

ТЕМА. Определение объёма произвольного тела вращения

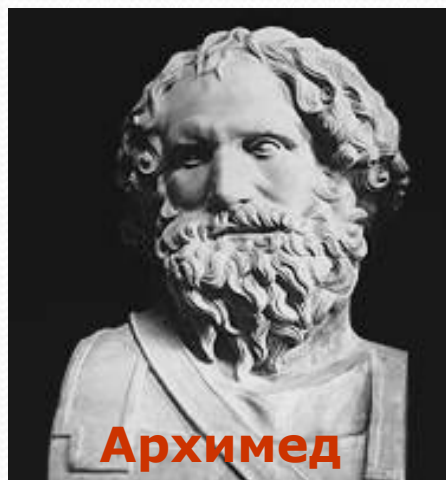


Подготовила
преподаватель математики ГПОУ «Новоазовский
индустриальный техникум»
ФЕСЕНКО ОЛЬГА ВАСИЛЬЕВНА

«Знаете ли Вы, что...»

В далеком прошлом, важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных тел. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения. Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников и тел вращения.

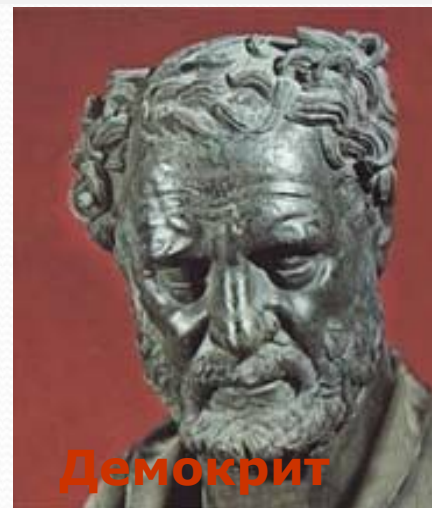
Среди замечательных греческих ученых V-IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были:



Архимед

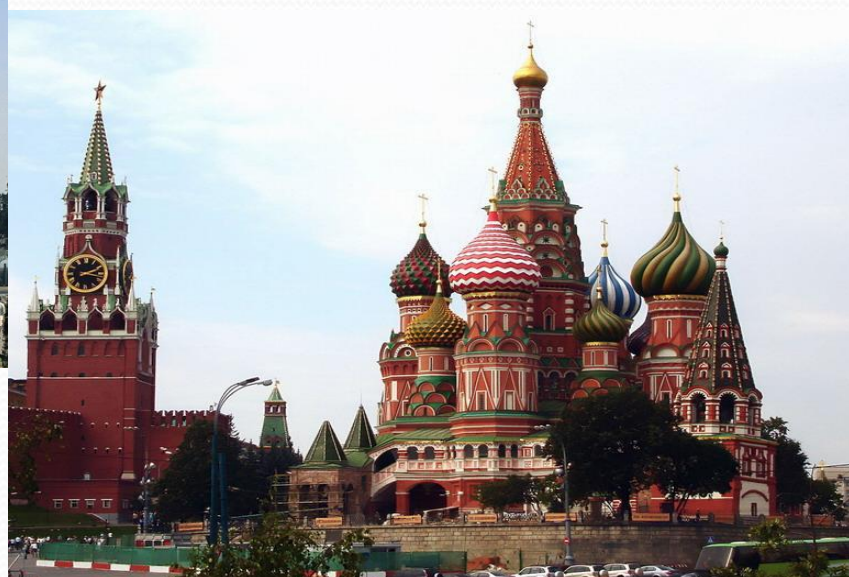


Евклид



Демокрит

Геометрические тела в архитектурных сооружениях

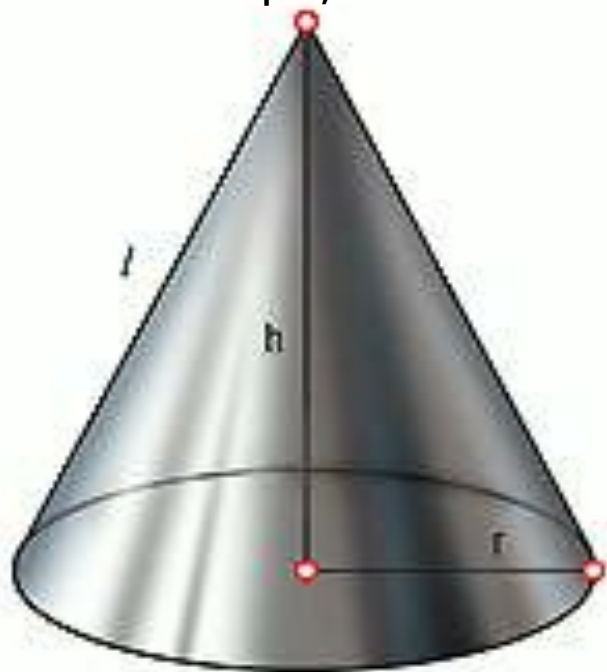


Геометрические тела в архитектурных сооружениях



Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Иначе говоря, объем конуса выражается следующей формулой:



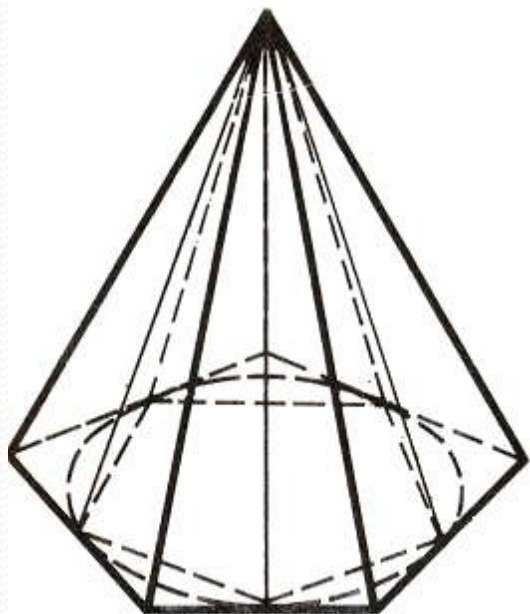
$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Существует много доказательств этой формулы, рассмотрим некоторые из них.

Первое доказательство.

За величину объёма конуса принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды, вписанной в конус, при неограниченном удвоении числа сторон её основания.

$$V_{\text{конуса}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\text{пир}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \right) = \frac{1}{3} H \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{круга}}.$$

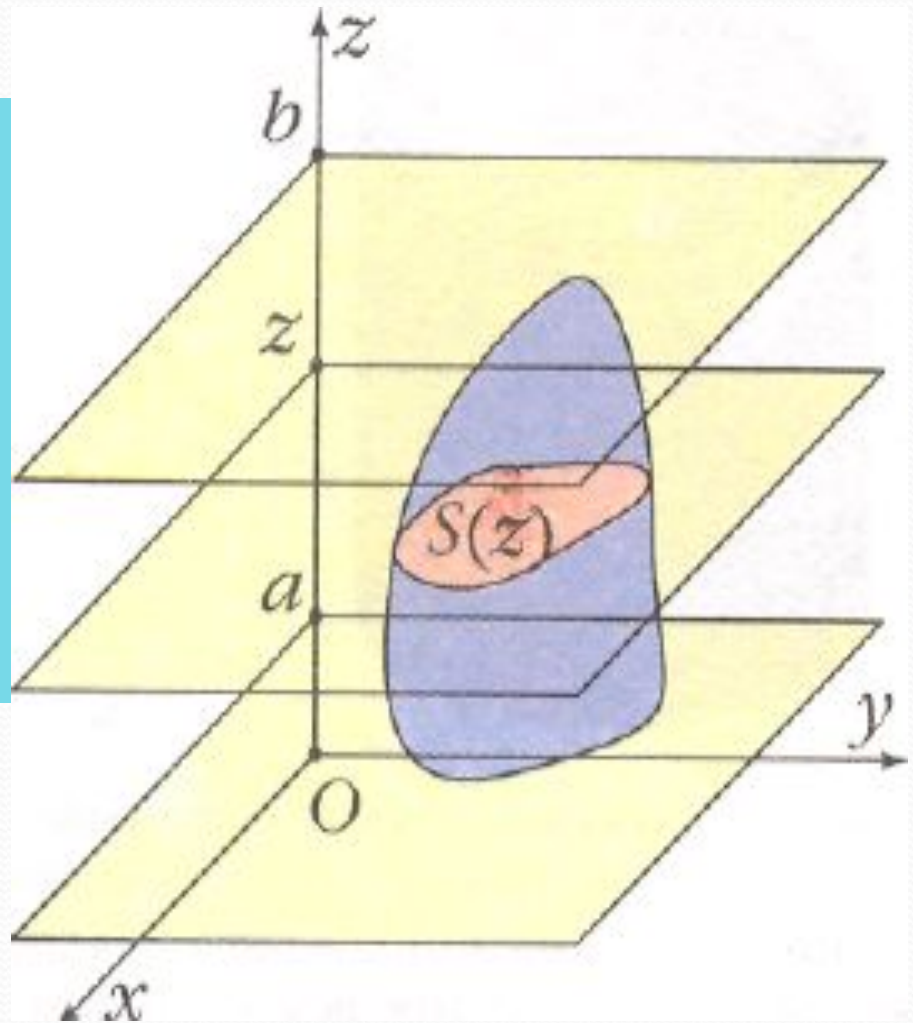


$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Определение объема произвольного тела вращения

Интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, превратило вычисление объемов в стандартную операцию. Она записывается следующей формулой:

$$V = \int_a^b S(z) dz$$



Второе доказательство:

Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$

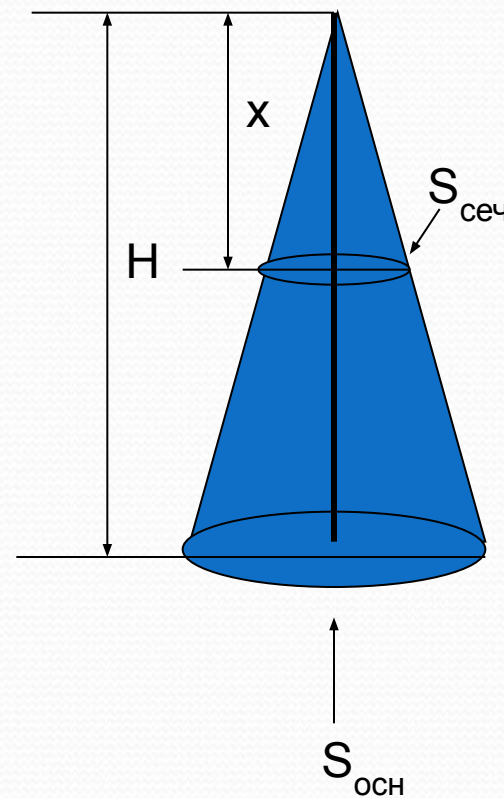
Поэтому площадь сечения $Q(x)$ такой плоскостью равна:

$$S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

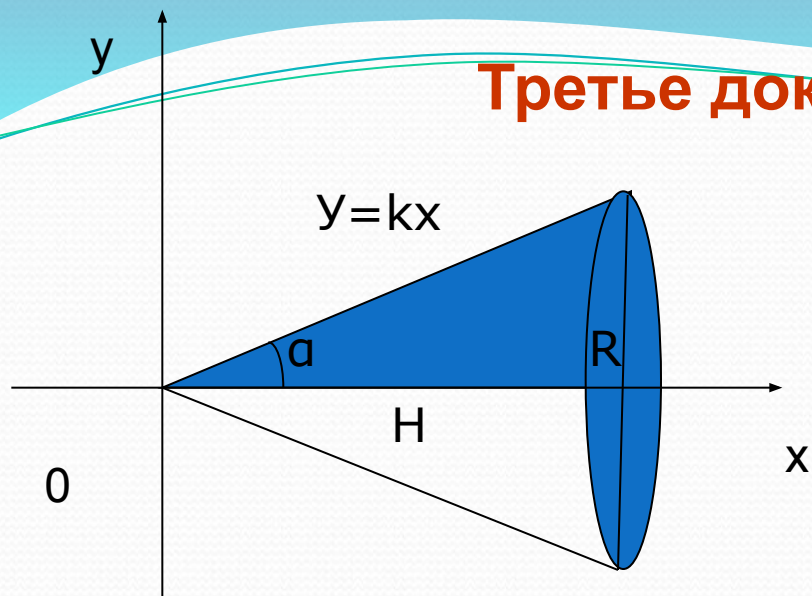
где S - площадь основания.

Значит, объем конуса K будет:

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^H S(x) dx = \\ &= \int_0^H S \frac{x^2}{H^2} dx = \frac{S}{H^2} \left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH. \end{aligned}$$



Третье доказательство:



$$V_{\text{т.вращ.}} = \pi \int_0^H f^2(x) dx.$$

$$V_{\text{конуса}} = \pi \int_0^H (kx)^2 dx = \pi k^2 \int_0^H x^2 dx = \pi \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 \cdot H^3}{H^2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

От теории - к практике...

Задача 1.

Куча песка имеет форму конуса, длина окружности основания которого 31,4 м, а образующая 5,4 м. Сколько трехтонных машин потребуется для вывоза песка, если масса 1 м^3 песка составляет 2т?

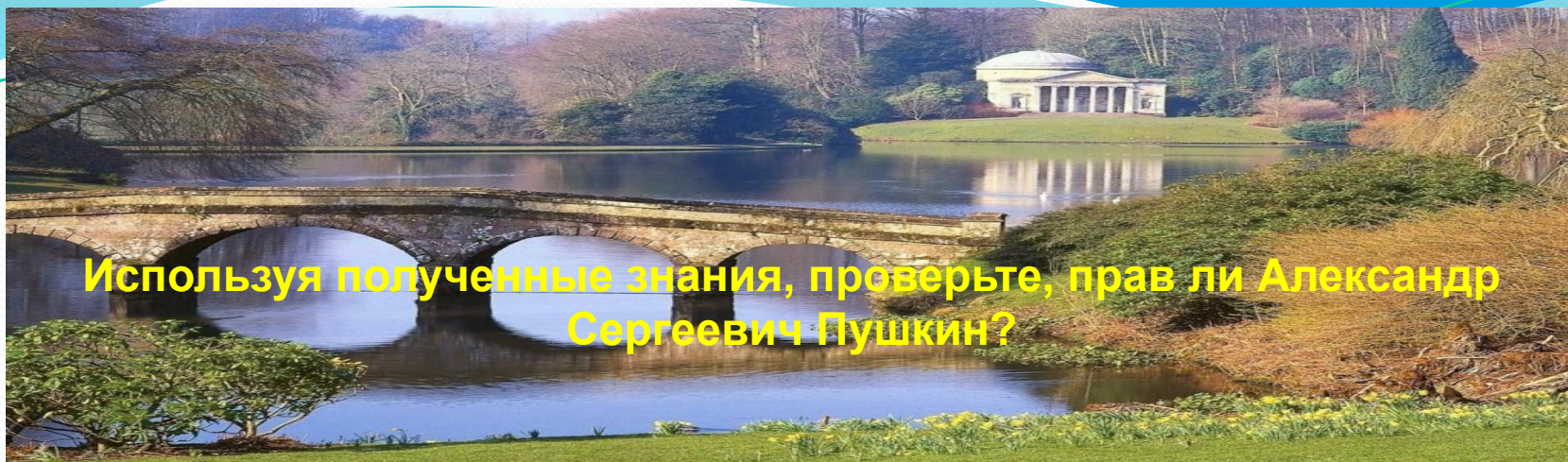
Задача 2.

Вибросито для процеживания окрасочных составов имеет форму конуса. Боковая поверхность его вдвое больше площади основания. Определите вместимость вибросита, если радиус основания $R = 20$ см.

В своем драматическом произведении **«Скупой рыцарь»**
Александр Сергеевич Пушкин рассказывает одну старинную
легенду восточных народов:

**«... Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу.
И гордый холм возвысился,
И царь мог с высоты с весельем озираться
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.»**





Используя полученные знания, проверьте, прав ли Александр Сергеевич Пушкин?

СПРАВКА

1горсть $\approx 0,2 \text{ дм}^3$

Войско в 100 000 воинов считалось очень внушительным.

Угол откоса $\leq 45^0$, иначе земля начнет осыпаться.

Решение к задаче 4*. $V=0,2 \cdot 100\,000=20\,000(\text{дм}^3)=20(\text{м}^3)$.

Так как $H=R$, то $V=1/3\pi H^3$, $H^3=3 \cdot V/\pi$

$$H = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20}{3,14}} \approx 2,7 \text{ м.}$$

Ответ: 2,7 метров.

*Надо обладать очень богатым воображением,
чтобы земляную кучу в 2,7 м
(1,5 человеческого роста)
назвать «гордым холмом».*

*Сделав расчет для меньшего угла, мы получили бы
еще более скромный
результат*

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

У Аттилы было самое многочисленное войско, которое знал древний мир.

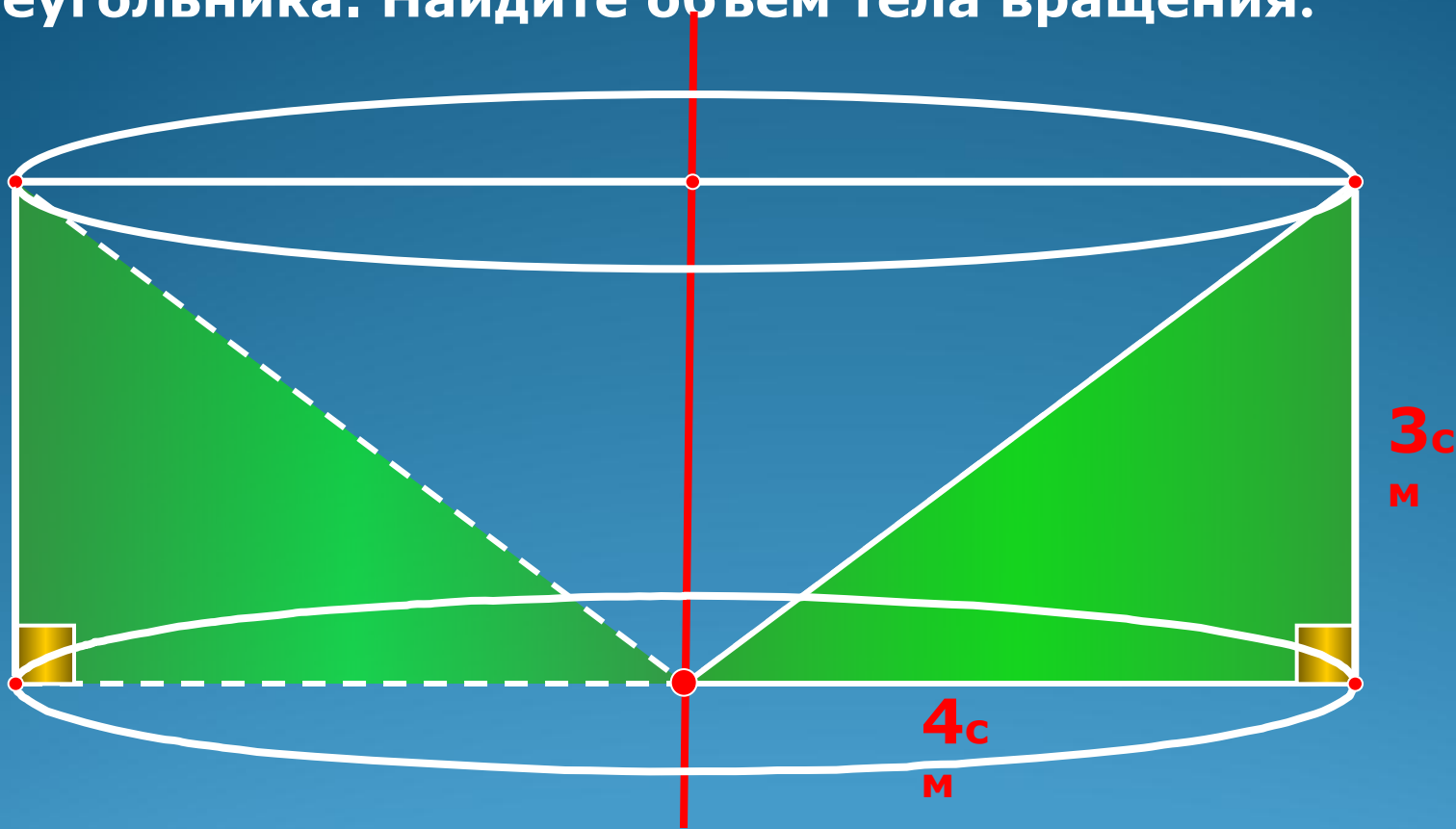
Историки оценивают его в 700 000 человек.

Если бы даже все воины Аттилы участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень.

Домашнее задание

Попробуйте сами дома вычислить высоту такого кургана и подумать, удовлетворила ли бы такая высота честолюбие Аттилы или нет?

ЗАДАЧА № 3. Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 см вращается около прямой, параллельной меньшему из катетов и проходящей через вершину меньшего из углов треугольника. Найдите объем тела вращения.



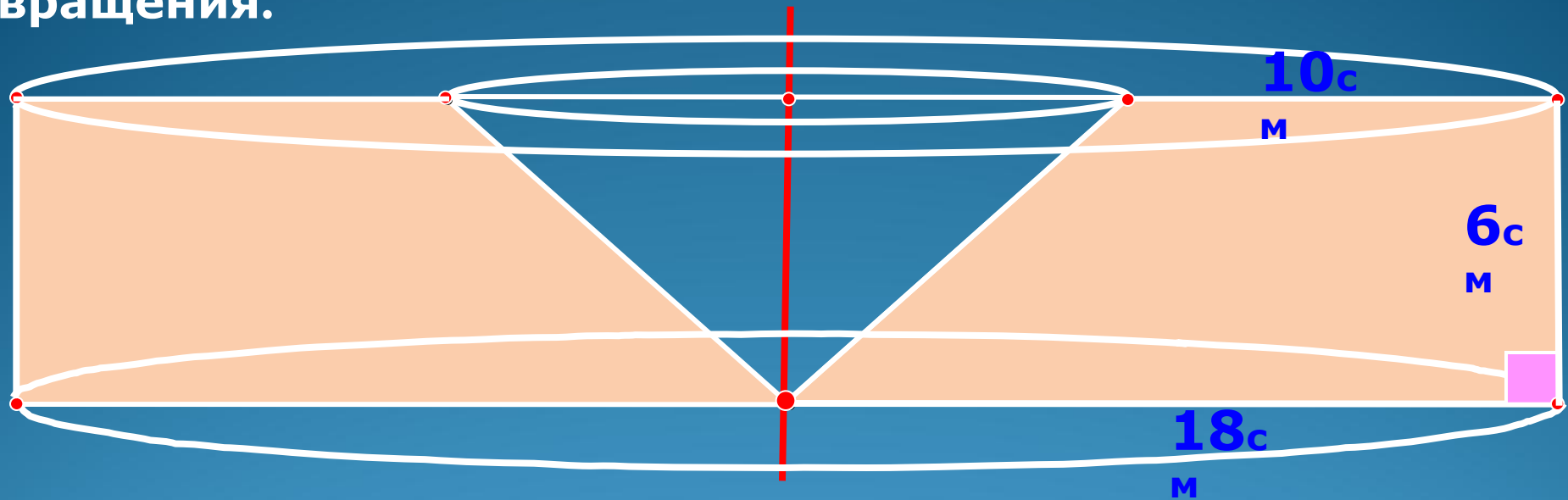
$$V_{\text{т.вр.}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}}$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \cdot 16 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 3$$

$$V_{\text{т.вр.}} = 32\pi$$

ЗАДАЧА № 4. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 и 18 см и высотой 6 см вращается около прямой, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно основаниям. Найдите объем тела вращения.



$$V_{\text{т.вр.}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}}$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 6$$

$$V_{\text{т.вр.}} = 1144\pi - 128\pi$$

$$V_{\text{т.вр.}} = 1816\pi$$