فصل سوم – درون یابی و برون یابی

در برخی موارد با توابعی روبرو هستیم که ضابطه تابع مشخص نیست بلکه مقدار تابع به ازای مقادیر مختلف ورودی مشخص است، به این توابع جدولی گویند. اگر چنانچه بخواهیم مقدار تابع را در نقاط میانی تعیین کنیم باید از روش های عددی درون یابی کمک بگیریم. جدول زیر یک تابع جدولی را نشان می دهد.

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i)=f_i$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

درون یابی

فرض کنید تابع f به صورت جدولی مشابه فوق داده شده باشد. به طوریکه برای $i\neq j$ داریم: $X_i\neq X_j$
برای تخمین $f(x)$ که $X\in(X_0,X_n)$ برای $X\neq X_i$ ، $i=0,1,2,\ldots,n-1$ ، یکی از راههای ساده این است که یک چند جمله ای مانند $P(X)$ پیدا کنیم که مقدار آن در X_i همان f_i باشد. یعنی برای $i=0,1,2,\ldots,n$ داشته باشیم:

$$\boxed{P(x_i)=f_i \qquad (1)}$$

و بعد بجای $f(x)$ در فاصله $[X_0,X_n]$ با $P(X)$ کار می کنیم.

- فقط یک چندجمله ای از درجه n وجود دارد که در شرط 1 صدق می کند.
- چندجمله ای که در شرط 1 صدق کند چند جمله ای درون یاب نامیده می شود.

چند جمله ایهای لاگرانژ

در این روش فرض می کنیم $L_0(x)$، $L_1(x)$ و . . . $L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله ای درجه n باشد و داشته باشیم

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n \qquad (۲)$$

که در آن j=0,1, …., n داشته باشیم:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (۳)$$

از رابطه (3) داریم:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} ۰ \ , & i \neq j \\ ۱ \ , & i = j \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n$$

رابطه (3) را چند جمله ای لاگرانژ گویند، که یک چندجمله ای از درجه n است.

مثال: چندجمله ای P(x)، مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید و f(0.5) را حساب کنید.

x_i	−۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

با نامگذاری xها از صفر، X0، X1 و X2 را داریم، در نتیجه مقدار n=2 است. بنابراین $L_0(x)$، $L_1(x)$ و $L_2(x)$ همگی از درجه 2 خواهند بود و به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = -(x^2 - 1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

در نهایت باجایگذاری در رابطه 2 خواهیم داشت:

$$P(x) = L_۰(x)f_۰ + L_۱(x)f_۱ + L_۲(x)f_۲$$

$$= ۱ \times L_۰(x) + ۱ \times L_۱(x) + ۳ \times L_۲(x)$$

$$= \frac{x^۲ - x}{۲} - (x^۲ - ۱) + \frac{۳}{۲}(x^۲ + x)$$

$$P(x) = x^۲ + x + ۱$$

چون x=0.5 در داخل جدول نیست و بین نقاط تابع جدولی قرار دارد، مقدار P(0.5) را به عنوان تقریبی از f(0.5) حساب می کنیم.

$$f(۰/۵) \simeq P(۰/۵)$$

$$= ۰/۲۵ + ۰/۵ + ۱ = ۱/۷۵$$

مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را حساب کرده، f(1/2) و f(3/2) حساب کنید.

x_i	−۱	۰	۱	۲
f_i	−۲	−۱	۰	۷

در این مثال نیز با نامگذاری x ها از صفر، n=3 خواهد بود. بنابراین چندجمله ایهای لاگرانژ L0(x)، L1(x)، L2(x) و L3(x) همگی از درجه 3 خواهند بود.

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x^3-x}{6}$$

در نتیجه چند جمله ای P(x) برابر خواهد بود با:

$$P(x)=-2L_0(x)-1L_1(x)+0\,L_2(x)+7L_3(x)$$

$$=\frac{-2(x^3-3x^2+2x)}{-6}-\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}+0+7\frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x)=x^3-1$$

با توجه به تابع $P(x)$، خواهیم داشت:

$$f(-\tfrac{1}{2}) \simeq P(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{9}{8}$$
$$f(\tfrac{3}{2}) \simeq P(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{19}{8}$$

نکته: اگر مختصات یک نقطه به تابع جدولی اضافه گردد، باید محاسبات را از ابتدا دوباره انجام داد و چندجمله ای جدید به دست آورد، در این حالت نمی توان از چند جمله ای قبلی استفاده کرد.

چند جمله ای درون یاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف: فرض کنید نقاط X_0، X_1، X_2، . . . و X_n نقاط دو به دو متمایز باشند و f_0، f_1، f_2، . . . و f_n مقادیر تابع f در این نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه اول بین X_i و X_{i+1} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \qquad (4)}$$

برای مثال تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه اول بین دو نقطه X_0 و X_1 و بین X_1 و X_2 را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \quad , \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه دوم بین X0، X1 و X2 را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

مشابه فوق می توان تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه بالا را حساب کرد، اما با ترسیم جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن، براحتی می توان مراتب مختلف تفاضلات تقسیم شده نیوتن را حساب کرد.

مثال: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن مربوط به تابع جدولی زیر را رسم کنید.

x_i	−۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

		تفاضلات مرتبهٔ	
x_i	f_i	اول	دوم
−۱	۱		
		(۱ − ۱) / (−۱ − ۰) = ۰	
۰	۱		(۰ − ۲) / (−۱ − ۱) = ۱
		(۱ − ۳) / (۰ − ۱) = ۲	
۱	۳		

مثال: با اضافه کردن نقطه (2,7) به تابع جدولی مثال قبل، جدول تفاضلات آن را رسم کنید.

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
−۱	۱			
		۰		
۰	۱		۱	
		۲		۰
۱	۳		۱	
		۴		
۲	۷			

نکته: مشاهد می شود که با اضافه کردن یک نقطه به تابع جدولی، نیازی به محاسبه جدول تفاضلات از ابتدا نیست.

فرمول چند جمله ای درون یاب برحسب جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن

با توجه به تعریف تفاضلات تقسیم شده نیوتن، چند جمله ای درون یاب f در نقاط X_0، X_1، . . . و X_n عبارتست از:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \qquad (۶)$$

که در آن $f[X_0, X_1, X_2, \ldots, X_i]$ تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه iام بین نقاط X_0، X_1، . . . و X_i برای $i=1, 2, 3, \ldots, n$ می باشد و به صورت زیر برحسب تفاضلات مرتبه قبلی حساب می شود:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{i-1}] - f[x_1, \cdots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹

جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	<u>۱</u>			
		<u>−۷</u>		
۱	−۶		<u>۴</u>	
		۵		<u>۱</u>
۳	۴		۱۰	
		۵۵		
۶	۱۶۹			

$$P(x) = f_{۰} + (x - x_{۰})f[x_{۰}, x_{۱}] + (x - x_{۰})(x - x_{۱})f[x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}] +$$

$$(x - x_{۰})(x - x_{۱})(x - x_{۲})f[x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}]$$

با دقت در رابطه تفاضلات تقسیم شده نیوتن و جدول فوق مشخص می شود که عدد بالایی جدول، تفاضلات مورد نیاز در رابطه چند جمله ای درون یاب هستند، لذا با جایگذاری آن ها در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$P(x) = ۱ - ۷x + ۴x(x - ۱) + x(x - ۱)(x - ۳)$$

$$P(x) = x^{۳} - ۸x + ۱$$