m-мерное евклидово пространство E^m

m-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^m$ –

множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, ..., x_m)$ чисел.

E^m – ***m-мерное евклидово пространство*** с расстоянием $\rho(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2}$

Пространство $\mathbb{R}^m$ с расстоянием, введенным по формуле $\rho(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2}$ обозначают E^m или $\mathbb{R}^m$. Если расстояние определяется иначе, то обозначение $\mathbb{R}^m$ недопустимо.

*

Пусть $\vec{x}^0 \in E^m$. Тогда

1) $B(\vec{x}^0, r)=\{\vec{x} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x}^0) < r\}$ – ***открытый шар*** **(**$m=2$ – ***открытый круг*****)** радиуса r с центром в т. $\vec{x}^0$
2) $\{\vec{x} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x}^0) = r\}$ – ***сфера*** **(**$m=2$ – ***окружность*****)** радиуса r с центром в т. $\vec{x}^0$;
3) $\{\vec{x} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x}^0) \le r\}$ – ***шар*** **(**$m=2$ – ***круг*****)** радиуса r с центром в т. $\vec{x}^0$.

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid |x_1-a_1| \le d_1, |x_2-a_2| \le d_2, \ldots, |x_m-a_m| \le d_m\}$ – ***m-мерный параллелепипед***

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid |x_1-a_1| < d_1, |x_2-a_2| < d_2, \ldots, |x_m-a_m| < d_m\}$ – ***m-мерный открытый параллелепипед***

$B(\vec{x}^0, \varepsilon)$ – ε***-окрестность*** точки $\vec{x}^0$

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid |x_1-x_1^0| < \varepsilon, |x_2-x_2^0| < \varepsilon, \ldots, |x_m-x_m^0| < \varepsilon\}$ – ***прямоугольная*** ε***-окрестность*** точки $\vec{x}^0$

Теорема. Любая ε-окрестность точки $\vec{x}^0 \in E^m$ содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки, и наоборот, любая прямоугольная окрестность точки $\vec{x}^0 \in E^m$ содержит некоторую ε-окрестность этой точки.

E^m – m*-**мерное евклидово пространство*** с расстоянием $\rho\left(A,B\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(a_i-b_i\right)^2}$

c^m – m*-**мерноео пространство*** с расстоянием $\rho\left(A,B\right)=\max_{i=\overline{1,m}}\left|a_i-b_i\right|$

l^m – m*-**мерное пространство*** с расстоянием $\rho\left(A,B\right)=\sum_{i=1}^{m}\left|a_i-b_i\right|$

Шар $\left\{\vec{x}\mid\rho\left(\vec{x},\vec{x}^0\right)\le r\right\}$

Точка $\vec{x}^0 \in E^m$ называется ***предельной точкой*** множества $X \subset E^m$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное множество точек из X или, что то же самое, в любой окрестности т. $\vec{x}^0$ существует, по крайней мере, одна точка множества X, не совпадающая с $\vec{x}^0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \vec{x} \in X, \vec{x} \neq \vec{x}^0 \;\; \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, \varepsilon\right)$.

$\boxed{!!!}$ Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать X.

Символ ∞ называют ***предельной точкой (предельным значением)*** множества X, если $\forall C \in \mathbb{R} \;\; \exists \vec{x} \in X \;\; \rho\left(O, \vec{x}\right) > C$, где O – точка, все координаты которой равны нулю.

Точка $\vec{x}^0 \in X$, не являющаяся предельной, называется ***изолированной*** точкой множества X, т.е. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \vec{x} \in X \;\; \left\{\vec{x} \neq \vec{x}^0 \Rightarrow \vec{x} \notin B\left(\vec{x}^0, \varepsilon\right)\right\}$.

Точка $\vec{x}^0 \in E^m$ называется:

– ***внутренней точкой*** множества X, если $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \vec{x} \in E^m \;\; \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \Rightarrow \vec{x} \in X$;

– ***внешней точкой*** множества X, если $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \vec{x} \in E^m \;\; \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \Rightarrow \vec{x} \notin X$;

– ***граничной точкой*** множества X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \vec{x}^1 \in X \;\; \rho\left(\vec{x}^1, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \;\wedge\; \exists \vec{x}^2 \notin X \;\; \rho\left(\vec{x}^2, \vec{x}^0\right) < \varepsilon.$$

Множество всех граничных точек множества X называется ***границей множества*** X.

$\boxed{!!!}$ Всякая внутренняя точка является предельной.
$\boxed{!!!}$ Всякая изолированная точка является граничной.
$\boxed{!!!}$ Множества внутренних, внешних и граничных точек **не** пересекаются.
$\boxed{!!!}$ Множества предельных и изолированных точек **не** пересекаются.

$d(M) = \max\limits_{A,B \in M} \rho(A,B)$ – ***диаметр множества*** M .

Множество M называют ***ограниченным***, если $d(M) < +\infty$.

Лемма. Множество является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится целиком в некотором шаре.

Точка $x^0 \in E^m$ называется ***точкой прикосновения множества*** $M \subset E^m$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M . Всякая точка прикосновения есть либо предельная, либо изолированная точка множества M . Совокупность всех точек прикосновения множества M называют ***замыканием множества*** M и обозначают $\overline{M}$.

В евклидовом пространстве E^m определены следующие операции над множествами.

Унарные:

$E^m \setminus M$ – дополнение множества M ;

M' – множество всех предельных точек множества M ;

$\overline{M}$ – замыкание множества M ;

$\mathrm{int}M$ – множество всех внутренних точек множества M ;

∂M – множество всех граничных точек множества M (граница множества M);

Бинарные:

$M_1 \cup M_2,\ M_1 \cap M_2,\ M_1 \setminus M_2,\ M_1 \div M_2$.

Лемма. Для произвольного множества M справедливо равенство

$$\overline{M} = M \cup M' = M \cup \partial M .$$

Следствие: Если M замкнутое множество, то $\overline{M} = M$.

A	$[1,2)\cup\{3,4\}$	$(5,6)$	$[7,8]$
A'			
$\overline{A}$			
$\operatorname{int} A$			
∂A			
Внешние точки			
Дополнение			
Изолированные точки			

A	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$
A'			
$\overline{A}$			
$\operatorname{int} A$			
∂A			
Внешние точки			
Дополнение			
Изолированные точки			

Множество

$$L=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)\middle|\, x_1=\varphi_1\left(t\right),\, x_2=\varphi_2\left(t\right),\ldots,\, x_m=\varphi_m\left(t\right),\, \alpha\le t\le\beta\right\},$$

где $\varphi_1\left(t\right),\varphi_2\left(t\right),\ldots,\varphi_m\left(t\right)$ – непрерывные на $\left[\alpha,\beta\right]$ функции, называется ***непрерывной кривой в пространстве*** E^m, а точки

$$A\left(\varphi_1\left(\alpha\right),\, \varphi_2\left(\alpha\right),\ldots,\, \varphi_m\left(\alpha\right)\right) \text{ и } B\left(\varphi_1\left(\beta\right),\, \varphi_2\left(\beta\right),\ldots,\, \varphi_m\left(\beta\right)\right)$$

называются концами кривой L. Если точки A и B совпадают, то кривая L называется непрерывной ***замкнутой кривой***.

Множества A и B называются ***отделимыми***, если ни одно из них не содержит точек замыкания другого (т.е. $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $\overline{A} \cap B = \varnothing$).

Множество называется ***связным***, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

Если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству, то оно называется ***линейно-связным***. Множество, состоящее из одной точки также считают линейно-связным.

Открытое линейно-связное множество называют ***областью***, а объединение области и ее границы – ***замкнутой областью***.

Плоская область называется ***односвязной***, если вместе с любой замкнутой непрерывной кривой, принадлежащей области, и часть плоскости, ограниченная этой кривой, принадлежит области.

Область G называется ***выпуклой***, если для любых точек M_1 и M_2 этой области отрезок прямой, соединяющий точки M_1 и M_2, целиком принадлежит области G.

Последовательности

Каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка $A_n \subset E^m$.

Посл-ть $\{A_n\}$ точек пространства E^m называется:

– ***сходящейся*** к точке $A \in E^m$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \rho(A_n, A) < \varepsilon$;

– ***сходящейся к бесконечности*** (или ***ББП***), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \rho(A_n, O) > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = S$ или $A_n \to S$ при $n \to \infty$, где $S \in E^m \cup \{\infty\}$.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$, то $\{A_n\}$ – ***БМП***.

Теорема о характере сходимости в E^m. Посл-ть $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ сходится к $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ тогда и только тогда, когда посл-ти $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, a_2, \dots, a_m$ точки A.

Критерий Коши сходимости посл-ти. Для того чтобы посл-ть $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ***фундаментальной***, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \forall k\ \ \rho(A_{n+k}, A_n) < \varepsilon.$$

Последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$

– ***ограниченна***, если $\exists c > 0\ \ \forall n\ \ \rho(O, A_n) \le c$;

– ***неограничена***, если $\forall c \in \mathbb{R}\ \ \exists n\ \ \rho(O, A_n) > c$.

Лемма. Посл-ть $\{A_n\}$ является ограниченной тогда и только тогда, когда все точки A_n этой посл-ти принадлежат некоторому шару с центром в начале координат.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Из любой ограниченной посл-ти $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть.

Теорема о характере сходимости в E^m. Посл-ть $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ сходится к $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ тогда и только тогда, когда посл-ти $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ точки A.

▫ *Необходимость*. Пусть $A_n(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n) \to A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ при $n \to \infty$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \rho(A_n, A) = \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \ldots + (x_m^n - a_m)^2} < \varepsilon. \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \quad |x_1^n - a_1| < \varepsilon, |x_2^n - a_2| < \varepsilon, \ldots, |x_m^n - a_m| < \varepsilon \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n \to \infty \ \ x_1^n \to a_1,\ x_2^n \to a_2,\ \ldots,\ x_m^n \to a_m.$$

Достаточность. Пусть при $n \to \infty$ $x_1^n \to a_1$, $x_2^n \to a_2$, …, $x_m^n \to a_m$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_i \ \forall n > N_i \ \ |x_i^n - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\ i = \overline{1, m}. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max_{1 \le i \le m} N_i \ \forall n > N \ \ |x_i^n - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\ i = \overline{1, m} \quad \Rightarrow \quad \rho(A_n, A) < \varepsilon. ▫$$

Критерий Коши сходимости последовательности. Для того чтобы последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ***фундаментальной***, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall k \;\; \rho\left(A_{n+k}, A_n\right) < \varepsilon \,.$$

Из условия фундаментальности $\{A_n\}$ следует, что последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n также фундаментальны, и наоборот, если указанные последовательности координат фундаментальны, то фундаментальной будет и последовательность $\{A_n\}$.

Применяя критерий Коши для числовых последовательностей к последовательностям координат и предыдущую теорему, получим требуемое утверждение.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Из любой ограниченной посл-ти $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть

▯ $\{A_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ $\exists c > 0 \ \forall n \ \rho(O, A_n) = \sqrt{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + \ldots (x_m^n)^2} \le c \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \forall n \ |x_1^n| \le c, |x_2^n| \le c, \ldots, |x_m^n| \le c \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n – ограниченны.

В силу теоремы Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1) Из $\{x_1^n\}$ выделим $\{x_1^{n_{k_1}}\}$, $a_1 \overset{df}{=} \lim\limits_{k_1 \to \infty} x_1^{n_{k_1}}$.

2) Из $\{x_2^{n_{k_1}}\}$ выделим $\{x_2^{n_{k_2}}\}$, $a_2 \overset{df}{=} \lim\limits_{k_2 \to \infty} x_2^{n_{k_2}}$. При этом $\lim\limits_{k_2 \to \infty} x_1^{n_{k_2}} = a_1$.

3) Из $\{x_3^{n_{k_2}}\}$ выделим $\{x_3^{n_{k_3}}\}$, $a_3 \overset{df}{=} \lim\limits_{k_3 \to \infty} x_3^{n_{k_3}}$. При этом $\lim\limits_{k_3 \to \infty} x_1^{n_{k_3}} = a_1$, $\lim\limits_{k_3 \to \infty} x_2^{n_{k_3}} = a_2$.

……….

m) Из $\{x_m^{n_{k_{m-1}}}\}$ выделим $\{x_m^{n_{k_m}}\}$, $a_m \overset{df}{=} \lim\limits_{k_m \to \infty} x_m^{n_{k_m}}$.

$$\text{При этом } \lim_{k_m \to \infty} x_1^{n_{k_m}} = a_1, \ \lim_{k_m \to \infty} x_2^{n_{k_m}} = a_2, \ \lim_{k_m \to \infty} x_3^{n_{k_m}} = a_3, \ldots, \ \lim_{k_m \to \infty} x_{m-1}^{n_{k_m}} = a_{m-1}.$$

Учитывая характер сходимости в пространстве $\mathbb{R}^n$, можем утверждать, что

$$\lim_{k_m \to \infty} A_{n_{k_m}} = A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \ ▯$$