Здравствуйте!

Лекция №10

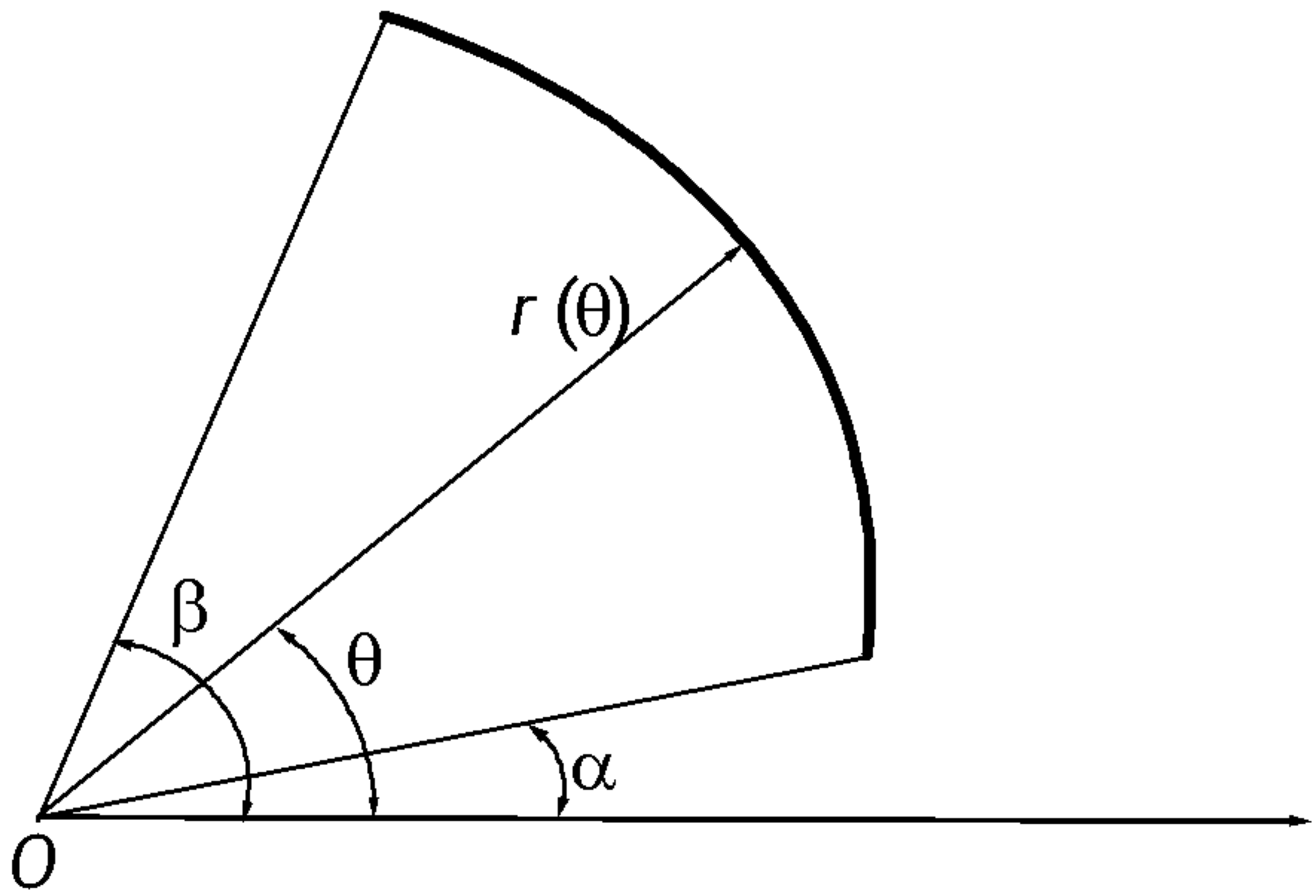
Частные случаи длины дуги

1. Явное задание кривой.

Пусть кривая задана явно в виде $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Беря в качестве параметра $t = x$, получим, что $x'(t) = 1$, $y'(t) = f'(t)$ и наша формула дает

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}\, dt.$$

2. Кривая в полярных координатах.



В полярных координатах кривая задается уравнением , где θ – полярный угол, меняющийся в пределах .

При переходе к декартовым координатам, получим уравнение кривой в параметрической форме

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

в котором угол θ играет роль параметра.

Теперь имеем

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$
$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

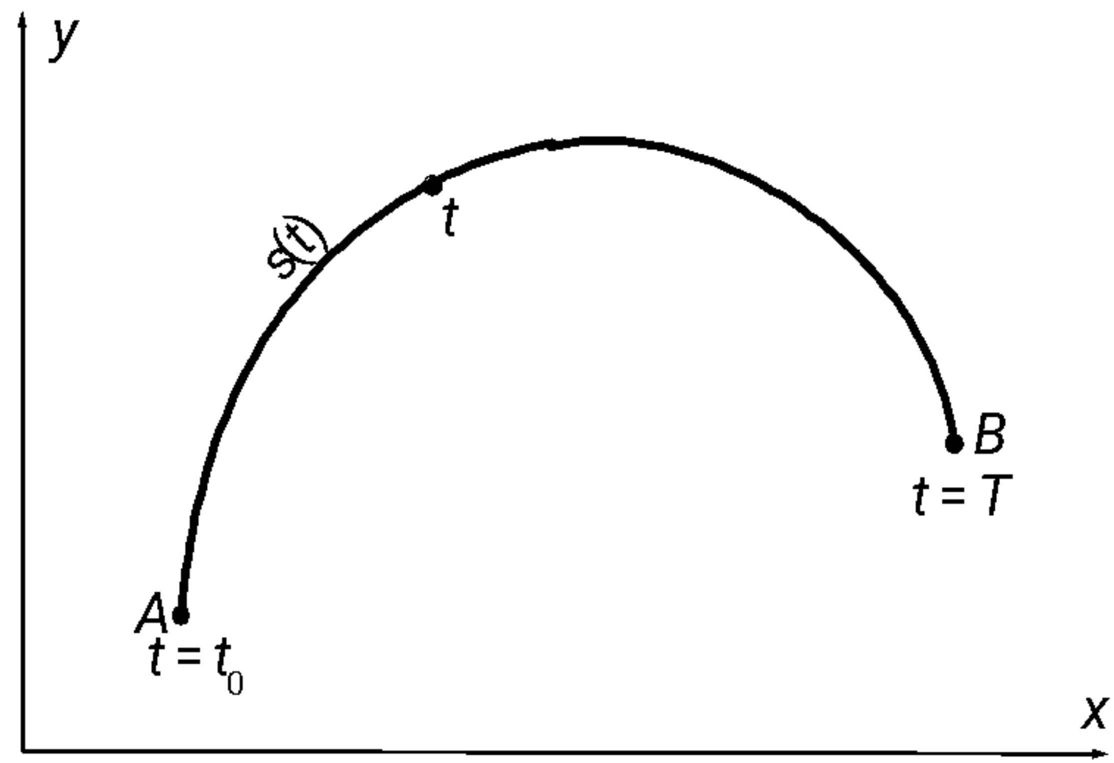
откуда, после несложных преобразований, получим

$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (r'(\theta))^2 + r^2(\theta)$$

так что длина дуги кривой в полярных координатах дается выражением

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r^2(\theta)}\, d\theta.$$

3. Длина дуги как функция от параметра. Дифференциал длины дуги.



Пусть теперь мы ищем длину дуги от точки со значением параметра, равным до точки со значением параметра, равным t.

Тогда имеем

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$s'(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}.$$

Преобразуем это выражение. Имеем

$$ds=s'(t)dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{(x'(t)dt)^2+(y'(t)dt)^2}=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

что и дает явное выражение для дифференциала длины дуги плоской кривой.

В полярной системе координат получаем

$$s(\theta)=\int_{\alpha}^{\theta}\sqrt{(r'(\vartheta))^2+r^2(\vartheta)}d\vartheta,$$

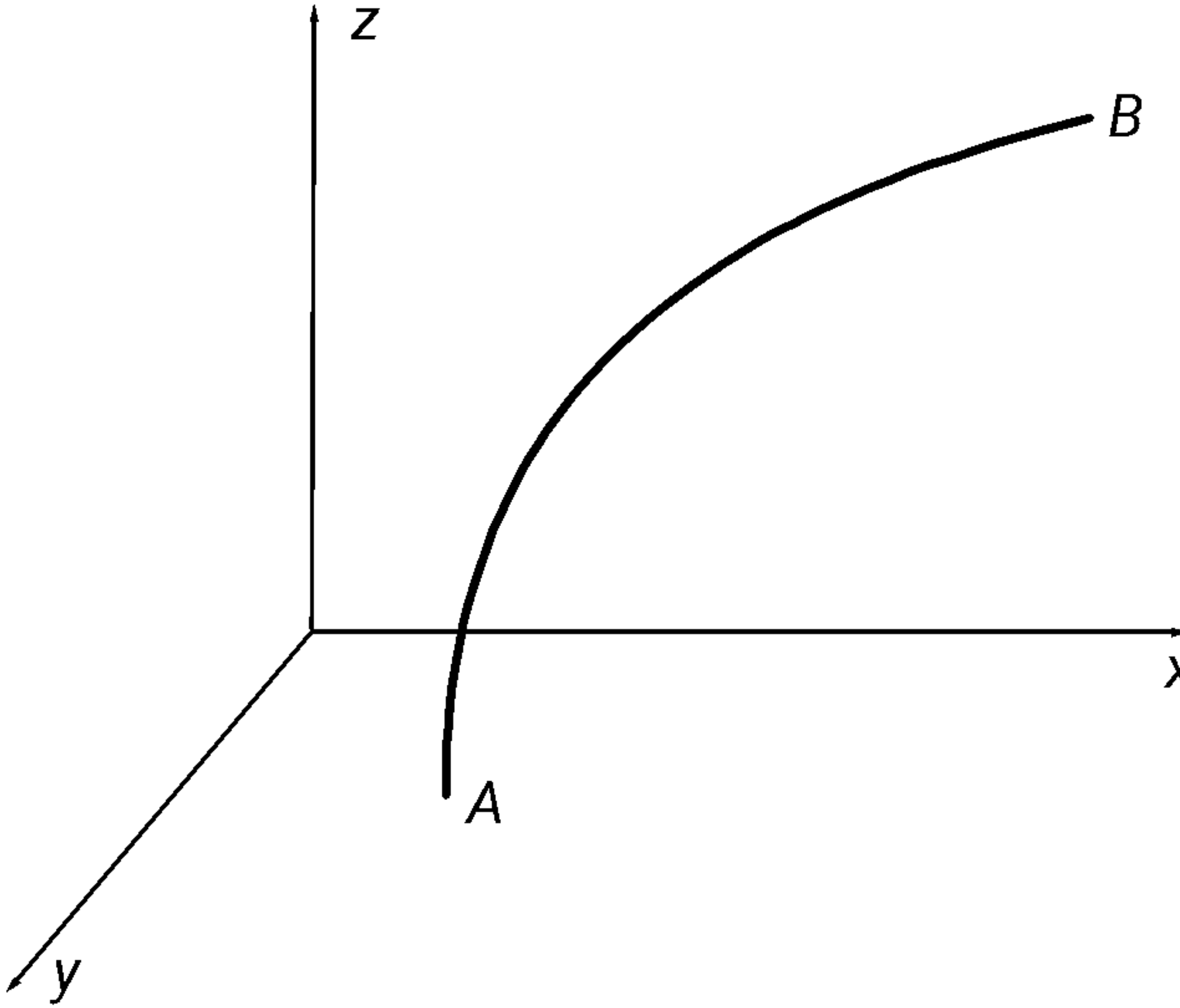
откуда

$$s'(\theta)=\sqrt{(r'(\theta))^2+r^2(\theta)},$$

$$ds(\theta)=s'(\theta)d\theta=\sqrt{(r'(\theta))^2+r^2(\theta)}d\theta=$$

$$=\sqrt{(r'(\theta)d\theta)^2+(r(\theta)d\theta)^2}=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2},$$

что и дает выражение для дифференциала длины дуги в полярных координатах.


z
B
x
A
y

В трехмерном пространстве кривая задается следующим образом :

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_0 \le t \le T. \\ z = z(t), \end{cases}$$

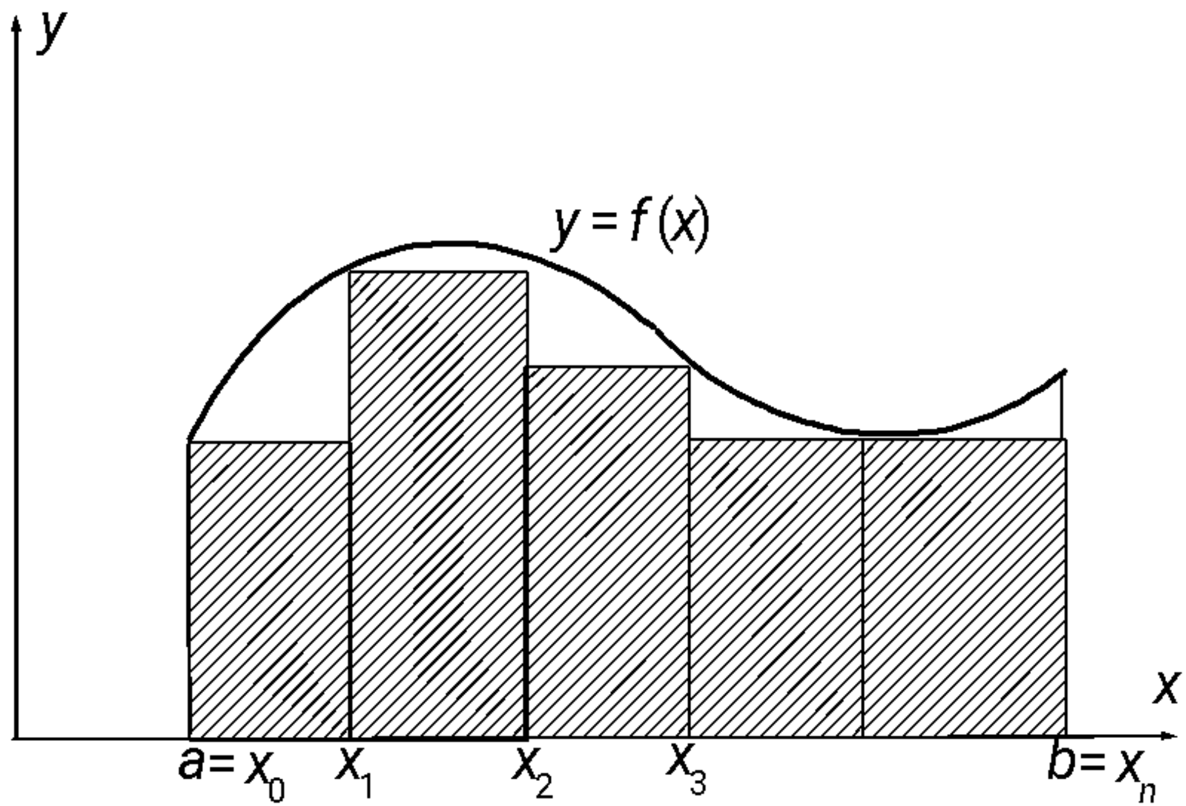
Длина дуги пространственной кривой равна

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Вычисление площадей
Площадь криволинейной трапеции.



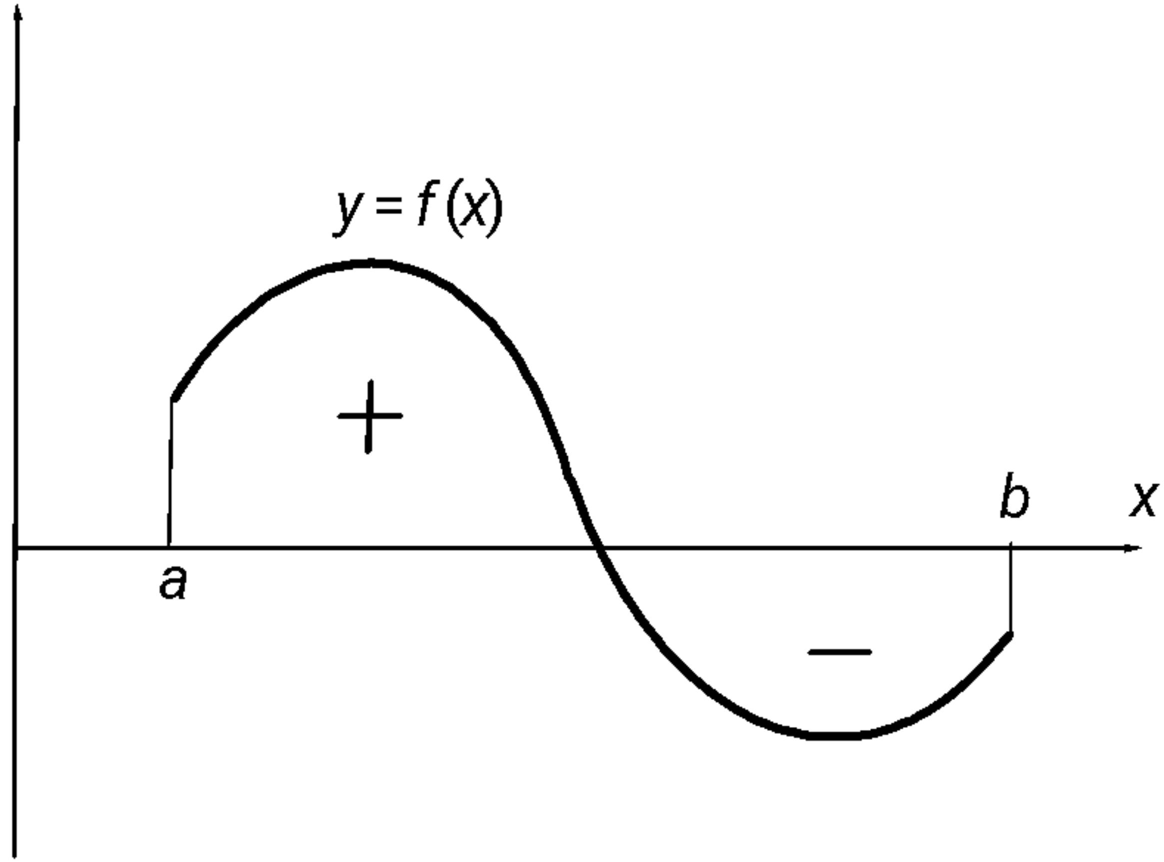
Рассмотрим фигуру, называемую **криволинейной трапецией**. Ее границами являются: ось *OX* (внизу), прямые $x=a$ (слева) и $x=b$ (справа) и кривая (сверху) (см. рис.).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Составим величины $P_* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ и $P^* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$, в которых узнаем верхние и нижние суммы Дарбу. Величины $I_* = \lim\limits_{\lambda\to 0} P_*$ и $I^* = \lim\limits_{\lambda\to 0} P^*$ называются внутренней и внешней площадями криволинейной трапеции. Если выполняется равенство $I_* = I^* = P$, то их общее значение и называется площадью криволинейной трапеции.

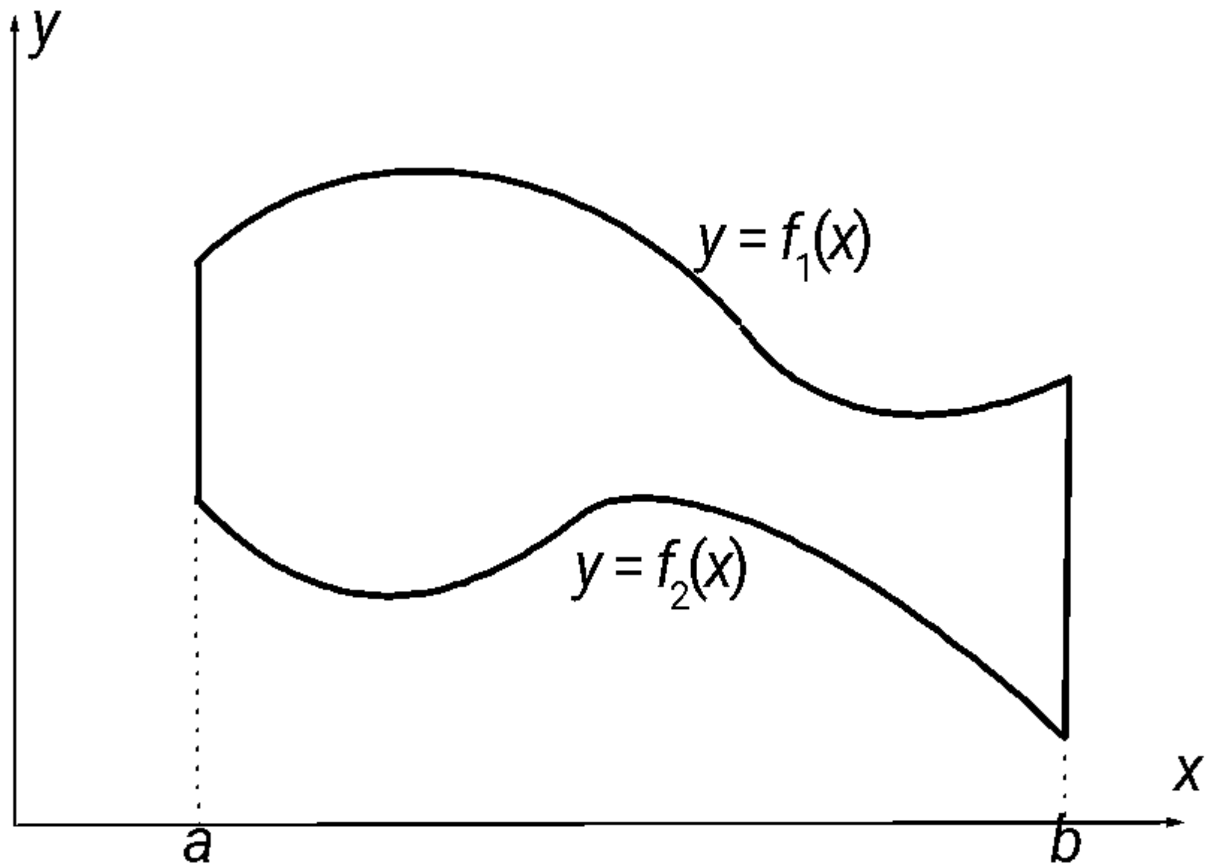
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то, вспоминая теорию определенного интеграла, можно записать

$$P = \int_a^b f(x)dx,$$

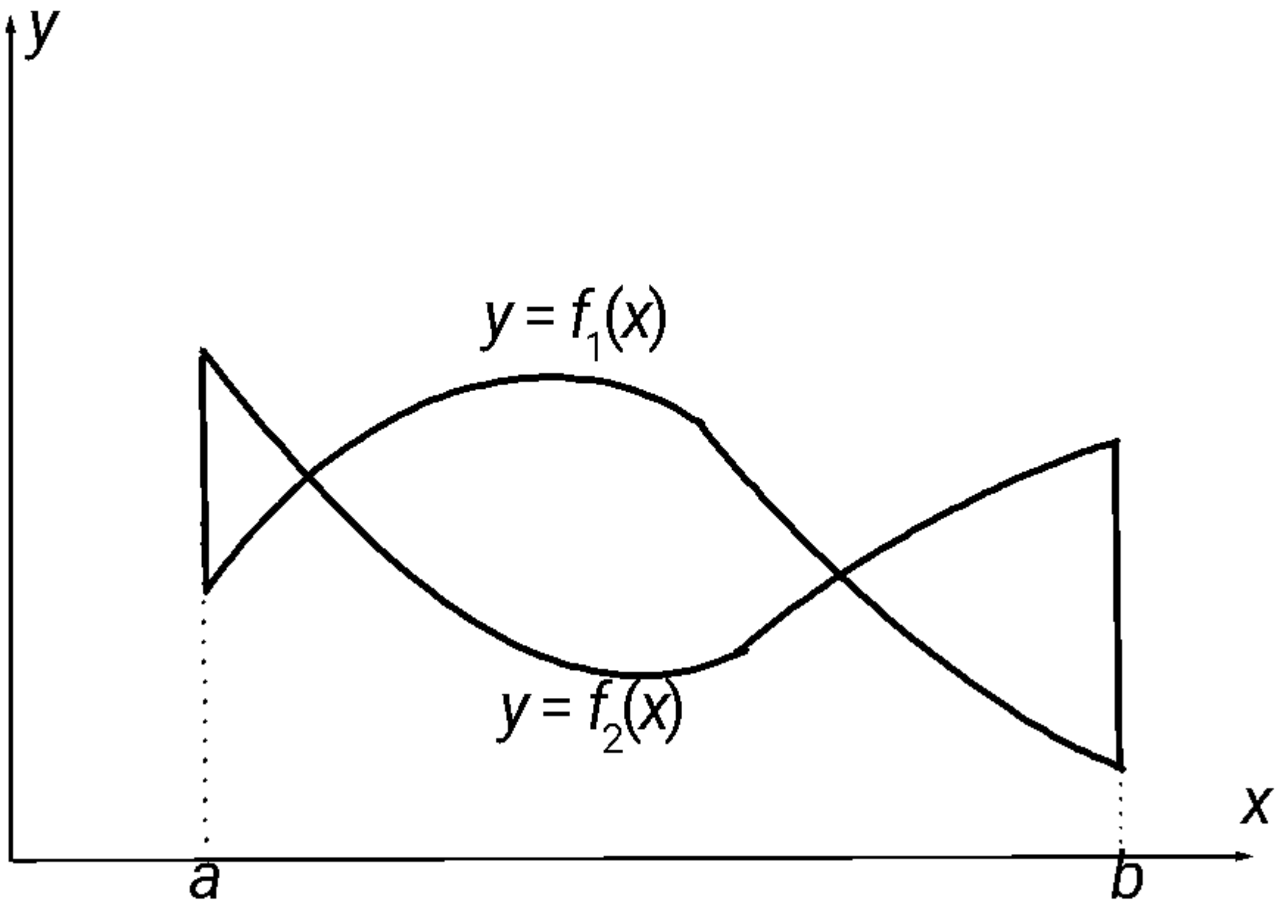
что и определяет площадь криволинейной трапеции.



Так как площадь не может быть отрицательной, то в этом случае

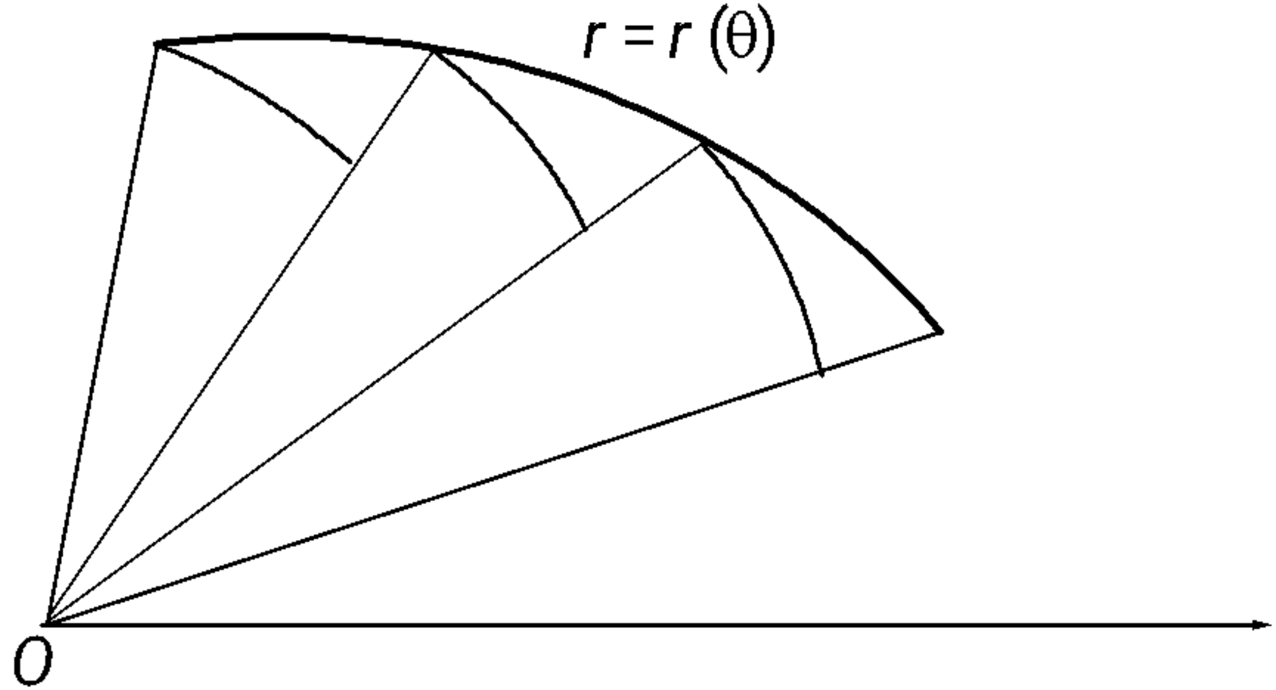


В этом случае очевидно, что



Наконец, в этом случае .

Площадь криволинейного сектора



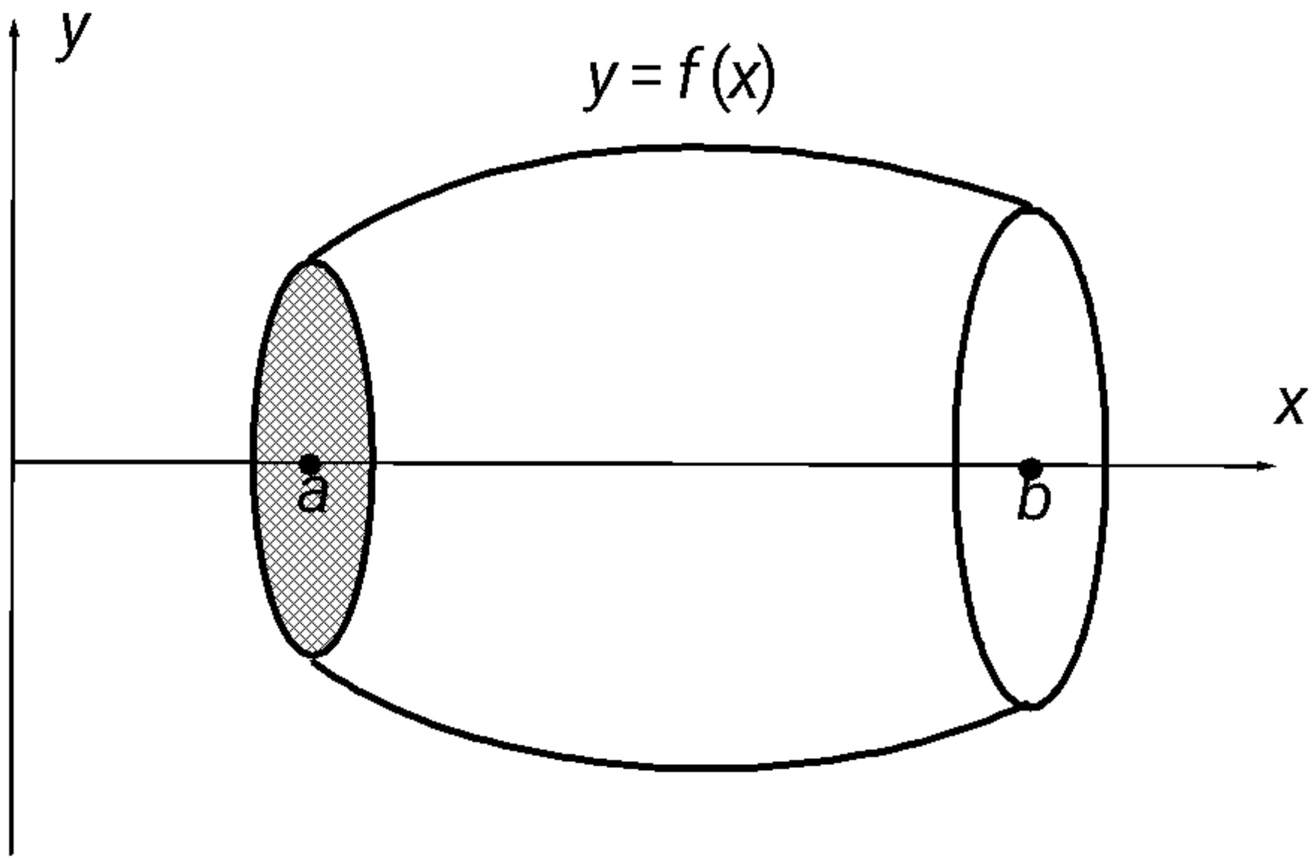
Рассмотрим кривую , , заданную в полярных координатах. Соединим концы кривой прямыми линиями с полюсом системы координат. Получившаяся фигура называется криволинейным сектором.

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на части $\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_{n-1}<\theta_n=\beta$ и пусть $\lambda=\max\limits_i \Delta\theta_i$. Пусть далее $r_i=\inf\limits_{\theta\in[\theta_i,\theta_{i+1}]} r(\theta)$ и $R_i=\sup\limits_{\theta\in[\theta_i,\theta_{i+1}]} r(\theta)$.

Построим величины $P_*=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i^2\Delta\theta_i$ и $P^*=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} R_i^2\Delta\theta_i$, имеющие смысл внутренней и внешней площадей криволинейного сектора. Если $\lim\limits_{\lambda\to 0} P_*=\lim\limits_{\lambda\to 0} P^*=P$, то величина P называется площадью криволинейного сектора. Если функция $r(\theta)$ интегрируема на $[\alpha,\beta]$, то

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

Объем тела вращения



Представим себе, что имеется кривая , заданная на отрезке . Пусть эта кривая **вращается** около оси *OX*. Получающееся тело называется **телом вращения**

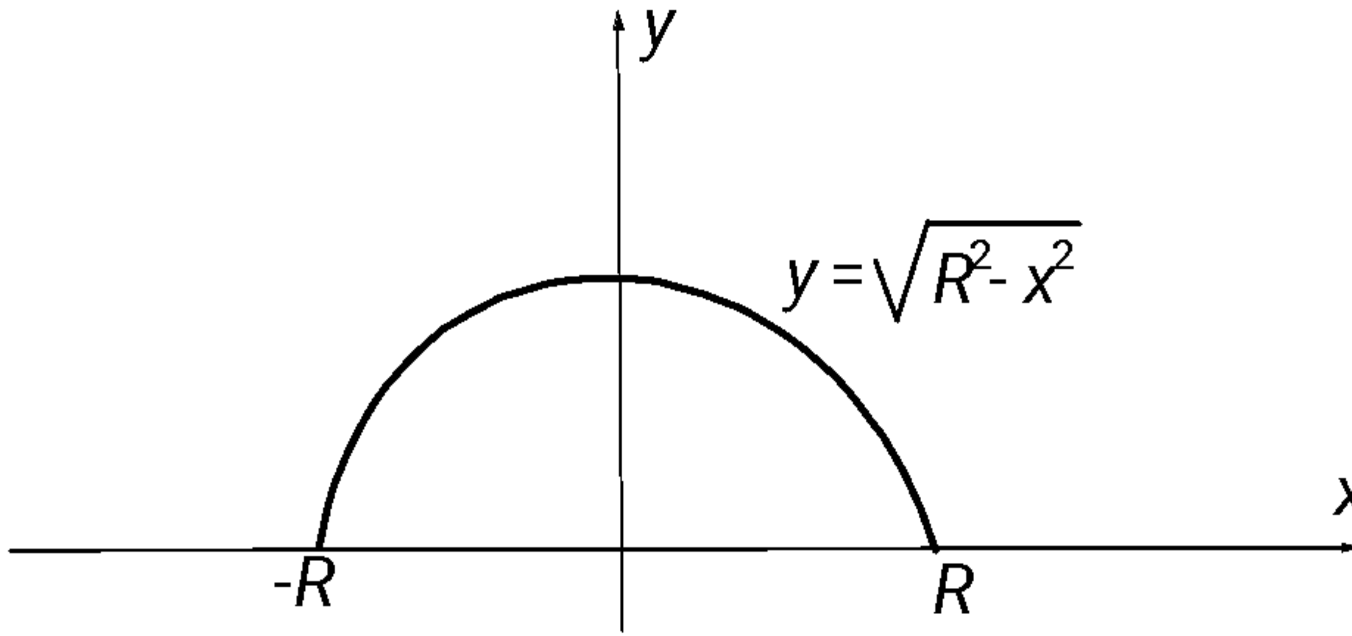
Разобьем отрезок $[a,b]$ на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и определим $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. А каждом отрезке построим **цилиндр** с радиусом основания m_i и высотой Δx_i. Все эти цилиндры будут **вписаны** в наше тело вращения и их общий объем будет равен $V_* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 \Delta x_i$.

Далее, на каждом отрезке построим **цилиндр** с радиусом основания M_i и высотой Δx_i. Все эти цилиндры будут **описаны** около нашего тела вращения и их общий объем будет равен $V^* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 \Delta x_i$.

Если $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_* = \lim\limits_{\lambda\to 0} V^* = V$, то величина V называется объемом тела вращения. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то очевидно, что

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример. **Объём шара**



Очевидно, что шар получается вращением полуокружности около оси OX. Поэтому объем шара