

2. Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Очень важно уметь из данного уравнения прямой извлечь всю информацию об этой прямой: координаты точки, через которую проходит прямая, координаты вектора — либо направляющего, либо вектора нормали, т.к. практически во всех задачах о взаимном расположении прямых используются средства векторной алгебры.

Уравнение одной и той же прямой может быть записано различными способами, причем из одного вида уравнения легко получить другие (таблица 8).

Таблица 8 — Взаимосвязи уравнений прямой на плоскости

Исходное уравнение	Полученное уравнение	Связь параметров уравнений
Каноническое $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$	Параметрические $\begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0. \end{cases}$	$M_0(x_0; y_0)$ — данная точка, $\vec{s} = (m; n)$ — направляющий вектор
Каноническое $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$	Общее $Ax + By + C = 0$	$A = n, B = -m, C = -nx_0 + my_0$
Каноническое $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$	С угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0),$ $y = kx + b$	$k = \frac{n}{m}, b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$
Общее $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	Каноническое $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$	$m = -\frac{B}{A}, n = 1$
Общее $Ax + By + C = 0$	В «отрезках» на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$
Общее $Ax + By + C = 0,$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	С угловым коэффициентом $y = kx + b,$ $y - y_0 = k(x - x_0)$	$k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$
Общее $Ax + By + C = 0$	Нормальное $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$	$p = -C \lambda, \cos \alpha = A \lambda,$ $\sin \alpha = B \lambda, \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ знак λ противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой

Пример 111

Прямая задана каноническим уравнением $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5}$, записать другие виды уравнений этой прямой.

► Из исходного уравнения имеем: координаты точки, через которую проходит прямая $M_0(2; -4)$ и координаты направляющего вектора $\vec{s} = (m; n) = (3; -5)$.

Перейдем к параметрическим уравнениям $\begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3t + 2; \\ y = -5t - 4. \end{cases}$$

Перейдем к общему уравнению $Ax + By + C = 0$: $A = n = -5$, $B = -m = -3$, $C = -nx_0 + my_0 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) = -2$, тогда $-5(x-2) - 3(y+4) = 0$, $5(x-2) + 3(y+4) = 0$, $5x + 3y + 2 = 0$, где $\vec{n} = (5; 3)$ — вектор нормали данной прямой.

Перейдем к уравнению с угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \frac{n}{m} = -\frac{5}{3}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -4$: $y + 4 = -\frac{5}{3}(x - 2)$, $y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$.

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x + 3y + 2 = 0$, выразив из него y : $3y = -5x - 2$, $y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$.

Перейдем к уравнению в «отрезках», из общего уравнения $5x + 3y + 2 = 0$ имеем: $A = 5$, $B = 3$, $C = 2$, тогда $a = -\frac{C}{A} = -\frac{2}{5}$,

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{5}{3}, \text{ т.е. } \frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{3y}{-\frac{2}{3}} = 1.$$

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения $5x + 3y = -2$, разделив все члены уравнения на свободный коэффициент, так чтобы в правой части получилась единица:

$$\frac{5x}{-2} + \frac{3y}{-2} = 1 \text{ или } \frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{3y}{-\frac{2}{3}} = 1. \text{ Из полученного уравнения видно, что}$$

прямая отсекает на оси OX отрезок $a = -\frac{2}{5}$, а на оси OY отрезок

$$b = -\frac{2}{3}.$$

От общего уравнения $5x + 3y + 2 = 0$ перейдем к *нормальному*

уравнению: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, определим нормирующий

$$\text{множитель } \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{34}}, \lambda < 0, \text{ т.к. } C = 2 > 0$$

(знак для λ выбирается противоположный знаку параметра C),

$$\cos \alpha = A \lambda = -\frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \sin \alpha = B \lambda = -\frac{3}{\sqrt{34}}, \quad p = -C \lambda = \frac{2}{\sqrt{34}}, \text{ тогда}$$

$$-\frac{5x}{\sqrt{34}} - \frac{3y}{\sqrt{34}} - \frac{2}{\sqrt{34}} = 0, \quad \frac{5x}{\sqrt{34}} + \frac{3y}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{34}} = 0. \blacktriangleleft$$

3. Основные задачи на прямую на плоскости

1. Построение прямых на плоскости

Пример 112

Построить прямые а) $3x + 2y - 6 = 0$, б) $y = 2x$; в) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$,

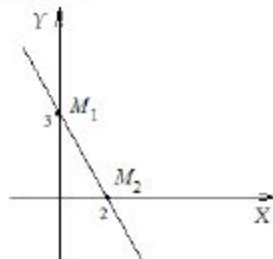
г) $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 5. \end{cases}$ д) $x - 5 = 0$, е) $5y + 7 = 0$.

► Общий подход к решению задач состоит в определении координат двух точек, через которые проходит данная прямая.

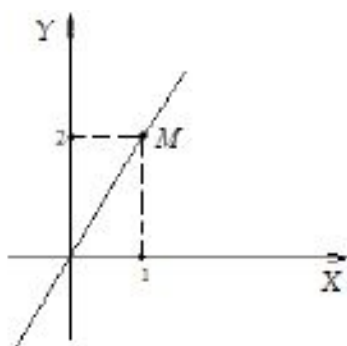
а) Найдем точки пересечения прямой $3x + 2y - 6 = 0$ с осями координат. Зададим $x = 0$, тогда $y = 3$, т.е. точка $M_1(0; 3)$, зададим $y = 0$, тогда $x = 2$, т.е. $M_2(2; 0)$.

x	y
0	3
2	0

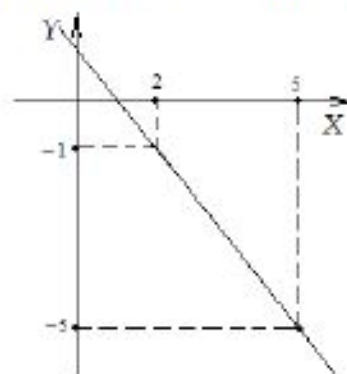
Строим точки $M_1(0; 3)$ и $M_2(2; 0)$.



б) Прямая $y = 2x$ проходит через начало координат $O(0; 0)$. Вторую точку прямой получим, взяв значение $x = 1$, тогда значение $y = 2$, т.е. точка $M(1; 2)$.

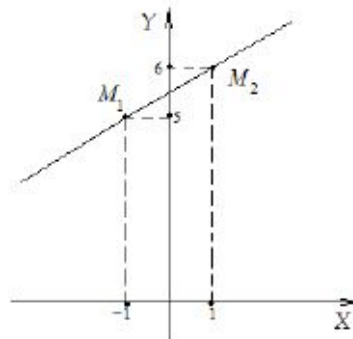


в) Прямая задана каноническим уравнением $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$, поэтому координаты одной точки известны $M_1(2; -1)$. Координаты второй точки получим, взяв в уравнении прямой $x=5$ (чтобы получилось целочисленное значение), тогда $y=-5$, т.е. $M_2(5; -5)$.

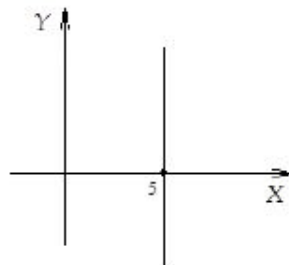


г) Прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 5. \end{cases}$

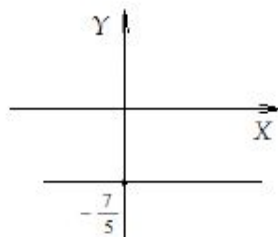
Из уравнений имеем координаты одной точки: $M_1(-1; 5)$. Координаты второй точки получим, взяв какое-либо значение параметра t и вычислив соответствующее значение x и y . Пусть $t=1$, тогда $x=2-1=1$, $y=1+5=6$, т.е. $M_2(1; 6)$.



д) В уравнении $x - 5 = 0$ отсутствует переменная y , данная прямая параллельная оси OY и проходит через точку $(5; 0)$.



е) В уравнении $5y + 7 = 0$ отсутствует переменная x , данная прямая параллельная оси OX и проходит через точку $\left(0; -\frac{7}{5}\right)$.



2. Взаимное расположение прямых

Прямые на плоскости могут быть параллельными, перпендикулярными или в общем случае пересекаться под каким-либо углом. Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости (см. таб. 9).

Под *углом между прямыми на плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 , заданными уравнениями

с угловыми

коэффициентами

$$y_1 = k_1x + b, \quad y_2 = k_2x + b_2$$

или

уравнениями в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

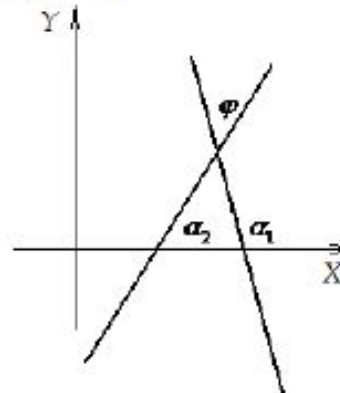
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right| = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$$

или

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями:
 $y_1 = k_1x + b, \quad y_2 = k_2x + b_2.$



Угол $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле
треугольника), $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2, \text{ тогда } \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Если не учитывать, какая прямая является первой, а
какая второй, то правая часть формулы берется по
модулю. ●

Таблица 9 — Взаимное расположение двух прямых

Способ задания прямых	Условие параллельности	Условие перпендикулярности	Угол между прямыми
<p>Общее уравнение</p> $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$ <p>где $\vec{n}_1 = (A_1; B_1),$ $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ — нормальные векторы</p>	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } =$ $= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$ $\operatorname{tg} \varphi = \left \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right $
<p>Канонические уравнение</p> $l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1},$ $l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$ <p>где $\vec{s}_1 = (m_1; n_1),$ $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ — направляющие векторы</p>	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2,$ $\vec{s}_1 = \lambda \cdot \vec{s}_2,$ $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 } =$ $= \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$
<p>Уравнения с угловым коэффициентом</p> $l_1: y = k_1x + b_1,$ $l_2: y = k_2x + b_2,$ <p>где $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1,$ $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$</p>	$k_1 = k_2$	$k_1k_2 + 1 = 0,$ $k_1 = -\frac{1}{k_2}$	$\operatorname{tg} \varphi = \left \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right $

Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

При нахождении общих точек двух прямых, заданных общим уравнением, т.е. при решении системы алгебраических уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ возможны случаи:

- | | |
|----|---|
| 1. | если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, т.е. $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые пересекаются; |
| 2. | если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны; |
| 3. | если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают. |

Три прямые, заданные общими уравнениями имеют общую точку, если:

$$\gg \gg \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 113

Найти угол между прямыми а) $5x - 12y - 16 = 0$ и $3x + 4y - 12 = 0$,
б) $3x + 2y - 4 = 0$ и $3x + 6y = 1$.

► а) Прямые заданы общими уравнениями, перейдем к уравнениям с угловым коэффициентом, т.е. $y = \frac{5}{12}x - \frac{4}{3}$ и $y = -\frac{3}{4}x + 3$, где $k_1 = \frac{5}{12}$,

$k_2 = -\frac{3}{4}$, тогда угол между прямыми найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\frac{5}{12} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{12} \left(-\frac{3}{4}\right)} \right| = \frac{56}{33}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{56}{33}.$$

б) Прямые заданы общими уравнениями, их вектора нормали $\vec{n}_1 = (3; 2)$, $\vec{n}_2 = (3; 6)$, тогда $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{9 + 36}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$,

$$\varphi = \arccos \frac{7}{\sqrt{65}}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 114

Составить уравнение прямой,

а) проходящей через точку $M(-2;4)$ параллельно прямой $2x - 3y + 6 = 0$;

б) проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно прямой $5x - 4y - 20 = 0$.

► а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $x_0 = -2$, $y_0 = 4$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y = \frac{2}{3}x + 2$, т.е. $k_1 = \frac{2}{3}$. Если прямые параллельны, то их коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$.

Тогда $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 2)$, $3y - 12 = 2x + 4$, т.е. $2x - 3y + 16 = 0$;

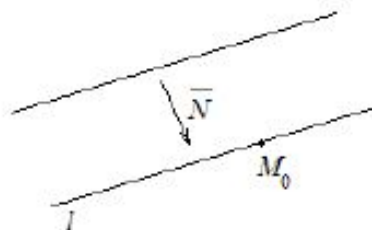
б) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. Найдем угловой коэффициент заданной прямой: $y = \frac{5}{4}x - 5$, т.е. $k_1 = \frac{5}{4}$. Если прямые перпендикулярны, то их коэффициенты связаны соотношением $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, следовательно, $k_2 = -\frac{4}{5}$. Тогда

$y - 3 = -\frac{4}{5}(x - 2)$, $5y - 15 = -4x + 8$, т.е. $4x + 5y - 23 = 0$. ◀

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2; -4)$:

а) параллельно, б) перпендикулярно к прямой $l: 3x - 5y + 2 = 0$.

► а) Исходная прямая задана общим уравнением $3x - 5y + 2 = 0$, из которого следует, что нормальный вектор прямой $\vec{n} = (3; -5)$. Вектор нормали данной прямой может служить и нормалью к параллельной прямой.



Возьмем общее уравнение в координатной форме $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, подставив координаты точки $M_0(2; -4)$ и вектора нормали $\vec{n} = (3; -5)$ имеем: $3(x - 2) - 5(y + 4) = 0$, $3x - 5y - 26 = 0$.

б) Вектор нормали исходной прямой служит направляющим вектором для перпендикулярной прямой $\vec{s} = (3; -5)$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, подставив координаты точки $M_0(2; -4)$ и направляющего вектора $\vec{s} = (3; -5)$ имеем:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{-5},$$

$$-5(x - 2) = 3(y + 4),$$

$$5x + 3y + 2 = 0. \blacktriangleleft$$

Задание 30

- 1) При каком значении параметра a прямые $3ax - 8y + 13 = 0$ и $(a + 1)x - 2ay - 21 = 0$ параллельны?
- 2) при каком значении параметра a прямые $(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$ будут перпендикулярны друг к другу?

Ответ: а) $a_1 = 2$ или $a_2 = -\frac{2}{3}$; б) $a = -\frac{1}{18}$.

Пример 116

Найти точку пересечения прямых: а) $3x - 4y + 11 = 0$ и $4x - y - 7 = 0$,

б) $\frac{x+4}{-2} = \frac{y-8}{3}$ и $3x + 6y = 1$.

► Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

а) Исходя из условия задачи следует решить систему:
$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0; \\ 4x - y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решим ее по формулам Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 39$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, тогда $x = 3$, $y = 5$, т.е. точка пересечения заданных прямых $(3; 5)$;

б) Для нахождения общих точек двух прямых необходимо решить систему уравнений, в которой предварительно перевести каноническое уравнение прямой l_1 в параметрический вид, т.е. получим систему:

$$\begin{cases} x = -2t - 4; \\ y = 3t + 8; \\ 3x + 6y - 1 = 0. \end{cases}$$

Для решения, которой в уравнении прямой l_2 подставляем выражения для x и y через t из уравнений первой прямой и находим значение параметра t , соответствующее точке пересечения:

$$3(-2t - 4) + 6(3t + 8) - 1 = 0, \quad 12t + 35 = 0, \quad t = -\frac{35}{12}. \quad \text{Подставим}$$

полученное значение t в первое уравнение системы: $x = 2 \cdot \frac{35}{12} - 4 = \frac{11}{6}$,

$y = 3 \cdot \left(-\frac{35}{12}\right) + 8 = -\frac{3}{4}$, т.е. точка пересечения заданных прямых $\left(\frac{11}{6}; -\frac{3}{4}\right)$. При решении данной задачи можно пользоваться общими уравнениями прямых. ◀

Пример 117

При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 0$, параллельны?

► Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\frac{3t}{1+t} = \frac{-8}{-2t}$ или

$$\frac{3t}{1+t} = \frac{4}{t}, \quad 3t^2 - 4t - 4 = 0, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{2}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

Определить взаимное расположение прямых: а) $10x + 6y - 1 = 0$ и

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{5}, \quad \text{б) } y = -3x + 7 \text{ и } \begin{cases} x = -t + 2; \\ y = 3t. \end{cases} \quad \text{в) } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \text{ и } y = \frac{2}{3}x + 1,$$

$$\text{г) } \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{4} \text{ и } 5x + 4y - 1 = 0.$$

► а) Вектор нормали первой прямой $\vec{n}_1 = (10; 6)$, направляющий вектор второй прямой $\vec{s}_2 = (-3; 5)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\vec{n}_2 = (5; 3)$. Векторы $\vec{n}_1 = (10; 6)$ и $\vec{n}_2 = (5; 3)$ коллинеарны, т.к. их одноименные координаты пропорциональны: $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$, т.о. прямые параллельны;

б) вектор нормали первой прямой $\vec{n}_1 = (3; 1)$, направляющий вектор второй прямой $\vec{s}_2 = (-1; 3)$, тогда нормальный вектор этой прямой $\vec{n}_2 = (3; 1)$. Прямые параллельны, т.к. имеют один и тот же вектор нормали;

в) первое уравнение прямой в «отрезках», второе уравнение прямой с угловым коэффициентом, запишем оба уравнения в общем виде: $3x + 2y = 6$ и $2x - 3y + 3 = 0$, вектор нормали первой прямой $\vec{n}_1 = (3; 2)$, второй прямой $\vec{n}_2 = (2; -3)$, т.к. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$, то прямые перпендикулярны;

г) направляющий вектор первой прямой $\vec{s}_1 = (5; 4)$, нормальный вектор первой прямой $\vec{n}_1 = (4; -5)$, второй прямой $\vec{n}_2 = (5; 4)$, т.к. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = 0$, то прямые перпендикулярны. ◀

▼ Проекцией точки $M(x; y)$ на прямую l называется точка пересечения прямой, проходящей через точку $M(x; y)$ перпендикулярно прямой l . ▲

Алгоритм нахождения проекции точки на прямую

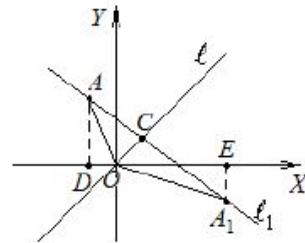
1. Составить уравнение прямой l_1 , проходящей через точку $M(x; y)$ перпендикулярно прямой l ;
2. найти точку пересечения прямых l и l_1 .

Пример 119

Найти точку, симметричную точке $A(-2; 4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

► Проведём через точку A прямую l_1 , перпендикулярно прямой l (биссектриса первого координатного угла): $l_1 \cap l = C$.

На прямой l_1 отложим отрезок CA_1 , равный отрезку AC . Необходимо найти координаты точки A_1 .



Прямые AA_1 и l перпендикулярны, т.е. их коэффициенты связаны соотношением: $k_{AA_1} = -\frac{1}{k_l}$, т.е. $k_{AA_1} = -1$. Воспользуемся уравнением прямой проходящей через точку A в заданном направлении: $y - 4 = -(x + 2)$, преобразуя его имеем: $x + y - 2 = 0$.

Найдем координаты точки C , для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0; \\ y = x. \end{cases}$$

Точка $C(1; 1)$ — середина AA_1 , тогда координаты точка A_1 :

$$\frac{-2+x}{2} = 1, x = 4; \quad \frac{4+y}{2} = 1, y = -2; \text{ т.е. } A_1(4; -2). \blacktriangleleft$$

4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

▼ Расстоянием d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. ▲

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной	общим уравнением $Ax + By + C = 0$
	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}};$
	нормальным уравнением $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$
	$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p .$

Пример 120

Найти расстояние

а) от точки $M(6; 8)$ до прямой $4x + 3y + 2 = 0$;

б) от точки $A(4; 3)$ до прямой $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$;

в) между параллельными прямыми $12x - 5y + 10 = 0$ и $12x - 5y + 2 = 0$.

► а) Прямая задана общим уравнением, используя формулу,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ имеем: } d = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ ед. дл.};$$

б) прямая задана нормальным уравнением, т.к. $p = 2$ и

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1, \text{ воспользуемся формулой } d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$$

$$\text{имеем: } d = \left|-\frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot 3 - 2\right| = |-2| = 2 \text{ ед. дл.};$$

в) необходимо найти расстояние от какой-либо точки одной прямой до второй прямой. При этом для нахождения точки на прямой достаточно задать значение одной из координат и из уравнения прямой получить значение другой: в уравнении $12x - 5y + 10 = 0$ пусть $x_1 = 0$, тогда $-5y + 10 = 0$, $y_1 = 2$.

Теперь воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки

$$M(0; 2) \text{ до прямой } 12x - 5y + 2 = 0: d = \frac{|10 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{13} \text{ ед. дл.} \blacktriangleleft$$

Пример 121

Найти прямую, которая проходит через точку пересечения прямых $x + 2y - 19 = 0$; $2x - y - 3 = 0$ и находится от точку $M(2; 3)$ на расстоянии 5 единиц.

► За образующие примем прямые, данные в условии задачи. Уравнение пучка прямых имеет вид:

$$\begin{aligned}x + 2y - 19 + \lambda(2x - y - 3) &= 0, \\(1 + 2\lambda)x + (2 - \lambda)y - 19 - 3\lambda &= 0.\end{aligned}$$

Чтобы определить значение параметра λ для искомой прямой, воспользуемся формулой $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. По условию $d = 5$;

$$A = 1 + 2\lambda; B = 2 - \lambda; C = -19 - 3\lambda; x_0 = 2; y_0 = 3, \text{ тогда подставляя эти}$$

значения в формулу имеем: $5 = \frac{|(1 + 2\lambda)2 + (2 - \lambda)3 - 19 - 3\lambda|}{\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2}},$

$$5 = \frac{|-2\lambda - 11|}{\sqrt{1 + 4\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2}}, \quad 5\sqrt{5\lambda^2 + 5} = |-2\lambda - 11|,$$

$$121\lambda^2 - 44\lambda + 4 = 0, \quad \lambda = \frac{2}{11}.$$

Подставляя найденное значение параметра в уравнение пучка прямых имеем: $\left(1 + 2 \cdot \frac{2}{11}\right)x + \left(2 - \frac{2}{11}\right)y - 19 - 3 \cdot \frac{2}{11} = 0,$

$$3x + 4y - 43 = 0. \quad \blacktriangleleft$$

5. Уравнение биссектрис углов между прямыми

Уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеют вид:
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пример 122

Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x - 4y - 7 = 0$, $8x + 6y - 1 = 0$.

► Воспользуемся формулой $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ получаем:

$\frac{3x - 4y - 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{8x + 6y - 1}{\sqrt{8^2 + 6^2}}$ преобразуя это выражение, находим

$\frac{3x - 4y - 7}{5} = \pm \frac{8x + 6y - 1}{10}$, $6x - 8y - 14 = \pm(8x + 6y - 1)$. Отсюда получаем

уравнения биссектрис: $2x + 14y + 13 = 0$, $14x - 2y - 15 = 0$. ◀

4. Расположение точки относительно прямой

Теорема

Прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, точка $M(x; y)$ не принадлежит заданной прямой, тогда

- если точка M лежит *правее* прямой, то $Ax + By + C > 0$;
- если точка M лежит *левее* прямой, то $Ax + By + C < 0$.

Так как прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости, то для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax + By + C < 0$, а в какой $Ax + By + C > 0$, применяют *метод контрольных точек*. Для этого берут контрольную точку (не лежащую на прямой) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax + By + C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax + By + C$ имеет противоположный знак.

Пример 123

Изобразить множество точек удовлетворяющих системе неравенств:

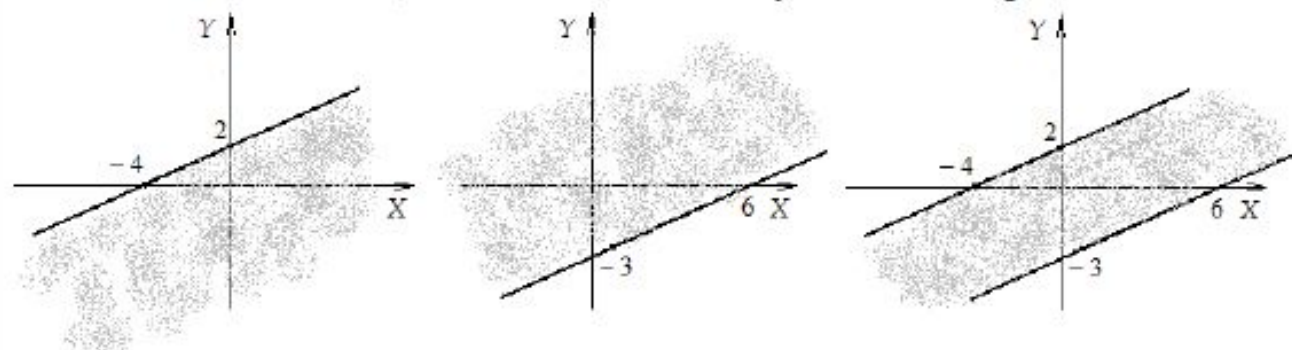
$$\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0; \\ x - 2y - 6 \leq 0. \end{cases}$$

► Построим прямые:

$l_1: x - 2y + 4 = 0$, через точки $(0; 2)$ и $(-4; 0)$. Используя метод контрольной точки для первой прямой: $O(0; 0)$, тогда $0 - 0 + 4 \geq 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие ниже прямой являются решением данного неравенства;

$l_2: x - 2y - 6 = 0$, через точки $(0; -3)$ и $(6; 0)$. Используя метод контрольной точки для второй прямой: $O(0; 0)$, тогда $0 - 0 - 6 \leq 0$ — истинное высказывание, т.е. все точки, лежащие выше прямой являются решением данного неравенства.

Таким образом, решение системы неравенств является множеством точек плоскости XOY , заключенных между данными прямыми.



Пример 124

Составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC : $A(2;0)$, $B(8;-3)$, $C(5;-4)$.

► Для решения задачи найдем уравнения сторон треугольника, а затем для определения знаков неравенств в левую часть каждого уравнения

подставим координаты противоположной вершины, которая гарантированно принадлежит соответствующей полуплоскости.

Уравнение стороны AB : $x + 2y - 2 = 0$. Подставим координаты точки $C(5;-4)$ в полученное уравнение: $5 + 2(-4) - 2 < 0$, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x + 2y - 2 \leq 0$.

Уравнение стороны BC : $x - 3y - 17 = 0$. Подставим координаты точки $A(2;0)$: $2 - 0 - 17 < 0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $x - 3y - 17 \leq 0$.

Уравнение стороны AC : $4x + 3y - 8 = 0$. Подставим координаты точки $B(8;-3)$: $4 \cdot 8 + 3(-3) - 8 > 0$ в полученное уравнение, т.е. треугольник ABC лежит в полуплоскости $4x + 3y - 8 \geq 0$.

$$\Delta ABC \text{ определяется системой неравенств: } \begin{cases} x + 2y - 2 \leq 0; \\ x - 3y - 17 \leq 0; \\ 4x + 3y - 8 \geq 0. \end{cases}$$

