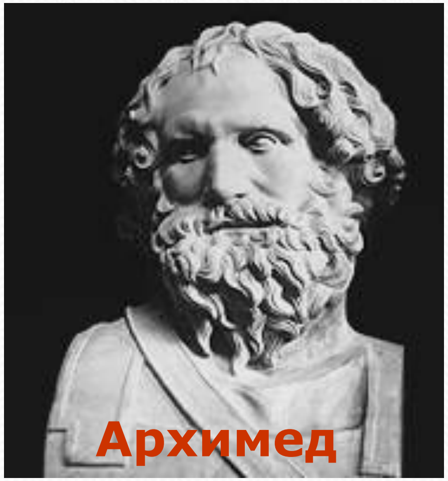
ТЕМА. Определение объёма произвольного тела вращения

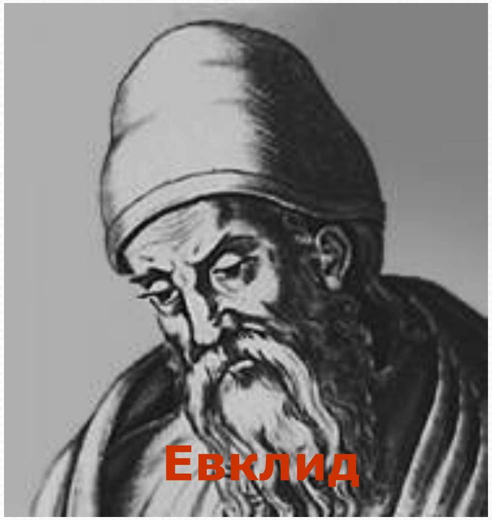
Подготовила
преподаватель математики ГПОУ «Новоазовский индустриальный техникум»
ФЕСЕНКО ОЛЬГА ВАСИЛЬЕВНА

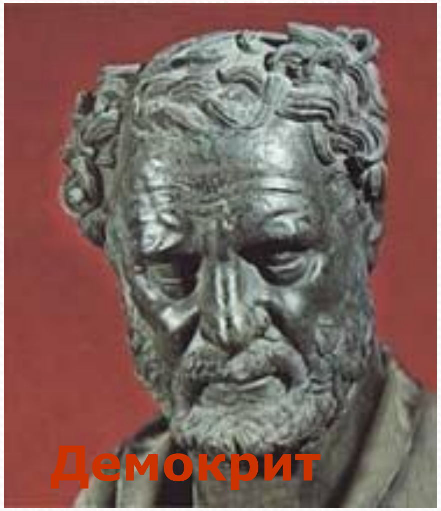
«Знаете ли Вы, что…»

В далеком прошлом, важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных тел. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения. Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников и тел вращения.

Среди замечательных греческих ученых V-IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были:







Геометрические тела в архитектурных сооружениях

Геометрические тела в архитектурных сооружениях

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Иначе говоря, объем конуса выражается следующей формулой:

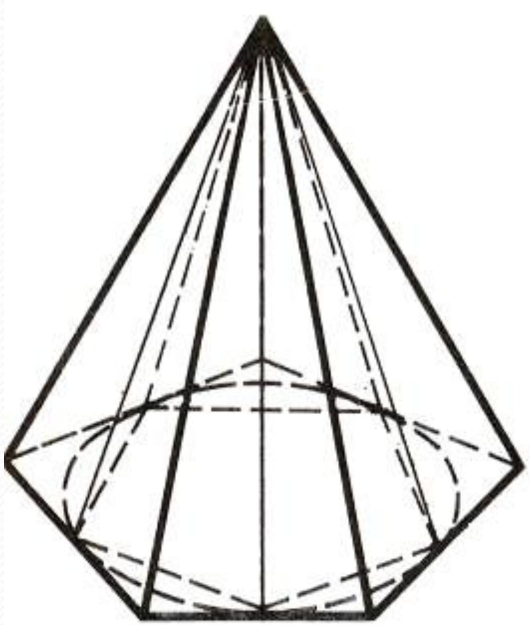
$$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Существует много доказательств этой формулы, рассмотрим некоторые из них.

Первое доказательство.

За величину объёма конуса принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды, вписанной в конус, при неограниченном удвоении числа сторон её основания.

$$V_{конуса} = \lim_{n\to\infty} V_{пир} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H\right) = \frac{1}{3}H\cdot\lim_{n\to\infty} S_{осн} = \frac{1}{3}H\cdot S_{круга}.$$

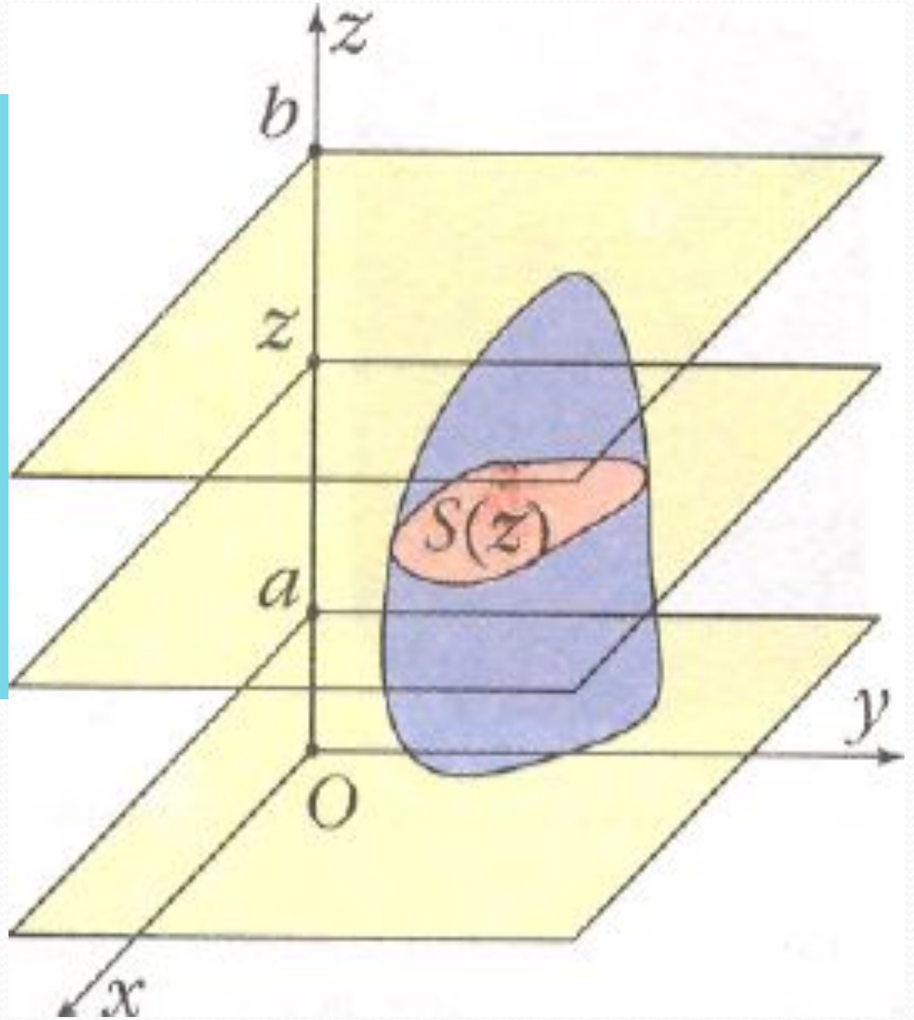


$$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Определение объема произвольного тела вращения

Интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, превратило вычисление объемов в стандартную операцию. Она записывается следующей формулой:

$$V = \int_a^b S(z)dz$$



Второе доказательство:

Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$

Поэтому площадь сечения Q(x) такой плоскостью равна:

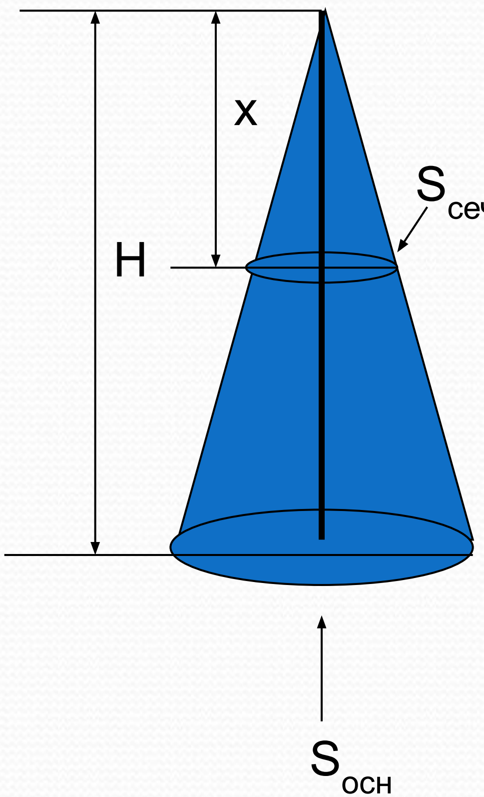
$$S(x) = (\frac{x}{H})^2 S,$$

где S - площадь основания.

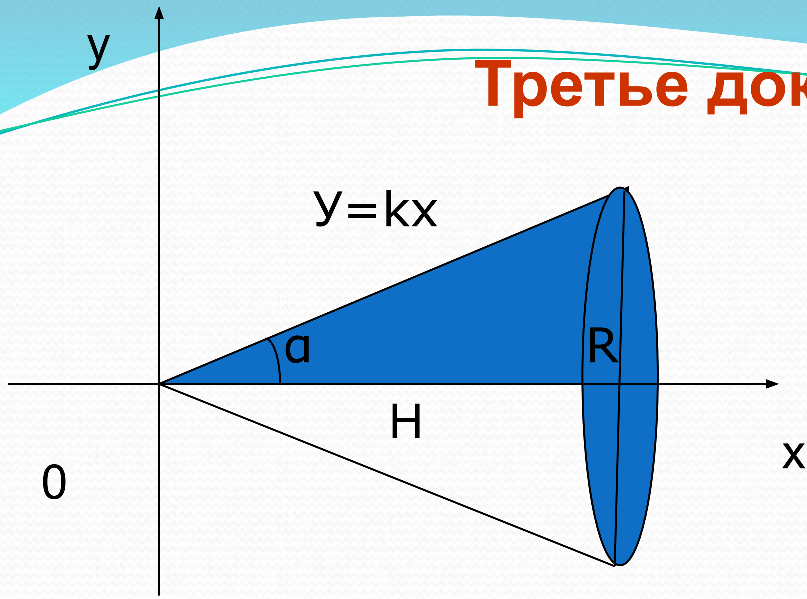
Значит, объем конуса К будет:

$$V(K) = \int_0^H S(x)dx =$$

$$= \int_0^H S\frac{x^2}{H^2}dx = \frac{S}{H^2}(\frac{x^3}{3})\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH.$$



Третье доказательство:



$$V_{т.вращ.} = \pi \int_0^H f^2(x)dx.$$

$$V_{конуса} = \pi \int_0^H (kx)^2 dx = \pi k^2 \int_0^H x^2 dx = \pi \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 \cdot H^3}{H^2 \cdot 3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

От теории - к практике…

Задача 1.

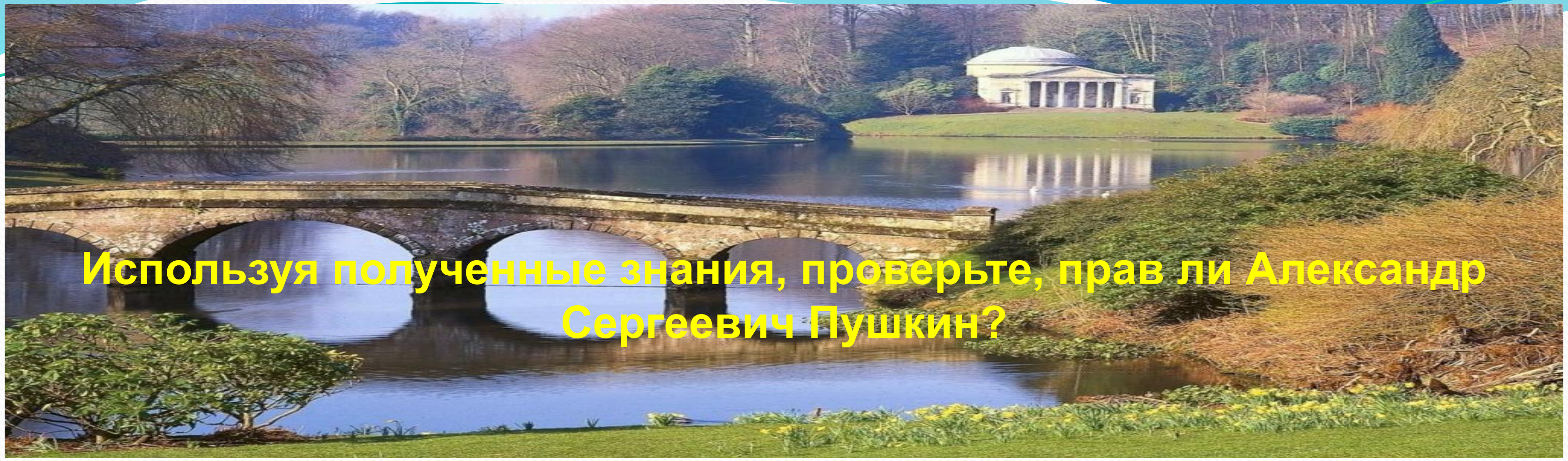
Куча песка имеет форму конуса, длина окружности основания которого 31,4 м, а образующая 5,4 м. Сколько трехтонных машин потребуется для вывоза песка, если масса 1м^3 песка составляет 2т?

Задача 2.

Вибросито для процеживания окрасочных составов имеет форму конуса. Боковая поверхность его вдвое больше площади основания. Определите вместимость вибросита, если радиус основания R = 20 см.

В своем драматическом произведении ***«Скупой рыцарь» Александр Сергеевич Пушкин*** *рассказывает одну старинную легенду восточных народов:*

«… Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу.
И гордый холм возвысился,
И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.»



СПРАВКА

1горсть ≈ 0,2 дм^3

Войско в 100 000 воинов считалось очень внушительным.

Угол откоса ≤ 45^0, иначе земля начнет осыпаться.

Решение к задаче 4*. $V=0{,}2\cdot 100\,000=20\,000(дм^3)=20(м^3)$.

Так как H=R, то $V=1/3\pi H^3$, $H^3=3*Y/\pi$

$$H=\sqrt[3]{\frac{3Y}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 20}{3{,}14}}\approx 2{,}7\,м.$$

Ответ: 2,7 метров.

*Надо обладать очень богатым воображением,
чтобы земляную кучу в 2,7 м
(1,5 человеческого роста)
назвать «гордым холмом».
Сделав расчет для меньшего угла, мы получили бы
еще более скромный
результат*

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

У Аттилы было самое многочисленное войско, которое знал древний мир.

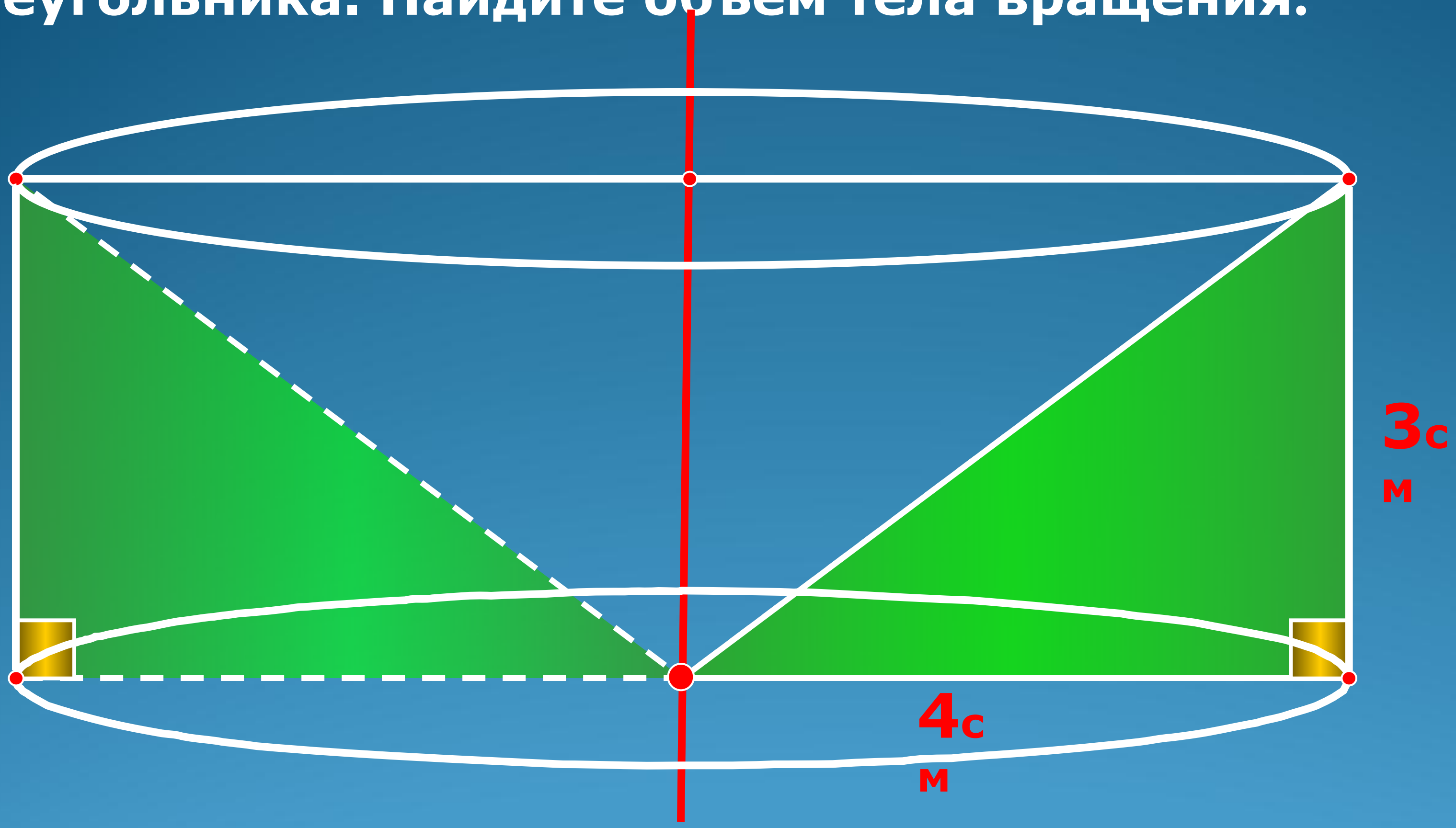
Историки оценивают его в 700 000 человек.

Если бы даже все воины Аттилы участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень.

Домашнее задание

Попробуйте сами дома вычислить высоту такого кургана и подумать, удовлетворила ли бы такая высота честолюбие Аттилы или нет?

ЗАДАЧА № 3. Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 см враща-ется около прямой, параллельной меньшему из катетов и проходя-щей через вершину меньшего из углов треугольника. Найдите объем тела вращения.



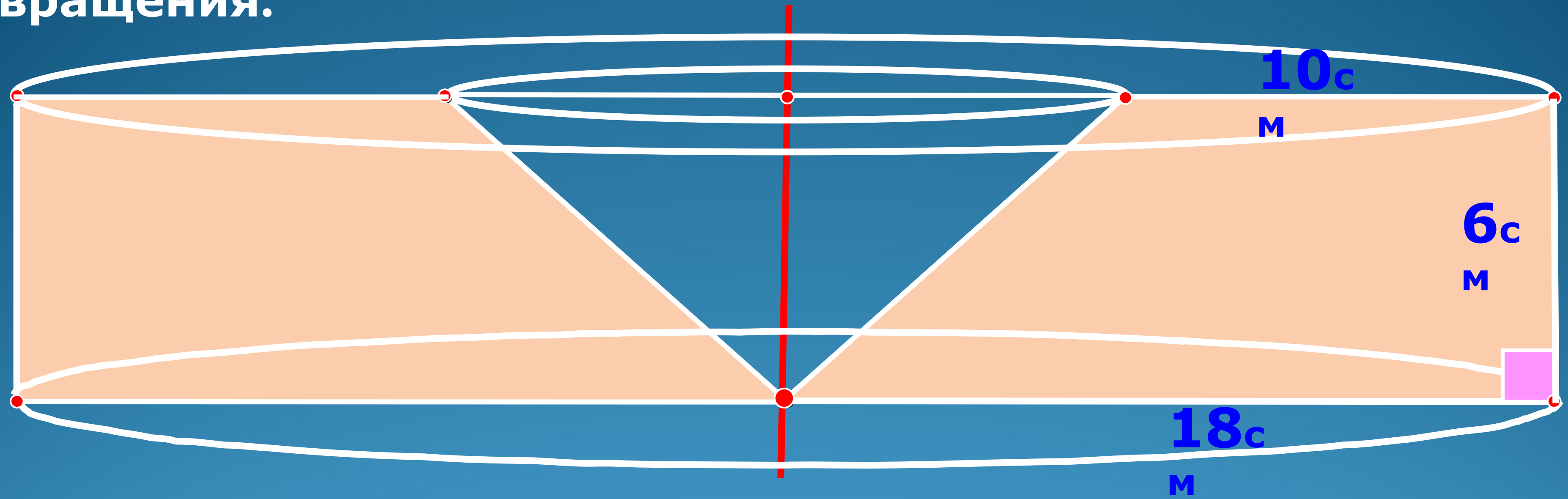
$$V_{т.вр.} = V_ц - V_к$$

$$V_{т.вр.} = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3$$

$$V_{т.вр.} = 48\pi - 16\pi$$

$$V_{т.вр.} = 32\pi$$

ЗАДАЧА № 4. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 и 18 см и высотой 6 см вращается около прямой, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно основаниям. Найдите объем тела вращения.



$$V_{т.вр.} = V_ц - V_к$$

$$V_{т.вр.} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 6$$

$$V_{т.вр.} = 1144\pi - 128\pi$$

$$V_{т.вр.} = 1816\pi$$