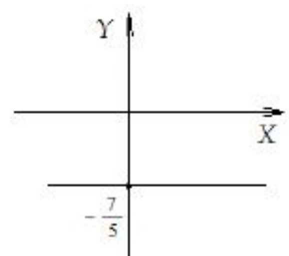
Из уравнений имеем координаты одной точки: $M_1(-1;5)$. Координаты второй точки получим, взяв какое-либо значение параметра t и вычислив соответствующее значение x и y. Пусть $t = 1$, тогда $x = 2 - 1 = 1$, $y = 1 + 5 = 6$, т.е. $M_2(1;6)$.



д) В уравнении $x - 5 = 0$ отсутствует переменная y, данная прямая параллельная оси OY и проходит через точку $(5;0)$.



е) В уравнении $5y + 7 = 0$ отсутствует переменная x, данная прямая параллельная оси OX и проходит через точку $\left(0; -\frac{7}{5}\right)$.



2. Взаимное расположение прямых

Прямые на плоскости могут быть параллельными, перпендикулярными или в общем случае пересекаться под каким-либо углом. Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости (см. таб. 9).

Под *углом между прямыми на плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

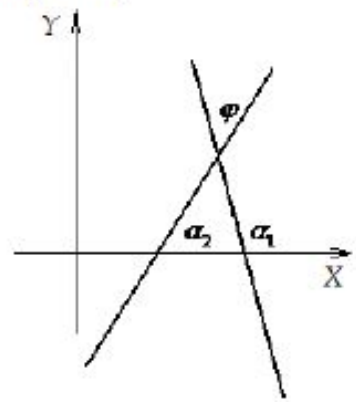
Угол φ между прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $y_1 = k_1 x + b$, $y_2 = k_2 x + b_2$ или уравнениями в общем виде $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right|$$

или

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями: $y_1 = k_1 x + b$, $y_2 = k_2 x + b_2$.



Угол $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника), $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, тогда

$$tg\ \varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}$$

$tg\ \alpha_1 = k_1$, $tg\ \alpha_2 = k_2$, тогда $tg\ \varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Если не учитывать, какая прямая является первой, а какая второй, то правая часть формулы берется по модулю. ●

Таблица 9 — Взаимное расположение двух прямых

Способ задания прямых	Условие параллельности	Условие перпендикулярности	Угол между прямыми
Общее уравнение $l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$, где $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$ — нормальные векторы	$\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{n_2}$ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ $A_1A_2+B_1B_2=0$	$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}=$ $=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, $tg\ \varphi=\left\lvert\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right\rvert$
Канонические уравнение $l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$, $l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$, где $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2)$ — направляющие векторы	$\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2}$, $\overrightarrow{s_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{s_2}$, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	$\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2}$ $\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0$ $m_1m_2+n_1n_2=0$	$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\lvert\overrightarrow{s_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{s_2}\rvert}=$ $=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$
Уравнения с угловым коэффициентом $l_1:\ y=k_1x+b_1$, $l_2:\ y=k_2x+b_2$, где $k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$	$k_1=k_2$	$k_1k_2+1=0$, $k_1=-\frac{1}{k_2}$	$tg\ \varphi=\left\lvert\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$

Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

При нахождении общих точек двух прямых, заданных общим уравнением, т.е. при решении системы алгебраических уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ возможны случаи:

1.	если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, т.е. $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые пересекаются;
2.	если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;
3.	если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

⋙ Три прямые, заданные общими уравнениями имеют общую точку, если: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$.

Пример 113	Найти угол между прямыми а) $5x-12y-16=0$ и $3x+4y-12=0$, б) $3x+2y-4=0$ и $3x+6y=1$.
	► а) Прямые заданы общими уравнениями, перейдем к уравнениям с угловым коэффициентом, т.е. $y=\frac{5}{12}x-\frac{4}{3}$ и $y=-\frac{3}{4}x+3$, где $k_1=\frac{5}{12}$, $k_2=-\frac{3}{4}$, тогда угол между прямыми найдем по формуле: $tg\,\varphi=\left\|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\|=\left\|\frac{\frac{5}{12}+\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{12}\left(-\frac{3}{4}\right)}\right\|=\frac{56}{33}$, $\varphi=arctg\frac{56}{33}$. б) Прямые заданы общими уравнениями, их вектора нормали $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$, $\overrightarrow{n_2}=(3;6)$, тогда $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_2}\right\|}=\frac{3\cdot3+2\cdot6}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+36}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$, $\varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{65}}$. ◄

Пример 114

Составить уравнение прямой,

а) проходящей через точку $M(-2;4)$ параллельно прямой $2x-3y+6=0$;

б) проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно прямой $5x-4y-20=0$.

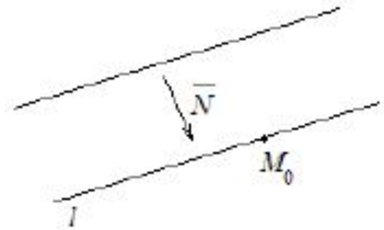
► а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y-y_0=k(x-x_0)$, где $x_0=-2$, $y_0=4$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y=\frac{2}{3}x+2$, т.е. $k_1=\frac{2}{3}$. Если прямые параллельны, то их коэффициенты равны, т.е. $k_1=k_2=\frac{2}{3}$. Тогда $y-4=\frac{2}{3}(x+2)$, $3y-12=2x+4$, т.е. $2x-3y+16=0$;

б) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y-y_0=k(x-x_0)$, где $x_0=2$, $y_0=3$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y=\frac{5}{4}x-5$, т.е. $k_1=\frac{5}{4}$. Если прямые перпендикулярны, то их коэффициенты связаны соотношением $k_1=-\frac{1}{k_2}$, следовательно, $k_2=-\frac{4}{5}$. Тогда $y-3=-\frac{4}{5}(x-2)$, $5y-15=-4x+8$, т.е. $4x+5y-23=0$. ◄

Пример 115

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;-4)$:
а) параллельно, б) перпендикулярно к прямой $l: 3x-5y+2=0$.

► а) Исходная прямая задана общим уравнением $3x-5y+2=0$, из которого следует, что нормальный вектор прямой $\vec{n}=(3;-5)$. Вектор нормали данной прямой может служить и нормалью к параллельной прямой.



Возьмем общее уравнение в координатной форме $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, подставив координаты точки $M_0(2;-4)$ и вектора нормали $\vec{n}=(3;-5)$ имеем: $3(x-2)-5(y+4)=0$, $3x-5y-26=0$.

б) Вектор нормали исходной прямой служит направляющим вектором для перпендикулярной прямой $\vec{s}=(3;-5)$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, подставив координаты точки $M_0(2;-4)$ и направляющего вектора $\vec{s}=(3;-5)$ имеем:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5},$$

$$-5(x-2)=3(y+4),$$

$$5x+3y+2=0.$$ ◄

Задание 30	1) При каком значении параметра a прямые $3ax-8y+13=0$ и $(a+1)x-2ay-21=0$ параллельны? 2) при каком значении параметра a прямые $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ и $2x-3y+7=0$ будут перпендикулярны друг к другу?

Ответ: а) $a_1 = 2$ или $a_2 = -\frac{2}{3}$; б) $a = -\frac{1}{18}$.

Пример 116

Найти точку пересечения прямых: а) $3x-4y+11=0$ и $4x-y-7=0$,

б) $\frac{x+4}{-2}=\frac{y-8}{3}$ и $3x+6y=1$.

► Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$

а) Исходя из условия задачи следует решить систему: $\begin{cases} 3x-4y+11=0; \\ 4x-y-7=0. \end{cases}$

Решим ее по формулам Крамера: $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=13$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=39$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, тогда $x=3$, $y=5$, т.е. точка пересечения заданных прямых $(3;5)$;

б) Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему уравнений, в которой предварительно перевести каноническое уравнение прямой l_1 в параметрический вид, т.е. получим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} x=-2t-4; \\ y=3t+8; \end{cases} \\ 3x+6y-1=0. \end{cases}$$

Для решения, которой в уравнении прямой l_2 подставляем выражения для x и y через t из уравнений первой прямой и находим значение параметра t, соответствующее точке пересечения: $3(-2t-4)+6(3t+8)-1=0$, $12t+35=0$, $t=-\frac{35}{12}$. Подставим полученное значение t в первое уравнение системы: $x=2\cdot\frac{35}{12}-4=\frac{11}{6}$,

$y = 3 \cdot \left(-\frac{35}{12}\right) + 8 = -\frac{3}{4}$, т.е. точка пересечения заданных прямых $\left(\frac{11}{6}; -\frac{3}{4}\right)$. При решении данной задачи можно пользоваться общими уравнениями прямых. ◄

Пример 117

При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 0$, параллельны?

► Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\frac{3t}{1+t} = \frac{-8}{-2t}$ или $\frac{3t}{1+t} = \frac{4}{t}$, $3t^2 - 4t - 4 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{2}{3}$. ◄

Пример 118	Определить взаимное расположение прямых: а) $10x+6y-1=0$ и $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{5}$, б) $y=-3x+7$ и $\begin{cases} x=-t+2; \\ y=3t. \end{cases}$ в) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ и $y=\dfrac{2}{3}x+1$, г) $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-2}{4}$ и $5x+4y-1=0$.
	► а) Вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(10;6)$, направляющий вектор второй прямой $\overrightarrow{s_2}=(-3;5)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\overrightarrow{n_2}=(5;3)$. Векторы $\overrightarrow{n_1}=(10;6)$ и $\overrightarrow{n_2}=(5;3)$ коллинеарны, т.к. их одноименные координаты пропорциональны: $\dfrac{10}{5}=\dfrac{6}{3}$, т.о. прямые параллельны; б) вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$, направляющий вектор второй прямой $\overrightarrow{s_2}=(-1;3)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$. Прямые параллельны, т.к. имеют один и тот же вектор нормали; в) первое уравнение прямой в «отрезках», второе уравнение прямой с угловым коэффициентом, запишем оба уравнения в общем виде: $3x+2y=6$ и $2x-3y+3=0$, вектор нормали первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$, второй прямой $\overrightarrow{n_2}=(2;-3)$, т.к. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=3\cdot 2+2\cdot(-3)=0$, то прямые перпендикулярны; г) направляющий вектор первой прямой $\overrightarrow{s_1}=(5;4)$, нормальный вектор первой прямой $\overrightarrow{n_1}=(4;-5)$, второй прямой $\overrightarrow{n_2}=(5;4)$, т.к. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=5\cdot 4+4\cdot(-5)=0$, то прямые перпендикулярны. ◄

3. Проекция точки на прямую

▼ *Проекцией точки* $M(x;y)$ *на прямую l* называется точка пересечения прямой, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой *l*. ▲

Алгоритм нахождения проекции точки на прямую

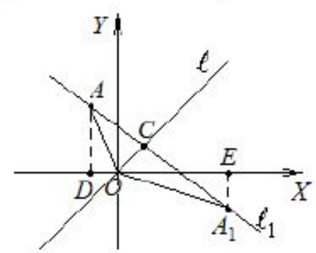
1.	Составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой l;
2.	найти точку пересечения прямых l и l_1.

Пример 119

Найти точку, симметричную точке $A(-2;4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

► Проведём через точку A прямую l_1, перпендикулярно прямой l (биссектриса первого координатного угла): $l_1 \cap l = C$.

На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Необходимо найти координаты точки A_1.



Прямые AA_1 и l перпендикулярны, т.е. их коэффициенты связаны соотношением: $k_{AA_1} = -\frac{1}{k_l}$, т.е. $k_{AA_1} = -1$. Воспользуемся уравнением прямой проходящей через точку в заданном направлении: $y-4=-(x+2)$, преобразуя его имеем: $x+y-2=0$.

Найдем координаты точки C, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y-2=0; \\ y=x. \end{cases}$$

Точка $C(1;1)$ — середина AA_1, тогда координаты точка A_1: $\frac{-2+x}{2}=1$, $x=4$; $\frac{4+y}{2}=1$, $y=-2$; т.е. $A_1(4;-2)$. ◄

4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

▼ *Расстоянием d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. ▲

Расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой, заданной	общим уравнением $Ax+By+C=0$ $$d=\left\lvert\frac{A x_0+B y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\rvert;$$
	нормальным уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ $$d=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\rvert.$$

Пример 120

Найти расстояние

а) от точки $M(6;8)$ до прямой $4x+3y+2=0$;

б) от точки $A(4;3)$ до прямой $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$;

в) между параллельными прямыми $12x-5y+10=0$ и $12x-5y+2=0$.

► а) Прямая задана общим уравнением, используя формулу, $d=\left\lvert\frac{A x_0+B y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\rvert$ имеем: $d=\left\lvert\frac{4\cdot6+3\cdot8+2}{\sqrt{16+9}}\right\rvert=\frac{50}{5}=10$ ед. дл.;

б) прямая задана нормальным уравнением, т.к. $p=2$ и $\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, воспользуемся формулой $d=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\rvert$ имеем: $d=\left\lvert-\frac{3}{5}4+\frac{4}{5}3-2\right\rvert=\lvert-2\rvert=2$ ед. дл.;

в) необходимо найти расстояние от какой-либо точки одной прямой до второй прямой. При этом для нахождения точки на прямой достаточно задать значение одной из координат и из уравнения прямой получить значение другой: в уравнении $12x-5y+10=0$ пусть $x_1=0$, тогда $-5y+10=0$, $y_1=2$.

Теперь воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки $M(0;2)$ до прямой $12x-5y+2=0$: $d=\left\lvert\frac{10\cdot0-5\cdot2+2}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right\rvert=\frac{8}{13}$ ед. дл. ◄

Пример 121	Найти прямую, которая проходит через точку пересечения прямых $x+2y-19=0$; $2x-y-3=0$ и находится от точку $M(2;3)$ на расстоянии 5 единиц.
	► За образующие примем прямые, данные в условии задачи. Уравнение пучка прямых имеет вид:

$x+2y-19+\lambda(2x-y-3)=0$,

$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-19-3\lambda=0$.

Чтобы определить значение параметра λ для искомой прямой, воспользуемся формулой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. По условию $d=5$; $A=1+2\lambda$; $B=2-\lambda$; $C=-19-3\lambda$; $x_0=2$; $y_0=3$, тогда подставляя эти значения в формулу имеем: $5=\dfrac{|(1+2\lambda)2+(2-\lambda)3-19-3\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}$,

$5=\dfrac{|-2\lambda-11|}{\sqrt{1++4\lambda+4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2}}$, $5\sqrt{5\lambda^2+5}=|-2\lambda-11|$,

$121\lambda^2-44\lambda+4=0$, $\lambda=\dfrac{2}{11}$.

Подставляя найденное значение параметра в уравнение пучка прямых имеем: $\left(1+2\cdot\dfrac{2}{11}\right)x+\left(2-\dfrac{2}{11}\right)y-19-3\cdot\dfrac{2}{11}=0$,

$3x+4y-43=0$. ◄

5. Уравнение биссектрис углов между прямыми

Уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид: $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Пример 122	Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y-7=0$, $8x+6y-1=0$.

► Воспользуемся формулой $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ получаем: $\dfrac{3x-4y-7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm\dfrac{8x+6y-1}{\sqrt{8^2+6^2}}$ преобразуя это выражение, находим $\dfrac{3x-4y-7}{5}=\pm\dfrac{8x+6y-1}{10}$, $6x-8y-14=\pm(8x+6y-1)$. Отсюда получаем уравнения биссектрис: $2x+14y+13=0$, $14x-2y-15=0$. ◄

4. Расположение точки относительно прямой

Теорема	Прямая задана уравнением $Ax+By+C=0$, точка $M(x;y)$ не принадлежит заданной прямой, тогда • если точка M лежит *правее* прямой, то $Ax+By+C>0$; • если точка M лежит *левее* прямой, то $Ax+By+C<0$.

Так как прямая $Ax+By+C=0$ разбивает плоскость на две полуплоскости, то для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax+By+C<0$, а в какой $Ax+By+C>0$, применяют *метод контрольных точек*. Для этого берут контрольную точку (не лежащую на прямой) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax+By+C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax+By+C$ имеет противоположный знак.

Пример 123

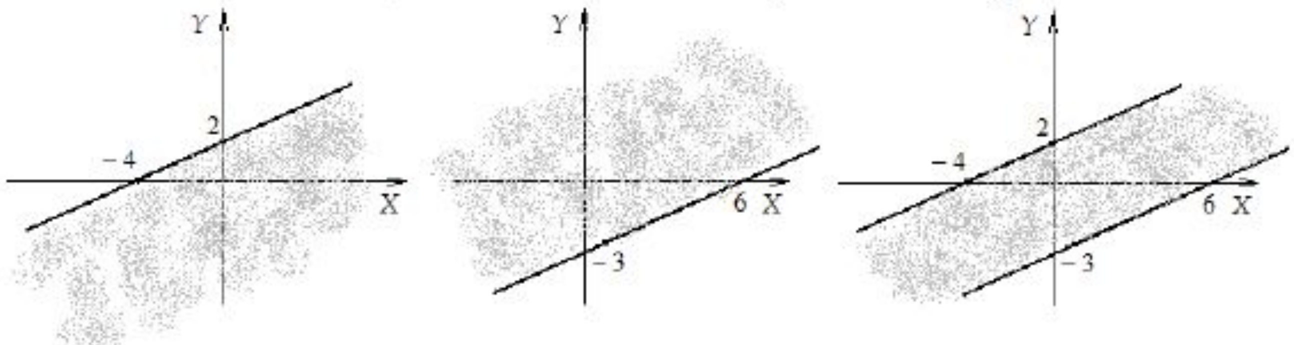
Изобразить множество точек удовлетворяющих системе неравенств:
$$\begin{cases} x-2y+4\ge 0; \\ x-2y-6\le 0. \end{cases}$$

► Построим прямые:

$l_1: x-2y+4=0$, через точки $(0;2)$ и $(-4;0)$. Используя метод контрольной точки для первой прямой: $O(0;0)$, тогда $0-0+4\ge 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие ниже прямой являются решением данного неравенства;

$l_2: x-2y-6=0$, через точки $(0;-3)$ и $(6;0)$. Используя метод контрольной точки для второй прямой: $O(0;0)$, тогда $0-0-6\le 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие выше прямой являются решением данного неравенства.

Таким образом, решение системы неравенств является множество точек плоскости *XOY*, заключенных между данными прямыми.



Пример 124	Составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC: $A(2;0)$, $B(8;-3)$, $C(5;-4)$.

► Для решения задачи найдем уравнения сторон треугольника, а затем для определения знаков неравенств в левую часть каждого уравнения подставим координаты противоположной вершины, которая гарантированно принадлежит соответствующей полуплоскости.

Уравнение стороны AB $: x+2y-2=0$. Подставим координаты точки $C(5;-4)$ в полученное уравнение: $5+2(-4)-2<0$, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x+2y-2\le 0$.

Уравнение стороны BC: $x-3y-17=0$. Подставим координаты точки $A(2;0)$: $2-0-17<0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x-3y-17\le 0$.

Уравнение стороны AC: $4x+3y-8=0$. Подставим координаты точки $B(8;-3)$: $4\cdot 8+3(-3)-8>0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $4x+3y-8\ge 0$.

ΔABC определяется системой неравенств: $\begin{cases} x+2y-2\le 0; \\ x-3y-17\le 0; \\ 4x+3y-8\ge 0. \end{cases}$