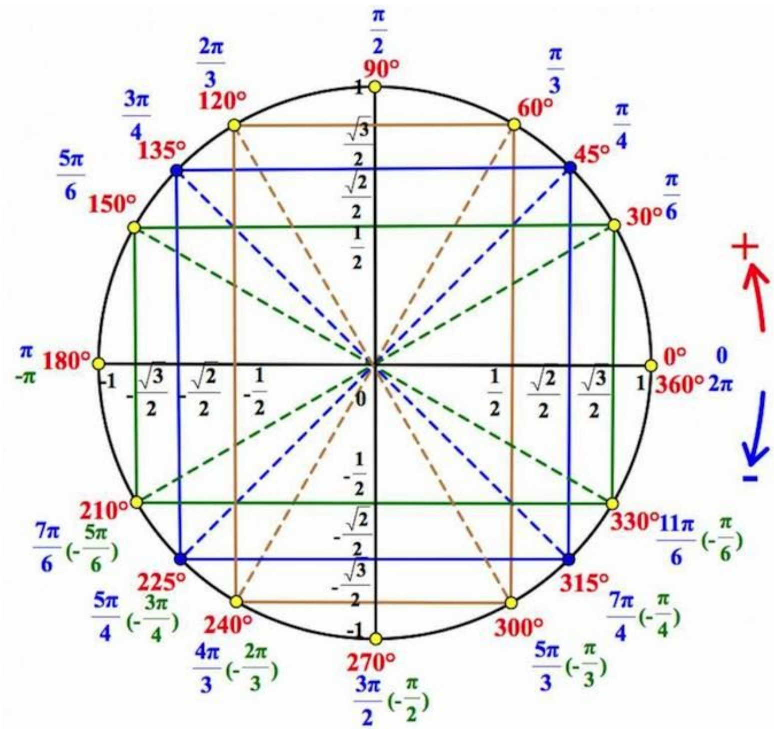
ТРИГОНОМЕТРИЯ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.



Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

АРКСИНУС

Арксинус числа a ($|a| \leqslant 1$) есть угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\sin \alpha = a.$$

ПРИМЕР 1.

а) $\arcsin 0 = 0$; б) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; в) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\left(\text{на рисунке 92 } \alpha = \frac{\pi}{6}\right)$.

Подчеркнем, что для любого числа a, такого, что:

1) $|a| \leqslant 1$, существует, и притом единственный, арксинус этого числа;

2) $|a| > 1$, арксинус этого числа не существует, поэтому запись $\arcsin a$ для такого a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла записи $\arcsin 2$ и $\arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, так как $2 > 1$ и $\left|-\frac{\pi}{2}\right| > 1$.

Из определения арксинуса следует, что если $|a| \leqslant 1$, то

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

б) Найдем все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Все такие углы задаются формулами

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};\ \alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, а $\pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, то формулы (2) можно записать так:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};\quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

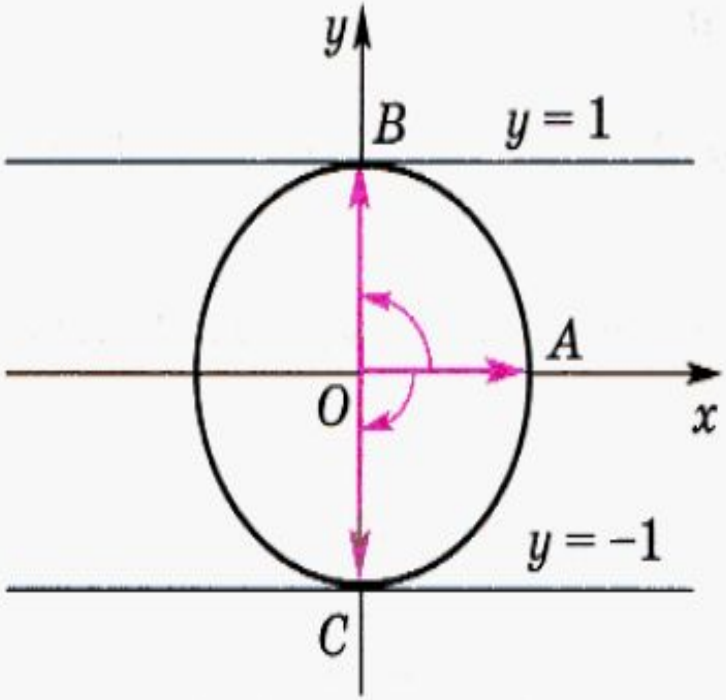


Рис. 94

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha = 1. \qquad (3)$$

Рассмотрим единичную окружность. Прямая $y = 1$ пересекает ее в единственной точке B (рис. 94). При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\frac{\pi}{2}$. Условию (3) удовлетворяют лишь углы $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

АРККОСИНУС

Арккосинус числа *a* ($|a| \leqslant 1$) **есть угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен *a*:**

$$\cos \alpha = a.$$

ПРИМЕР 1.

а) $\arccos 1 = 0$; б) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; в) $\arccos(-1) = \pi$;

г) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{на рисунке 97 } \alpha = \frac{\pi}{3}\right)$.

Подчеркнем, что для любого числа a, такого, что:

1) $|a| \leqslant 1$, существует, и притом единственный, арккосинус этого числа;

2) $|a| > 1$, арккосинус этого числа не существует, поэтому запись $\arccos a$ для такого a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла записи $\arccos \pi$ и $\arccos(-4)$, так как $\pi > 1$ и $-4 < -1$.

Из определения арккосинуса следует, что если $|a| \leqslant 1$, то

$$\cos(\arccos a) = a.$$

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = 1. \qquad (3)$$

Рассмотрим единичную окружность (рис. 99). Прямая $x = 1$ пересекает ее в точке B, совпадающей с точкой A. Поэтому угол α_0 между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен 0, т. е. $\alpha_0 = \arccos 1 = 0$.

Условию (3) удовлетворяют лишь углы $\alpha = 0 + 2\pi n = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

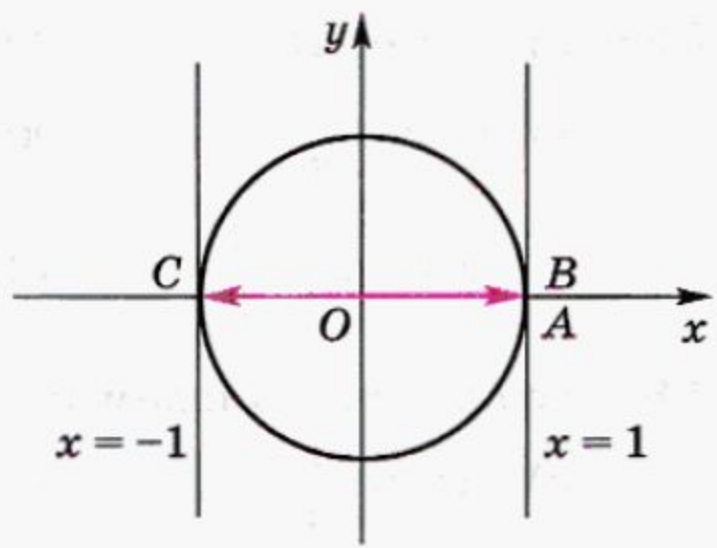


Рис. 99

ЗАДАЧА 3. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = -1. \qquad (4)$$

Рассмотрим единичную окружность (см. рис. 99). Прямая $x = -1$ пересекает ее в точке C, поэтому угол α_0 между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен π, т. е. $\alpha_0 = \arccos(-1) = \pi$. Условию (4) удовлетворяют лишь углы $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

УРАВНЕНИЯ sinx =a

$\sin x = a,\ \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$ или $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$

I. sin x =a

При |a|>1 это уравнение решений не имеет.

При |a|не превосходящем 1 уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, (n \in Z)$$

Таблица арксинусов

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

УРАВНЕНИЯ cosx =a

$\cos x = a, \ \lvert a \rvert \le 1$	$x \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z$

При $|a|>1$ это уравнение решений не имеет.

При $|a|$ не превосходящем 1 уравнение имеет бесконечное множество решений:

Таблица арккосинусов

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$