

The background features a dark blue gradient with a starry, nebula-like texture. On the left side, there are several circular diagrams and arcs. One prominent diagram is a large circle with a scale from 140 to 260 in increments of 10. Other smaller circles and arcs are scattered around, some with arrows indicating direction. The overall aesthetic is technical and mathematical.

# ФРАКТАЛЫ

ВЫПОЛНИЛ РАБОТУ  
СУМАРОКОВ ЯРОСЛАВ  
СТУДЕНТ 11М ГРУППЫ

# ЧТО ТАКОЕ ФРАКТАЛ И КАК ОН ВЫГЛЯДИТ

Фрактал (лат. Fractus — дроблёный, сломанный, разбитый) — множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей). В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, отличную от топологической, поэтому их следует отличать от прочих геометрических фигур, ограниченных конечным числом звеньев. Самоподобные фигуры, повторяющиеся конечное число раз, называются предфракталами.





# ФРАКТАЛЫ В ПРИРОДЕ

Что общего у дерева, берега моря, облака или кровеносных сосудов у нас в руке? Существует одно свойство структуры, присущее всем перечисленным предметам: они самоподобны. От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них — еще меньшие, и т. д., то есть ветка подобна всему дереву. Похожим образом устроена и кровеносная система: от артерий отходят артериолы, а от них — мельчайшие капилляры, по которым кислород поступает в органы и ткани. Посмотрим на космические снимки морского побережья: мы увидим залив и полуостров; взглянем на него же, но с высоты птичьего полета: нам будут видны бухты и мысы; теперь представим себе, что мы стоим на пляже и смотрим себе под ноги: всегда найдутся камешки, которые дальше выдаются в воду, чем остальные. То есть береговая линия при увеличении масштаба обретает похожий на саму себя. Это свойство объектов американский (правда, выросший во Франции) математик Бенуа Мандельброт назвал фрактальностью, а сами такие объекты — фракталами (от латинского fractus — изломанный).

С береговой линией, а точнее, с попыткой измерить ее длину, связана одна интересная история, которая легла в основу научной статьи Мандельброта, а также описана в его книге «Фрактальная геометрия природы». Речь идет об эксперименте, который поставил Льюис Ричардсон (Lewis Fry Richardson) — весьма талантливый и эксцентричный математик, физик и метеоролог. Одним из направлений его исследований была попытка найти математическое описание причин и вероятности возникновения вооруженного конфликта между двумя странами. В числе параметров, которые он учитывал, была протяженность общей границы двух враждующих стран. Когда он собирал данные для численных экспериментов, то обнаружил, что в разных источниках данные об общей границе Испании и Португалии сильно отличаются. Это натолкнуло его на следующее открытие: длина границ страны зависит от линейки, которой мы их измеряем. Чем меньше масштаб, тем длиннее получается граница. Это происходит из-за того, что при больших увеличениях становится возможным учитывать все новые и новые изгибы берега, которые раньше игнорировались из-за грубости измерений. И если при каждом увеличении масштаба будут открываться ранее не учтенные изгибы линий, то получится, что длина границ бесконечна! Правда, на самом деле этого не происходит — у точности наших измерений есть конечный предел. Этот парадокс называется эффектом Ричардсона (Richardson effect).

В наши дни теория фракталов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. Помимо фрактальной живописи фракталы используются в теории информации для сжатия графических данных (здесь в основном применяется свойство самоподобия фракталов — ведь чтобы записать небольшой фрагмент рисунка и преобразования, с помощью которых можно получить остальные части, требуется гораздо меньше памяти, чем для хранения всего файла). Добавляя в формулы, задающие фрактал, случайные возмущения, можно получить стохастические фракталы, которые весьма правдоподобно передают некоторые реальные объекты — элементы рельефа, поверхность водоемов, некоторые растения, что с успехом применяется в физике, географии и компьютерной графике для достижения большего сходства моделируемых предметов с настоящими. В радиотехнике в последние десятилетия начали выпускать антенны, имеющие фрактальную форму. Занимая мало места, они обеспечивают вполне качественный прием сигнала. А экономисты используют фракталы для описания кривых колебания курсов валют (это свойство было открыто Мандельбротом более 30 лет назад).

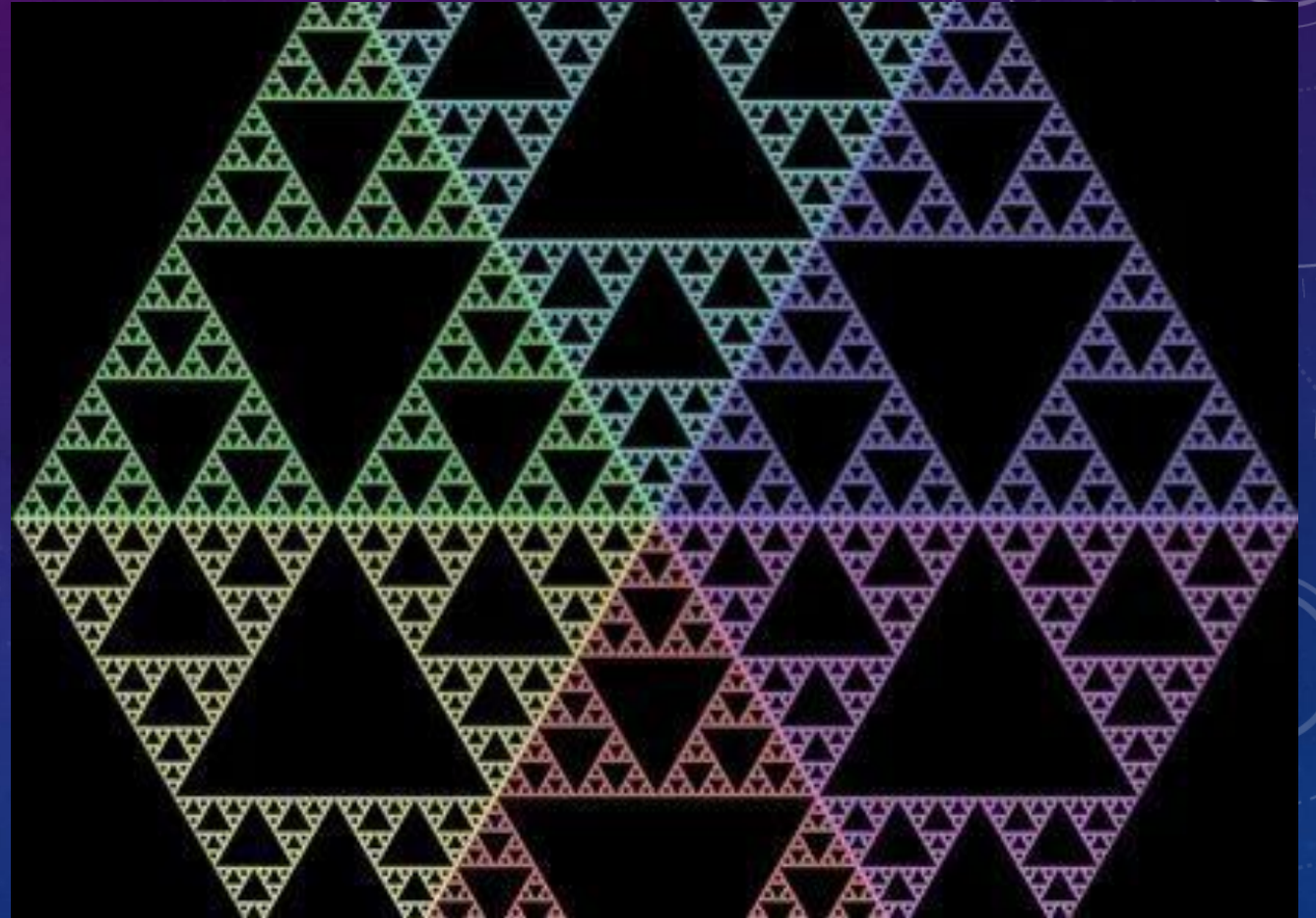




# КАКИЕ БЫВАЮТ ФРАКТАЛЫ

## Геометрические фракталы

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную – генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.



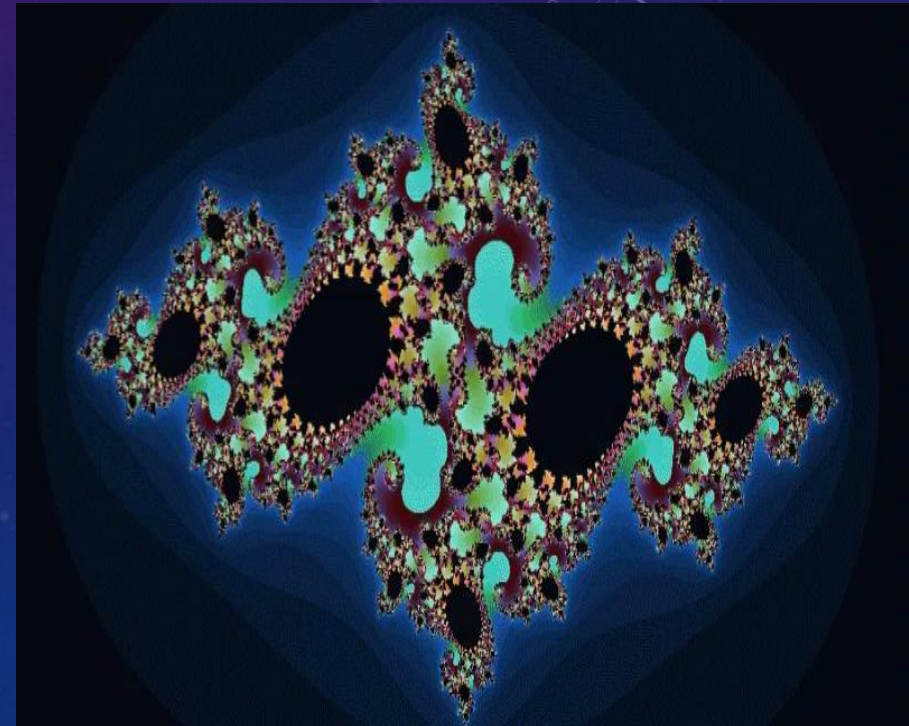
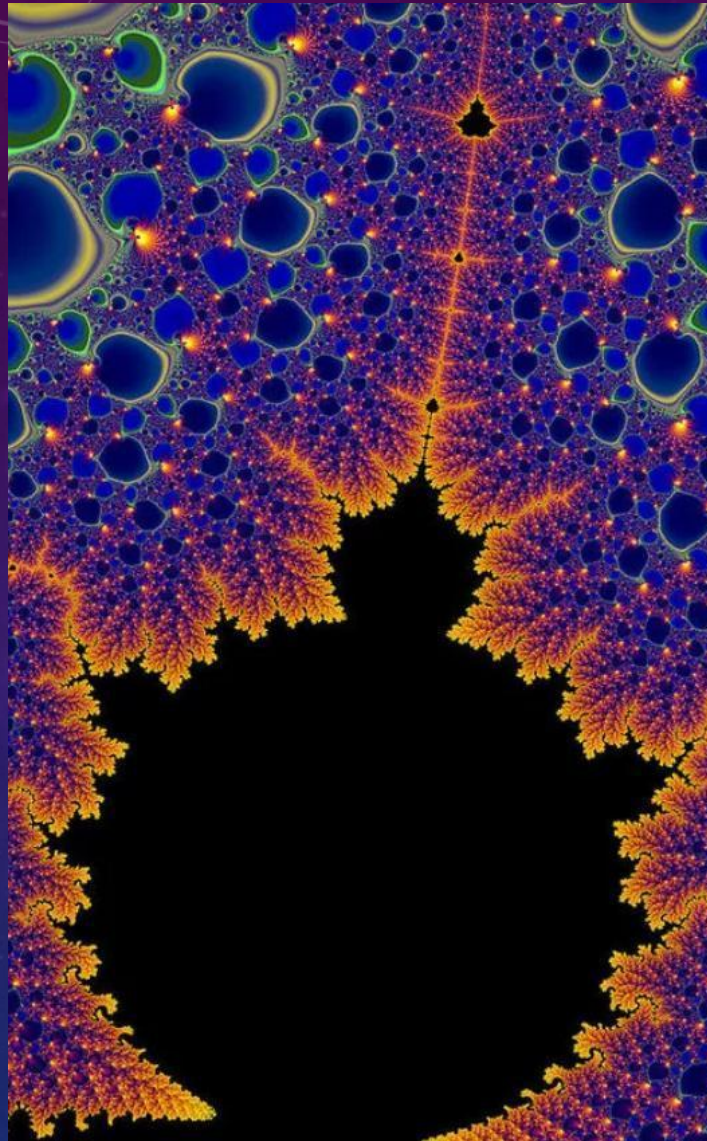


# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

- Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в  $n$ -мерных пространствах. Наиболее изучены двумерные процессы.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или как говорят – аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двумерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.





# СТОХАТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

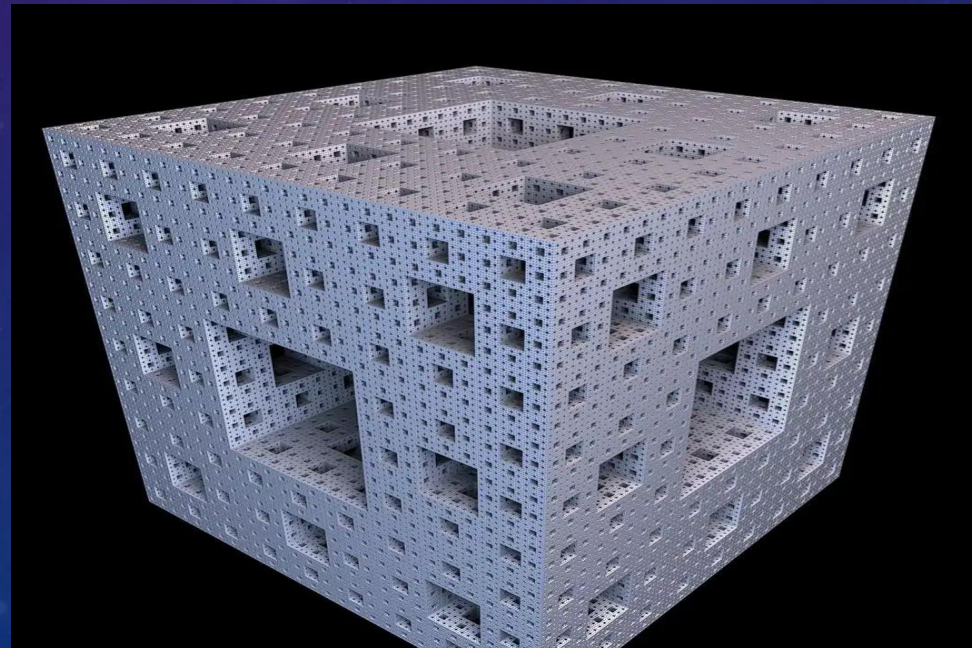
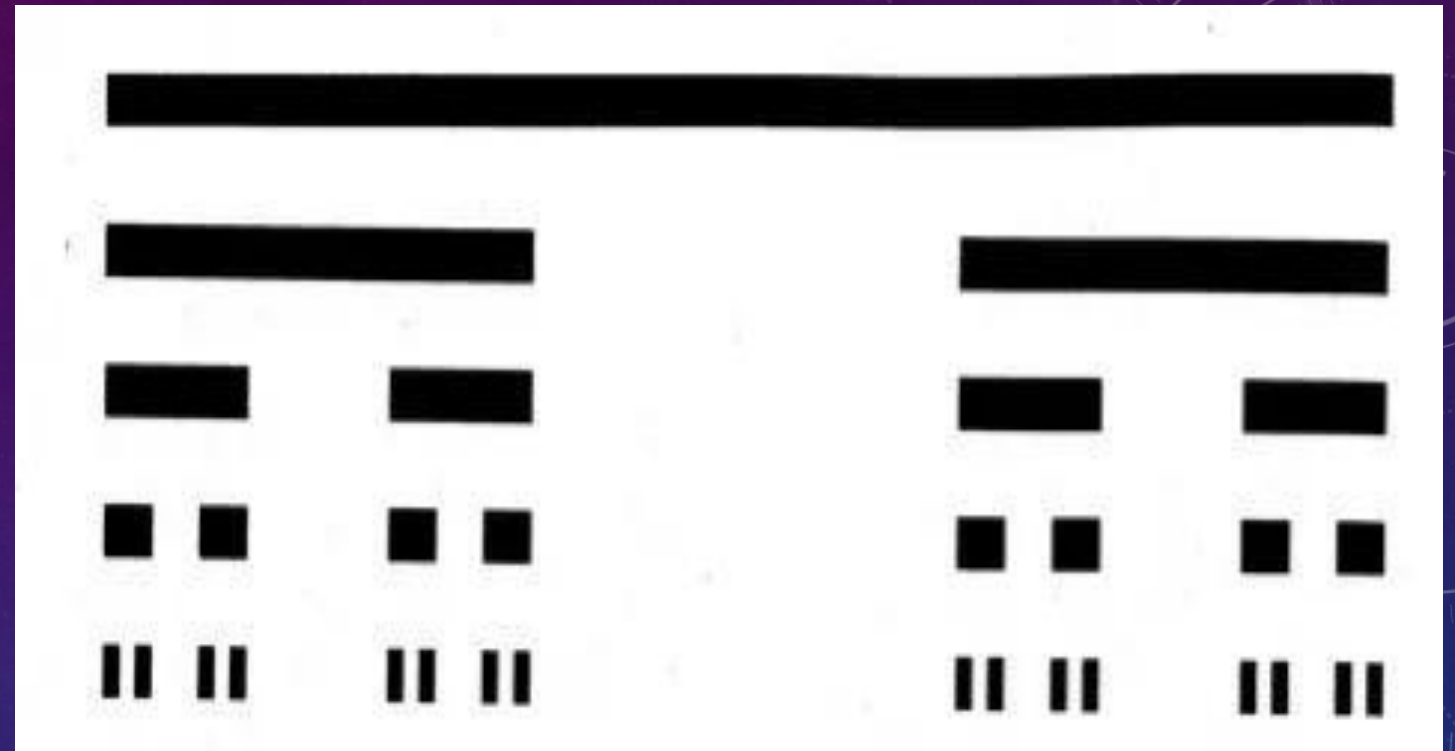
- Стохастические фракталы

Стохастические фракталы получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

## ПРИМЕРЫ ФРАКТАЛОВ

множество Кантора — нигде не плотное несчетное совершенное множество. Модифицировав процедуру, можно также получить нигде не плотное множество положительной длины.

Треугольник Серпинского и ковер Серпинского — аналоги множества Кантора на плоскости (треугольник Паскаля).



# КТО ОТКРЫЛ ФРАКТАЛЫ?

Мандельброт родился в 1924 году в Варшаве в еврейской семье, которая в 1936 году эмигрировала во Францию. Будущий автор теории фракталов учился в Политехнической школе в Париже. Здесь Бенуа попал под влияние своего дяди Шлема Мандельброта, известного математика, участника знаменитой группы Николая Бурбаки, цель которой состояла в написании серии книг, чье строгое изложение отражало бы современное состояние математики.

После начала оккупации Мандельброты бежали на юг Франции, где Бенуа вскоре потерял интерес к учебе, так как открывшийся у него математический дар переориентировал его на задачи, находящиеся далеко за пределами школьной программы. Сразу после войны он становится студентом Сорбонны, после окончания которой переезжает в США, где получает научную степень в Калифорнийском технологическом институте. Вернувшись во Францию, он получает докторскую степень, в 1955 году женится на Альетт Каган и переезжает в Женеву.

В 1958 году Мандельброт возвращается в США, где работает в компании «IBM» в Йорктауне. Здесь, исследуя экономику, Мандельброт обнаружил, что внешне хаотические колебания цены могут следовать скрытому математическому порядку во времени, который не описывается стандартными функциями. Бенуа Мандельброт сделал революционное открытие: он выявил отношение подобия в длительных колебаниях цены и колебаниях кратковременных. Это открытие поразило не только экономистов, но и весь научный мир.

Для решения проблемы колебания цены Мандельброт первым в мире применил метод рекурсивного (рекурсивной называется последовательность, каждый следующий элемент которой функционально зависит от предыдущих элементов) построения фрактальных множеств. Понятие «фрактал» (от лат. Fractus – «сломанный, разбитый») – также его личное изобретение.

В 1975 году Бенуа Мандельброт опубликовал работу «Фрактальная геометрия природы», в которой сформулировал теорию сложных геометрических фигур, обладающих свойством самоподобия, и применил ее для анализа естественных образований природы. Во введении к этой работе он писал: «Облака – не идеальные сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, кора дерева – не гладкая, и молния не распространяется по идеально прямой линии».

Теория фракталов давно нашла применение в математических моделях экономики, физике, химии, астрономии и других областях знания. Фракталы – инструмент для анализа состояния биржевых рынков. В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании пламени, облака и других нелинейных процессов. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов. Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов – деревьев, горных ландшафтов, поверхности моря и т. Д.

Шлем Мандельброт отмечал у своего юного племянника уникальный дар, с помощью которого тот успешно применял геометрические методы для решения сложных алгебраических задач. Пространственное воображение помогло юному Бенуа переформулировать задачу и решить ее качественно иным методом. Именно этот принцип впоследствии был применен ученым для того, чтобы решить сложную статистическую задачу и обнаружить в хаотическом колебании графика цен на хлопок структурно подобные образования и правильно их интерпретировать – в соответствии с общим принципом формирования природных структур.

