

m -мерное евклидово пространство E^m

m -мерное координатное пространство \mathbb{R}^m –

множество всевозможных упорядоченных совокупностей (x_1, x_2, \dots, x_m) чисел.

E^m – m -мерное евклидово пространство с расстоянием $\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$

Пространство \mathbb{R}^m с расстоянием, введенным по формуле $\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$ обозначают E^m

или \mathbb{R}^m . Если расстояние определяется иначе, то обозначение \mathbb{R}^m недопустимо.



Пусть $x^0 \in E^m$. Тогда

- 1) $B(x^0, r) = \{x \mid \rho(x, x^0) < r\}$ – *открытый шар* ($m = 2$ – *открытый круг*) радиуса r с центром в т. x^0**
- 2) $\{x \mid \rho(x, x^0) = r\}$ – *сфера* ($m = 2$ – *окружность*) радиуса r с центром в т. x^0 ;**
- 3) $\{x \mid \rho(x, x^0) \leq r\}$ – *шар* ($m = 2$ – *круг*) радиуса r с центром в т. x^0 .**

$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid |x_1 - a_1| \leq d_1, |x_2 - a_2| \leq d_2, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m\}$ – *m -мерный параллелепипед*

$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid |x_1 - a_1| < d_1, |x_2 - a_2| < d_2, \dots, |x_m - a_m| < d_m\}$ – *m -мерный открытый параллелепипед*

$B(x^0, \varepsilon)$ – *ε -окрестность точки x^0*

$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid |x_1 - x_1^0| < \varepsilon, |x_2 - x_2^0| < \varepsilon, \dots, |x_m - x_m^0| < \varepsilon\}$ – *прямоугольная ε -окрестность точки x^0*

Теорема. Любая ε -окрестность точки $x^0 \in E^m$ содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки, и наоборот, любая прямоугольная окрестность точки $x^0 \in E^m$ содержит некоторую ε -окрестность этой точки.

E^m – m -мерное евклидово пространство с расстоянием $\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$

C^m – m -мерное пространство с расстоянием $\rho(A, B) = \max_{i=1, m} |a_i - b_i|$

l^m – m -мерное пространство с расстоянием $\rho(A, B) = \sum_{i=1}^m |a_i - b_i|$

Шар $\{x \mid \rho(x, x^0) \leq r\}$



Точка $x^0 \in E^m$ называется **предельной точкой** множества $X \subset E^m$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное множество точек из X или, что то же самое, в любой окрестности т. x^0 существует, по крайней мере, одна точка множества X , не совпадающая с x^0 , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X, x \neq x^0, x \in B(x^0, \varepsilon)$.

!!! Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать X .

Символ ∞ называют **предельной точкой (предельным значением)** множества X , если $\forall C \in \mathbb{R} \exists x \in X \rho(O, x) > C$, где O – точка, все координаты которой равны нулю.

Точка $x^0 \in X$, не являющаяся предельной, называется **изолированной** точкой множества X , т.е. $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in X \{x \neq x^0 \Rightarrow x \notin B(x^0, \varepsilon)\}$.

Точка $x^0 \in E^m$ называется:

- **внутренней точкой** множества X , если $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in E^m \rho(x, x^0) < \varepsilon \Rightarrow x \in X$;
- **внешней точкой** множества X , если $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in E^m \rho(x, x^0) < \varepsilon \Rightarrow x \notin X$;
- **граничной точкой** множества X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists x^1 \in X \rho(x^1, x^0) < \varepsilon \wedge \exists x^2 \notin X \rho(x^2, x^0) < \varepsilon$.

Множество всех граничных точек множества X называется **границей множества X** .

!!! Всякая внутренняя точка является предельной.

!!! Всякая изолированная точка является граничной.

!!! Множества внутренних, внешних и граничных точек **не** пересекаются.

!!! Множества предельных и изолированных точек **не** пересекаются.

$d(M) = \max_{A, B \in M} \rho(A, B)$ – диаметр множества M .

Множество M называют *ограниченным*, если $d(M) < +\infty$.

Лемма. Множество является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится целиком в некотором шаре.

Точка $x_0 \in E^m$ называется *точкой прикосновения множества* $M \subset E^m$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M . Всякая точка прикосновения есть либо предельная, либо изолированная точка множества M . Совокупность всех точек прикосновения множества M называют *замыканием множества* M и обозначают \overline{M} .

В евклидовом пространстве E^m определены следующие операции над множествами.

Унарные:

$E^m \setminus M$ – дополнение множества M ;

M' – множество всех предельных точек множества M ;

\overline{M} – замыкание множества M ;

$\text{int}M$ – множество всех внутренних точек множества M ;

∂M – множество всех граничных точек множества M (граница множества M);

Бинарные:

$M_1 \cap M_2, M_1 \cup M_2, M_1 \setminus M_2, M_1 \div M_2$.

Лемма. Для произвольного множества M справедливо равенство

$$\overline{M} = M \cup M' = M \cup \partial M.$$

Следствие: Если M замкнутое множество, то $\overline{M} = M$.

A	$[1, 2) \sqcup \{3, 4\}$	$(5, 6)$	$[7, 8]$
A'			
\bar{A}			
$\text{int } A$			
∂A			
Внешние точки			
Дополнение			
Изолированные точки			



A	$\{(x, y) x^2 + y^2 \leq 1\}$	$\{(x, y) x^2 + y^2 < 1\}$	$\{(x, y) x^2 + y^2 = 1\}$
A'			
\bar{A}			
$\text{int } A$			
∂A			
Внешние точки			
Дополнение			
Изолированные точки			



Множество

$$L = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta \right\},$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции, называется *непрерывной кривой в пространстве E^m* , а точки

$$A(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)) \text{ и } B(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$$

называются концами кривой L . Если точки A и B совпадают, то кривая L называется непрерывной *замкнутой кривой*.

Множества A и B называются *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек замыкания другого (т.е. $A \cap \bar{B} = \emptyset$ и $\bar{A} \cap B = \emptyset$).

Множество называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

Если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству, то оно называется *линейно-связным*. Множество, состоящее из одной точки также считают линейно-связным.

Открытое линейно-связное множество называют *областью*, а объединение области и ее границы – *замкнутой областью*.

Плоская область называется *односвязной*, если вместе с любой замкнутой непрерывной кривой, принадлежащей области, и часть плоскости, ограниченная этой кривой, принадлежит области.

Область G называется *выпуклой*, если для любых точек M_1 и M_2 этой области отрезок прямой, соединяющий точки M_1 и M_2 , целиком принадлежит области G .

Последовательности


Каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка $A_n \subset E^m$.


Посл-ть $\{A_n\}$ точек пространства E^m называется:

- *сходящейся* к точке $A \in E^m$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \rho(A_n, A) < \varepsilon$;
- *сходящейся к бесконечности* (или *ББП*), если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \rho(A_n, O) > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = S$ или $A_n \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, где $S \in E^m \cup \{\infty\}$.

Замечание. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$, то $\{A_n\}$ – *БМП*.

Теорема о характере сходимости в E^m . Посл-ть $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ сходится к $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ тогда и только тогда, когда посл-ти $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, ..., $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся к соответствующим координатам a_1, a_2, \dots, a_m точки A . 


Критерий Коши сходимости посл-ти. Для того чтобы посл-ть $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была *фундаментальной*, т.е. 

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall k \rho(A_{n+k}, A_n) < \varepsilon.$$

Последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$

- *ограниченна*, если $\exists c > 0 \forall n \rho(O, A_n) \leq c$;
- *неограничена*, если $\forall c \in \mathbb{R} \exists n \rho(O, A_n) > c$.

Лемма. Посл-ть $\{A_n\}$ является ограниченной тогда и только тогда, когда все точки A_n этой посл-ти принадлежат некоторому шару с центром в начале координат.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Из любой ограниченной посл-ти $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть. 

Теорема о характере сходимости в E^m . Последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ сходится к $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ тогда и только тогда, когда последности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, ..., $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся к соответствующим координатам a_1, a_2, \dots, a_m точки A .

▣ *Необходимость.* Пусть $A_n(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n) \rightarrow A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ при $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(A_n, A) = \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \dots + (x_m^n - a_m)^2} < \varepsilon. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |x_1^n - a_1| < \varepsilon, |x_2^n - a_2| < \varepsilon, \dots, |x_m^n - a_m| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n \rightarrow \infty \quad x_1^n \rightarrow a_1, x_2^n \rightarrow a_2, \dots, x_m^n \rightarrow a_m.$$

Достаточность. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $x_1^n \rightarrow a_1, x_2^n \rightarrow a_2, \dots, x_m^n \rightarrow a_m$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_i \forall n > N_i |x_i^n - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = \overline{1, m}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = \max_{1 \leq i \leq m} N_i \forall n > N |x_i^n - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = \overline{1, m} \Rightarrow \rho(A_n, A) < \varepsilon. \quad \square$$

Критерий Коши сходимости последовательности. Для того чтобы последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была **фундаментальной**, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall k \rho(A_{n+k}, A_n) < \varepsilon.$$

⊠ Из условия фундаментальности $\{A_n\}$ следует, что последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, ..., $\{x_m^n\}$ координат точек A_n также фундаментальны, и наоборот, если указанные последовательности координат фундаментальны, то фундаментальной будет и последовательность $\{A_n\}$.

Применяя критерий Коши для числовых последовательностей к последовательностям координат и предыдущую теорему, получим требуемое утверждение. ⊠



Теорема Больцано – Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности $\{A_n\}$, $A_n \in E^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\begin{aligned} \square \{A_n\} \text{ ограничена} &\Rightarrow \exists c > 0 \forall n \rho(O, A_n) = \sqrt{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + \dots + (x_m^n)^2} \leq c \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall n |x_1^n| \leq c, |x_2^n| \leq c, \dots, |x_m^n| \leq c \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{последовательности } \{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \dots, \{x_m^n\} \text{ координат точек } A_n \text{ – ограничены.} \end{aligned}$$

В силу теоремы Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательностей из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1) Из $\{x_1^n\}$ выделим $\{x_1^{n_{k_1}}\}$, $a_1 = \lim_{k_1 \rightarrow \infty}^{df} x_1^{n_{k_1}}$.

2) Из $\{x_2^{n_{k_1}}\}$ выделим $\{x_2^{n_{k_2}}\}$, $a_2 = \lim_{k_2 \rightarrow \infty}^{df} x_2^{n_{k_2}}$. При этом $\lim_{k_2 \rightarrow \infty} x_1^{n_{k_2}} = a_1$.

3) Из $\{x_3^{n_{k_2}}\}$ выделим $\{x_3^{n_{k_3}}\}$, $a_3 = \lim_{k_3 \rightarrow \infty}^{df} x_3^{n_{k_3}}$. При этом $\lim_{k_3 \rightarrow \infty} x_1^{n_{k_3}} = a_1$, $\lim_{k_3 \rightarrow \infty} x_2^{n_{k_3}} = a_2$.

.....

m) Из $\{x_m^{n_{k_{m-1}}}\}$ выделим $\{x_m^{n_{k_m}}\}$, $a_m = \lim_{k_m \rightarrow \infty}^{df} x_m^{n_{k_m}}$.

$$\text{При этом } \lim_{k_m \rightarrow \infty} x_1^{n_{k_m}} = a_1, \lim_{k_m \rightarrow \infty} x_2^{n_{k_m}} = a_2, \lim_{k_m \rightarrow \infty} x_3^{n_{k_m}} = a_3, \dots, \lim_{k_m \rightarrow \infty} x_{m-1}^{n_{k_m}} = a_{m-1}.$$

Учитывая характер сходимости в пространстве \square^n , можем утверждать, что

$$\lim_{k_m \rightarrow \infty} A_{n_{k_m}} = A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \square$$