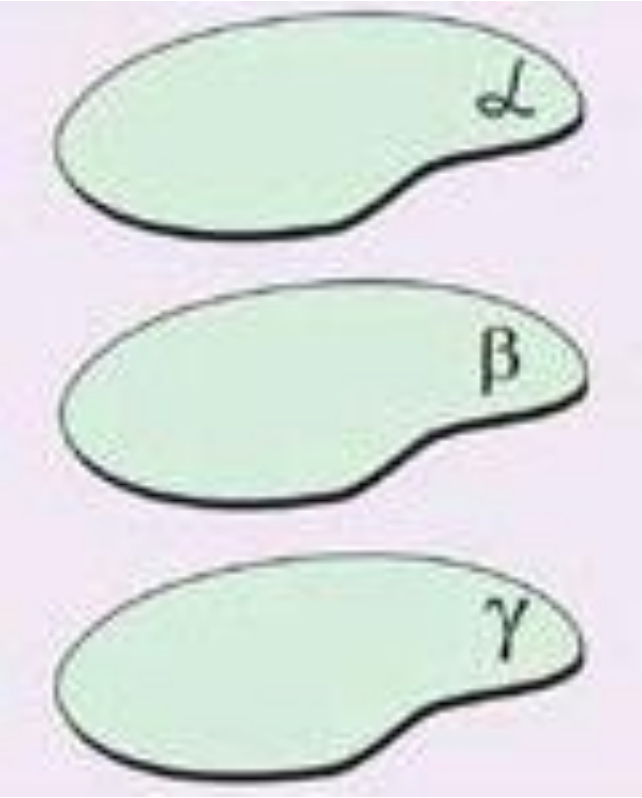
Параллельность плоскостей



Расположение плоскостей в пространстве.

α *и* β *совпадают*

β α

α

β

α

β

α ∩ β

α || β

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

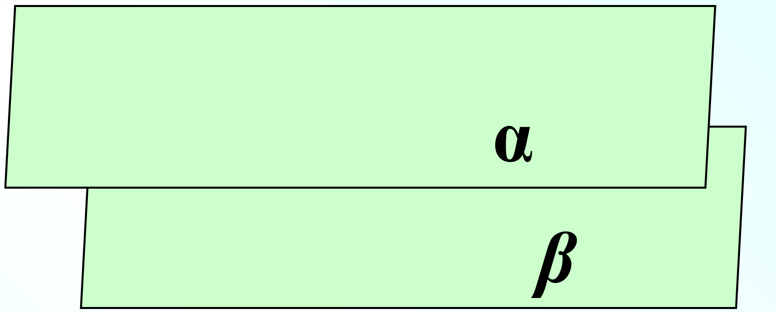
Плоскости

Пересекаются | **Параллельны**

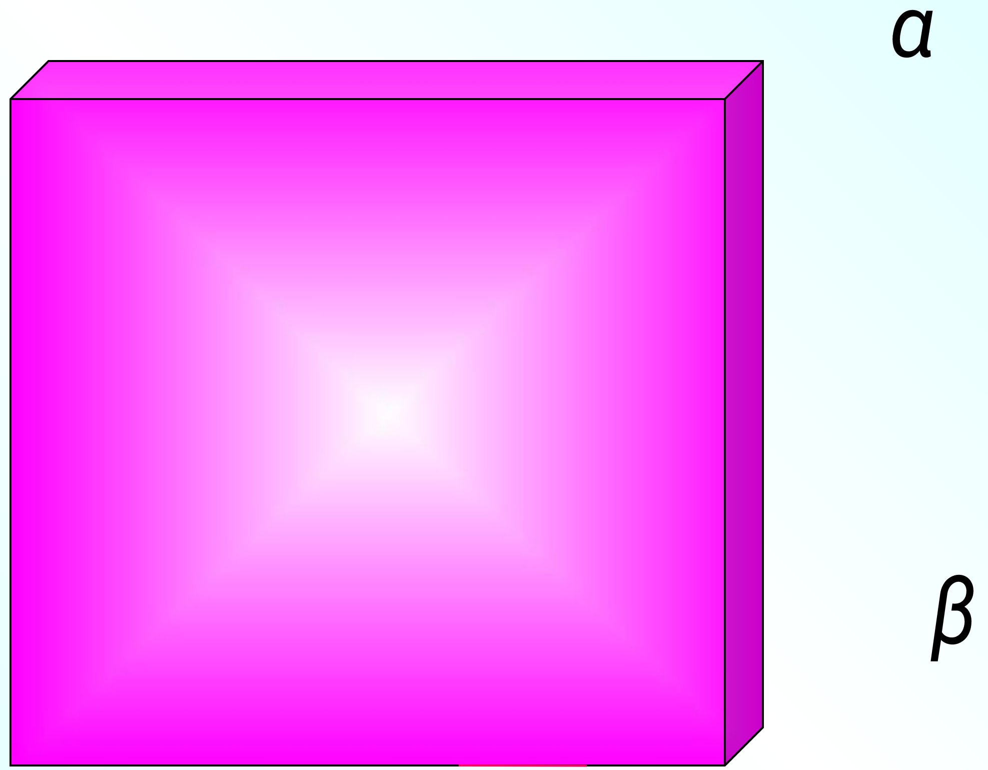
α

β

$$\alpha \cap \beta$$



$$\alpha \parallel \beta$$

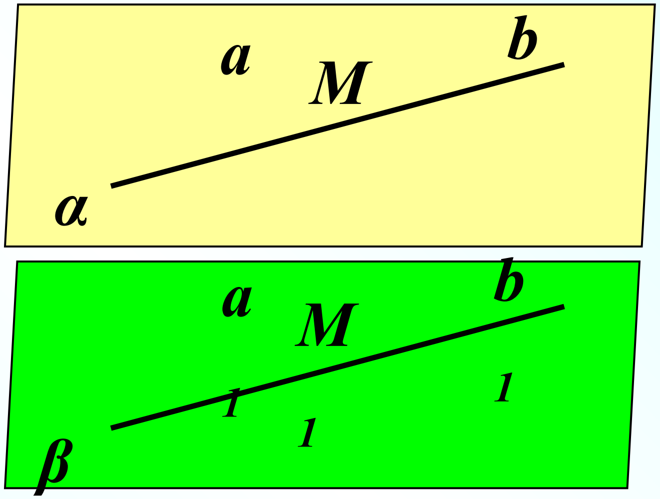

α
β

Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Дано:

- $a \subset \alpha$; $в \subset \alpha$; $a \cap в = M$;
- $a_1 \subset \beta$; $в_1 \subset \beta$;
- $a \parallel a_1$; $в \parallel в_1$
- *Доказать,*
- *что* $\alpha \parallel \beta$



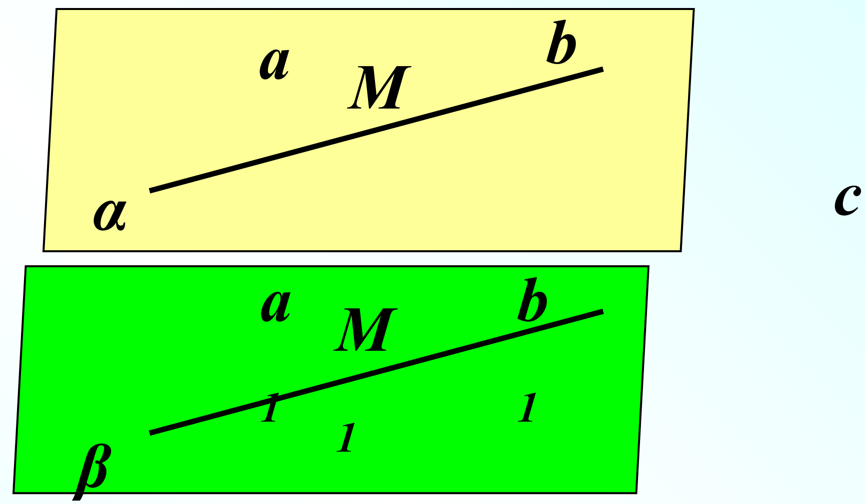
Доказательство от противного

- $a \subset \alpha$; $a_1 \subset \beta$; $a \parallel a_1 \Rightarrow a \parallel \beta$
  $в \subset \alpha$; $в_1 \subset \beta$; $в \parallel в_1 \Rightarrow в \parallel \beta$

- Пусть $\alpha \cap \beta = c$
- Тогда
- $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow a \parallel c$.
- $b \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow b \parallel c$.

- $a \cap в = M$; $a \parallel c$; и $в \parallel c \Rightarrow a \parallel b$

- Находим противоречие условию: через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c.
- Предположение $\alpha \cap \beta = c$ - неверно



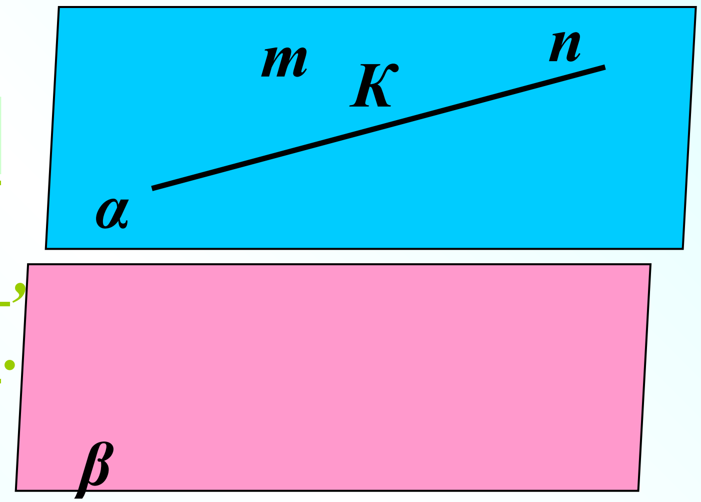
Какие теоремы мы использовали при доказательстве признака?

$a \subset \alpha$; $a_1 \subset \beta$; $a \parallel a_1 \Rightarrow a \parallel \beta$; $в \subset \alpha$; $в_1 \subset \beta$; $в \parallel в_1 \Rightarrow в \parallel \beta$	*Признак параллельности прямой и плоскости*
Пусть $\alpha \cap \beta = c$	***Делаем предположение, противное заключению***
Тогда **$a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow a \parallel c$.** **$b \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow b \parallel c$.**	*Теорема о линии пересечения плоскостей*
$a \cap в = M$; $a \parallel c$; и $в \parallel c \Rightarrow a \parallel b$	*Теорема о параллельности трех прямых в пространстве*
Находим противоречие условию: через точку М проходят две прямые a и b, параллельные прямой c.	*Теорема о параллельных прямых*
Предположение **$\alpha \cap \beta = c$ - неверно**	***Делаем вывод, $\alpha \parallel \beta$***

Задача № 51.
(еще один признак параллельности)

Дано: $m \cap n = K$, $m \in \alpha$, $n \in \alpha$,
$m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.



c

1) Допустим, что $\alpha \cap \beta = c$

2) Так как $n \parallel \beta$, $m \parallel \beta$,
то $m \parallel c$ и $n \parallel c$.

) Получаем, что
через точку K проходят две прямые параллельные прямой c.

Вывод: $\alpha \parallel \beta$

Задача № 53. Дано: отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 не лежат в одной плоскости и имеет общую середину - точку О. Доказать: $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.

Доказательство:

A_1A_2, и B_1B_2 лежат в одной плоскости по следствию из A_1 (через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна).

$A_1B_1A_2B_2$ - параллелограмм (диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам). Следовательно, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$

Аналогично A_1A_2, и C_1C_2 лежат в одной плоскости. $A_1C_1A_2C_2$ - параллелограмм.

Отсюда, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$

$A_1B_1 \cap A_1C_1 = A_1$; $A_2B_2 \cap A_2C_2 = A_2$.

По признаку параллельности плоскостей $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.

A *1*

C *1*

O

B *2*

B *1*

A *2*

C *2*

Отвечаем на вопросы

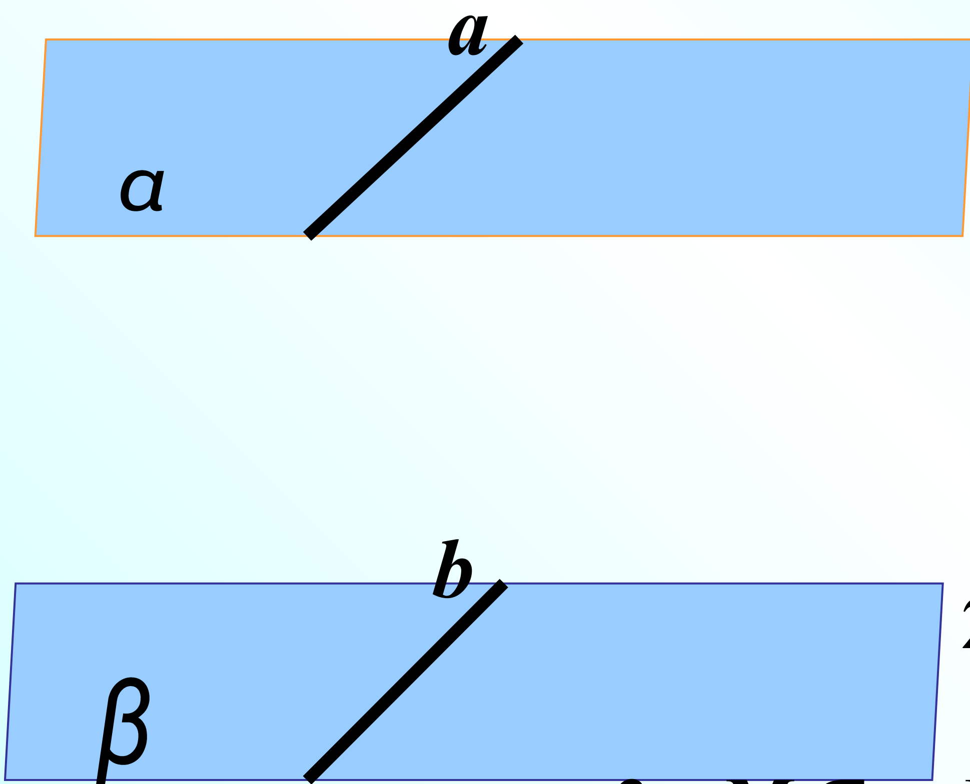
1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m не лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β?
4. Верно ли, что если прямая а параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая а имеет одну общую точку?
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Верно ли, что плоскость трапеции параллельна плоскости α?
6. Две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти стороны быть боковыми сторонами трапеции?
7. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?
8. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей?
9. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости?
10. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то и третья сторона параллельна плоскости α?

Проверяем свою работу

1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек? **Да**
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны? **Нет**
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m не лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β? **Да**
4. Верно ли, что если прямая а параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая а имеет одну общую точку? **Нет**
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Верно ли, что плоскость трапеции параллельна плоскости α? **Да**
6. Две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти стороны быть боковыми сторонами трапеции? **Нет**
7. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? **Нет**
8. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей? **Нет**
9. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости? **Нет**
10. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то и третья сторона параллельна плоскости α? **Да**

Свойства параллельных плоскостей.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$

$\beta \cap \gamma = b$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

1. $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$
2. Пусть $a \nparallel b$,

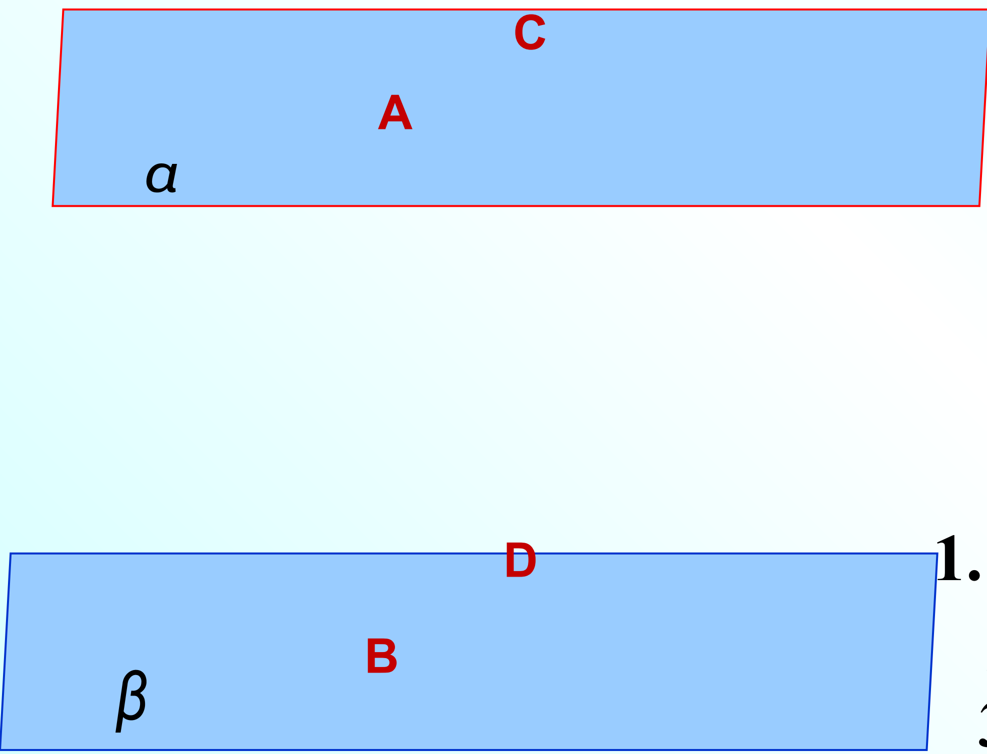
   тогда $a \cap b = M$
3. $M \in \alpha$, $M \in \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \cap \beta = c$ (A_2)

Получили противоречие с условием.

Значит $a \parallel b$ ч. т.д.

Свойства параллельных плоскостей.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$, $AB \parallel CD$

$AB \cap \alpha = A$, $AB \cap \beta = B$,

$CD \cap \alpha = C$, $CD \cap \beta = D$

Доказать: $AB = CD$

Доказательство:

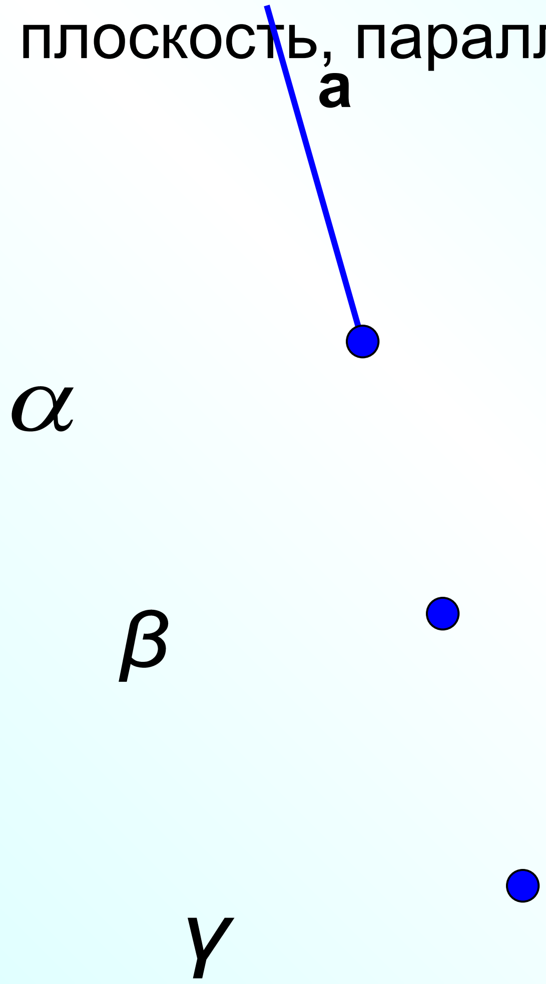
1. Через $AB \parallel CD$ проведем γ
2. $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$
3. $\Rightarrow$ $AC \parallel BD$,
4. $AB \parallel CD$ (как отрезки парал. прямых)
5. $\Rightarrow$ АВСД – параллелограмм (по опр.)

γ

$\Rightarrow$ $AB = CD$ (по свойству параллелограмма)

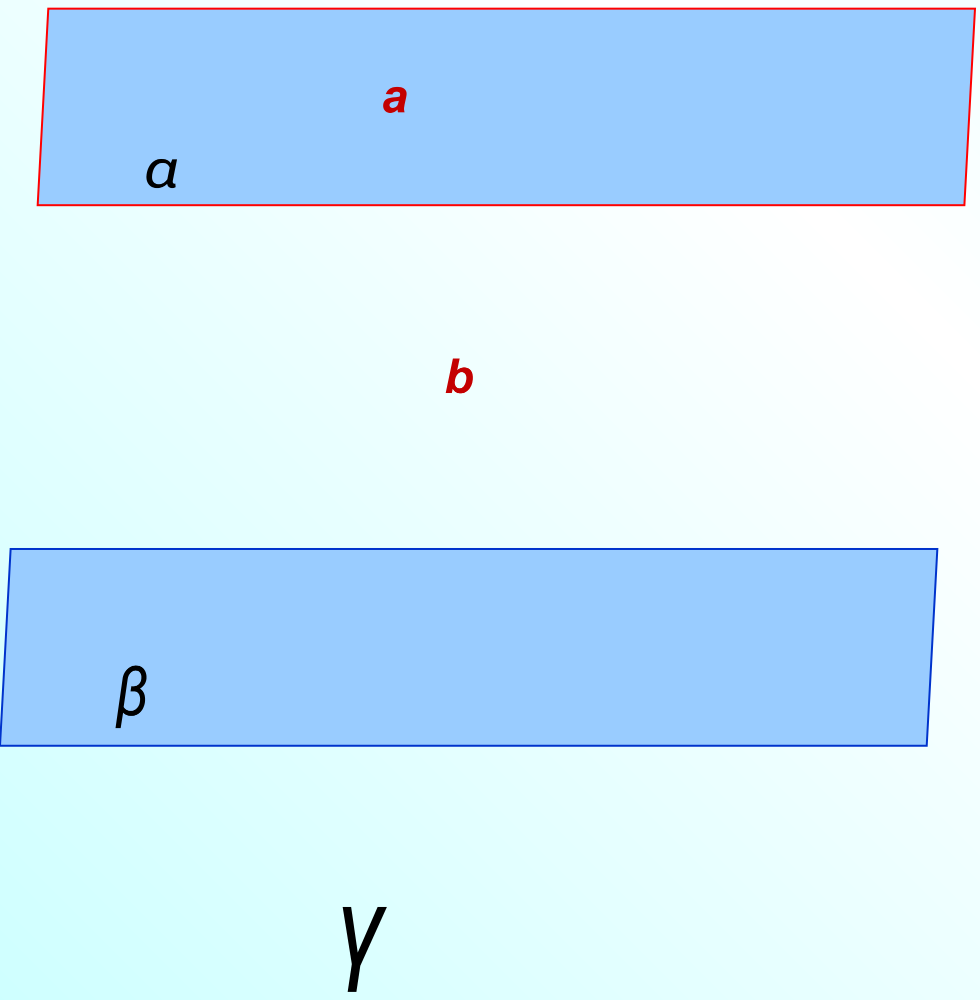
№55 (еще одно свойство)

Если прямая а пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную данной плоскости α .



Решение задачи № 58.(еще одно свойство)

Если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей α β и , то она пересекает и другую плоскость.



Дано:

α || β, α пересекается с γ (рис)

Доказать: β пересекается с γ

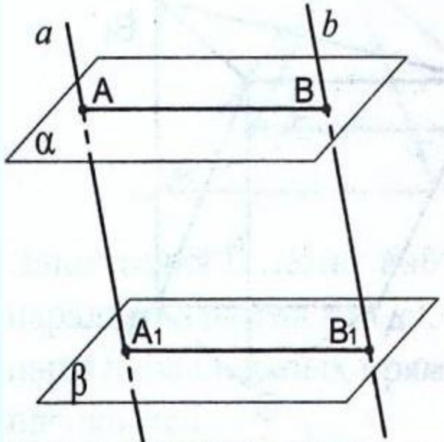
Доказательство:

Пусть **γ** пересекает **α** по прямой ***a*.**
Проведем в плоскости **γ** прямую ***b***, пересекающую **α**.
Прямая ***b*** пересекает **α**, поэтому она пересекает параллельную ей плоскость **β** (задача № 55).
Следовательно, и плоскость **γ**, в которой лежит прямая ***b***, пересекает плоскость **β**.

Решите задачи и проверить.

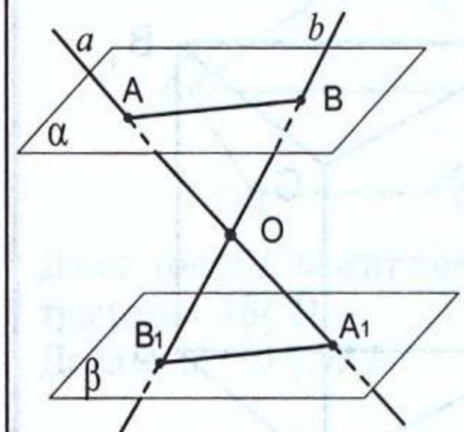
Плоскости α и β параллельны.

1



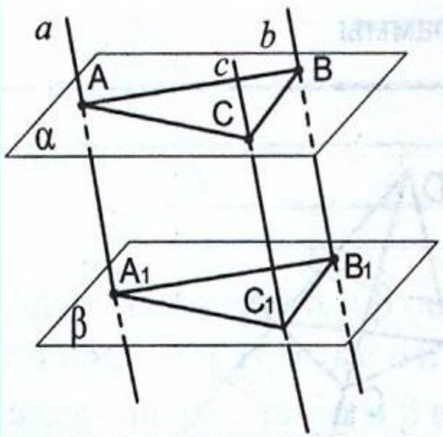
Дано:
$a \parallel b$.
Доказать:
$AB = A_1B_1$

2



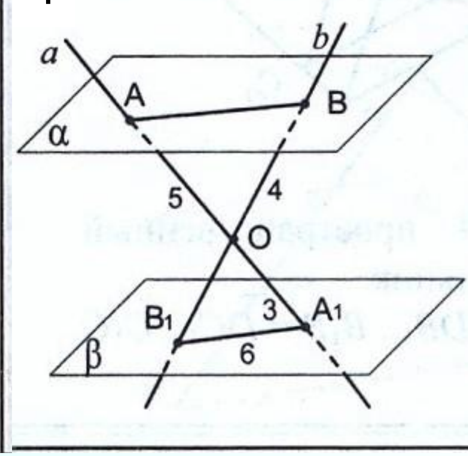
Дано:
прямые a и b пересекаются в точке O.
Доказать:
$AB \parallel A_1B_1$

3

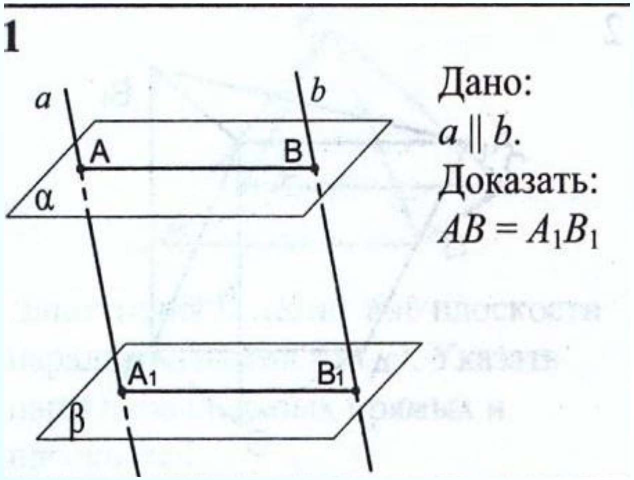


Дано:
$a \parallel b \parallel c$.
Доказать:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

4



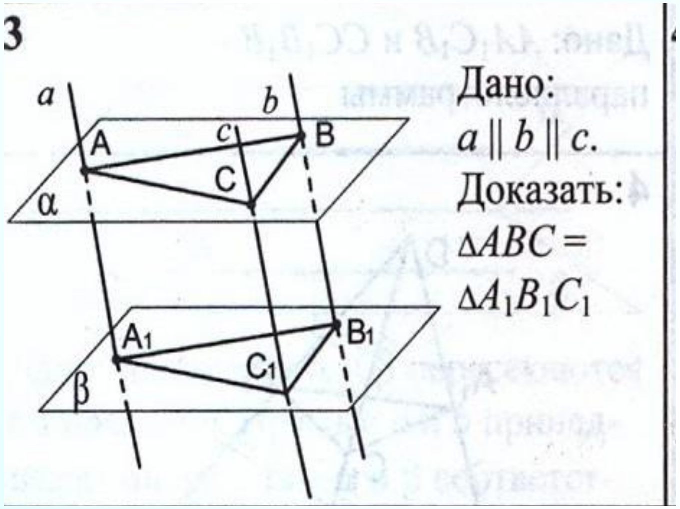
Дано: прямые a и b пересекаются в точке O.
Найти:
AB и OB_1



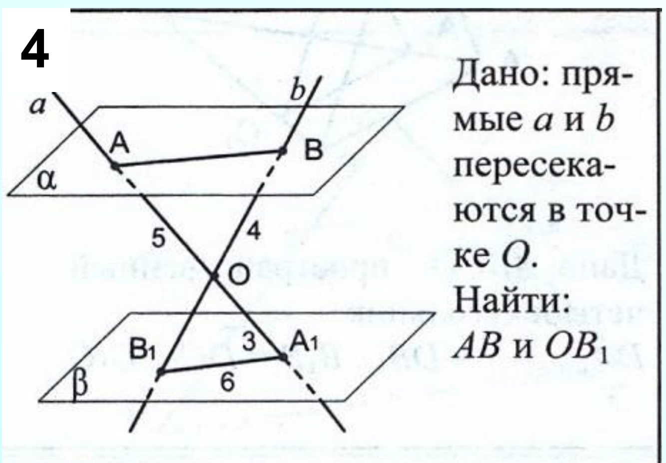
Доказательство:
Рассмотрим четырехугольник ABB1A1: AB||A1B1

(по свойству 1), AA1||BB1 (AA1 ∈ *a,* BB1 ∈ *b, a*||*b*),
=> ABB1A1 – параллелограмм. В параллелограмме противоположные стороны равны. Значит, AB = A1B1. Ч.т.д.

Доказательство:
Проведем плоскость **γ** ч/з пересекающиеся прямые ***a*** и ***b*** : **γ∩α= AB, γ∩β=A1B1.**
По свойству 1: AB||A1B1. Ч.т.д.



Доказательство:
По свойствам 1 и 2 четырехугольники ACC1A1, BCC1B1, ABB1A1 – параллелограммы. В параллелограмме противоположные стороны равны. Значит, AC=A1C1, BC=B1C1, AB=A1B1, тогда ΔABC=ΔA1B1C1. Ч.т.д.



Решение:
AB||A1B1 по 1 свойству
Рассмотрим ΔAOB и ΔA1OB1: они подобны по первому признаку подобия. Из этого следует:
OA/OA1=OB/OB1=AB/A1B1, тогда 5/3=4/OB1=AB/6
=> AB=10, OB1= 2,4.

№60 Признак параллельности трех плоскостей

Если две плоскости α и β параллельны плоскости γ, то плоскости α и β параллельны.

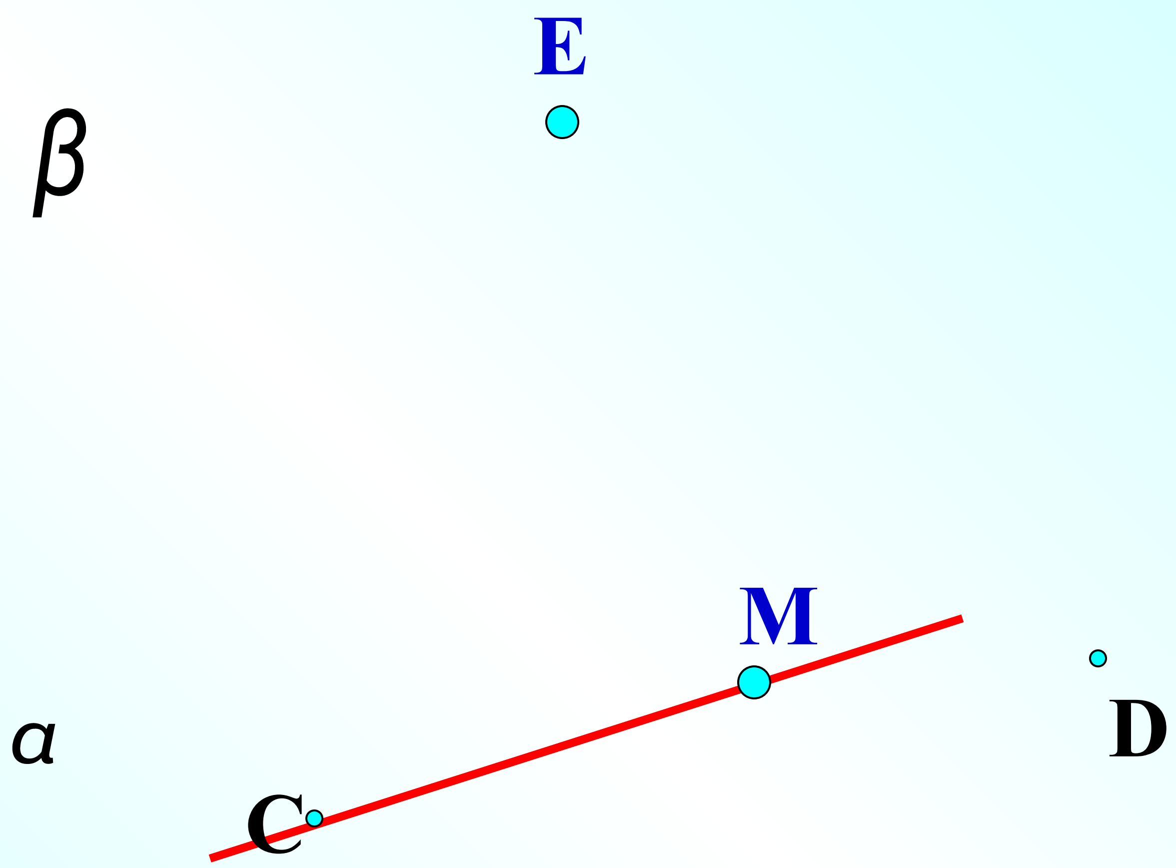
β

γ

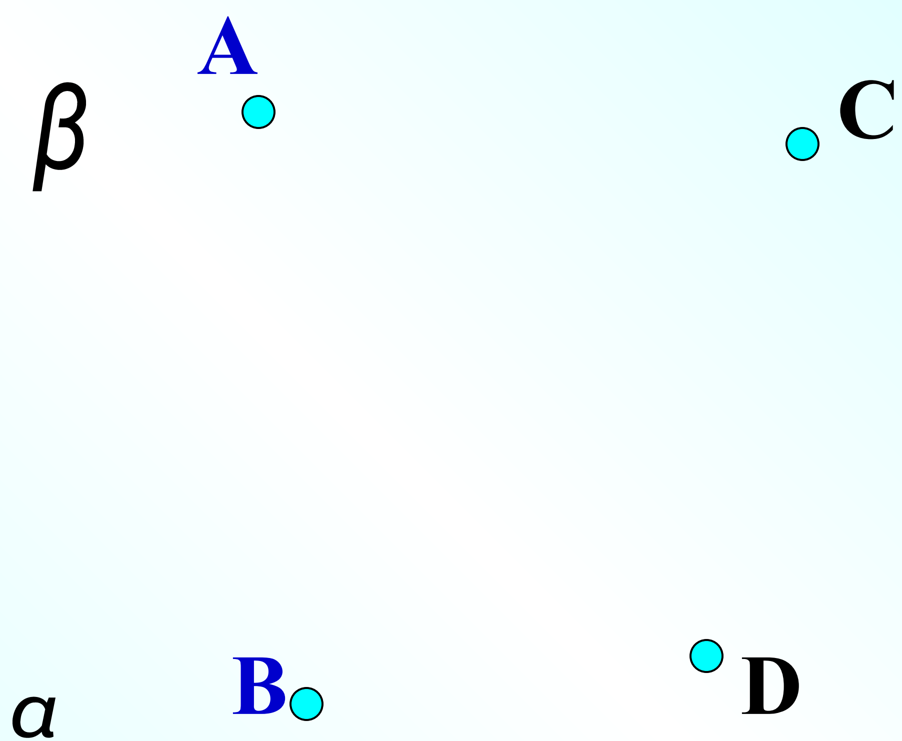
α

Признак 3

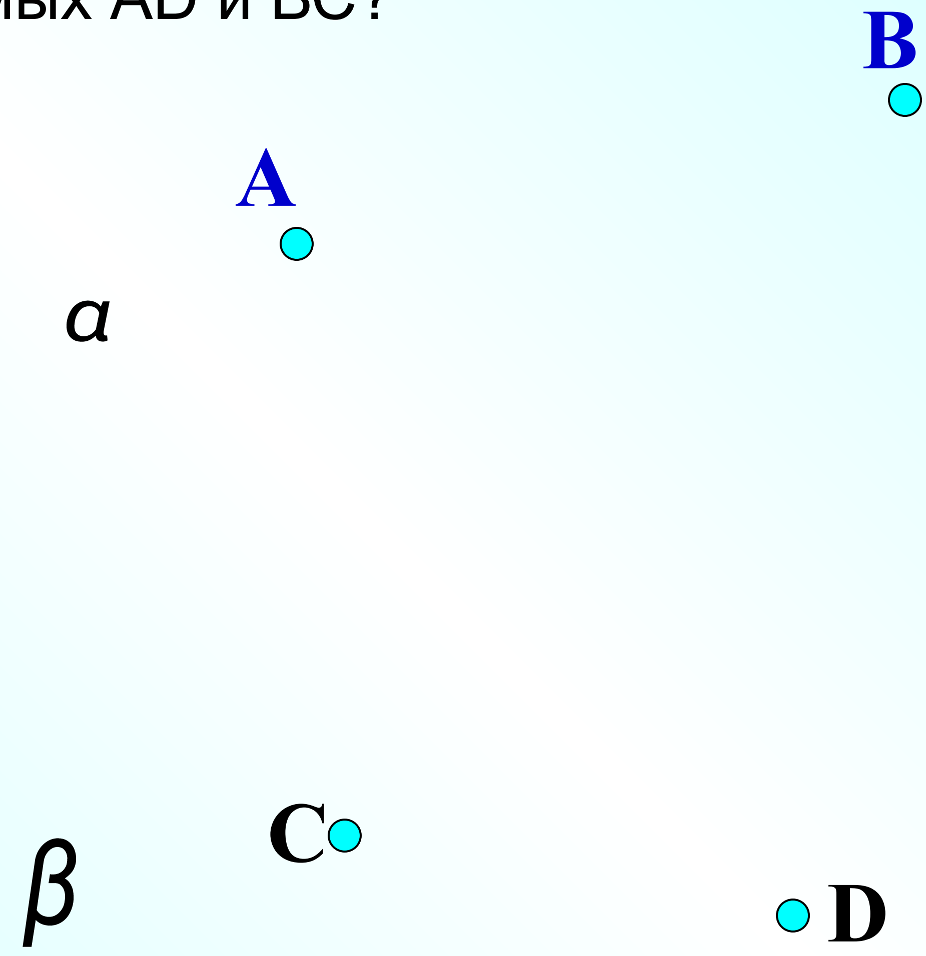
Отрезок CD лежит в плоскости α. Концы отрезка EM лежат на параллельных плоскостях α и β. Постройте линии пересечения плоскостей ECD, EMC и EMD с плоскостью β.



Концы отрезков AB и CD лежат на параллельных плоскостях α и β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и плоскости BDC с плоскостью β.



Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β. Что можно сказать о взаимном расположении прямых AD и BC?

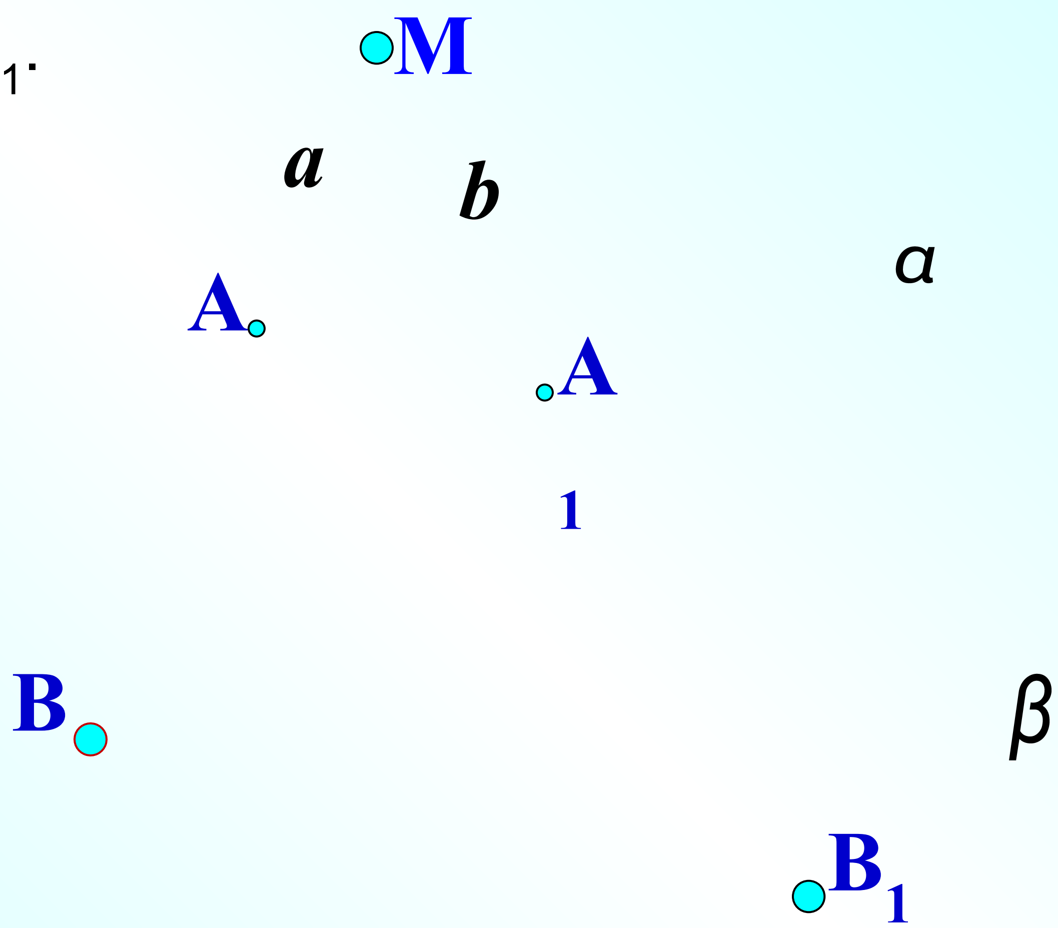


$AD \cdot BC$

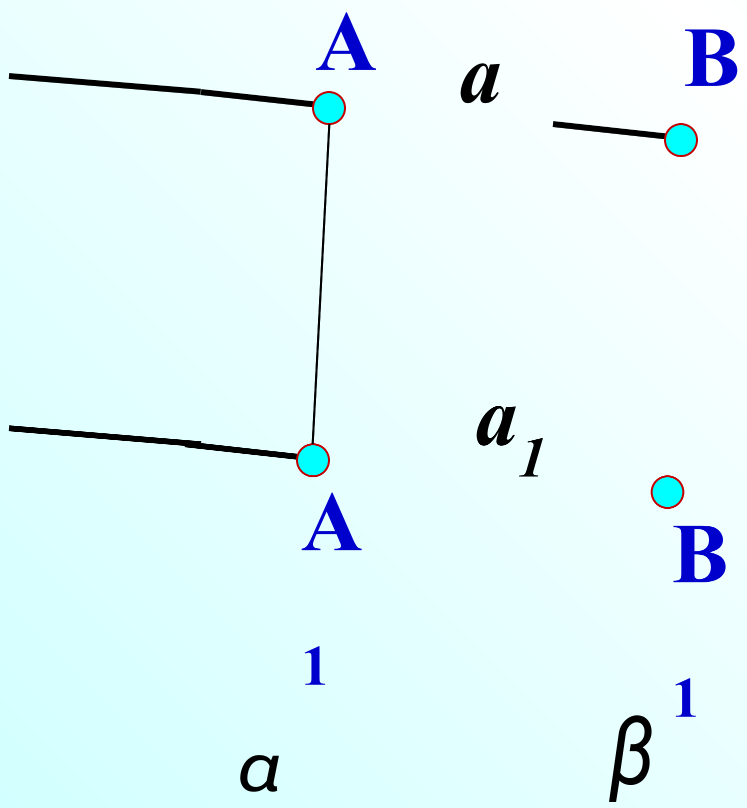
Плоскости α и β параллельны, прямые ***a*** и ***b*** пересекаются в точке М. Прямая ***a*** пересекает плоскости α и β соответственно в точках А и В, а прямая ***b*** пересекает плоскость α в точке $А_1$.

Постройте точку пересечения прямой ***b*** с плоскостью β.

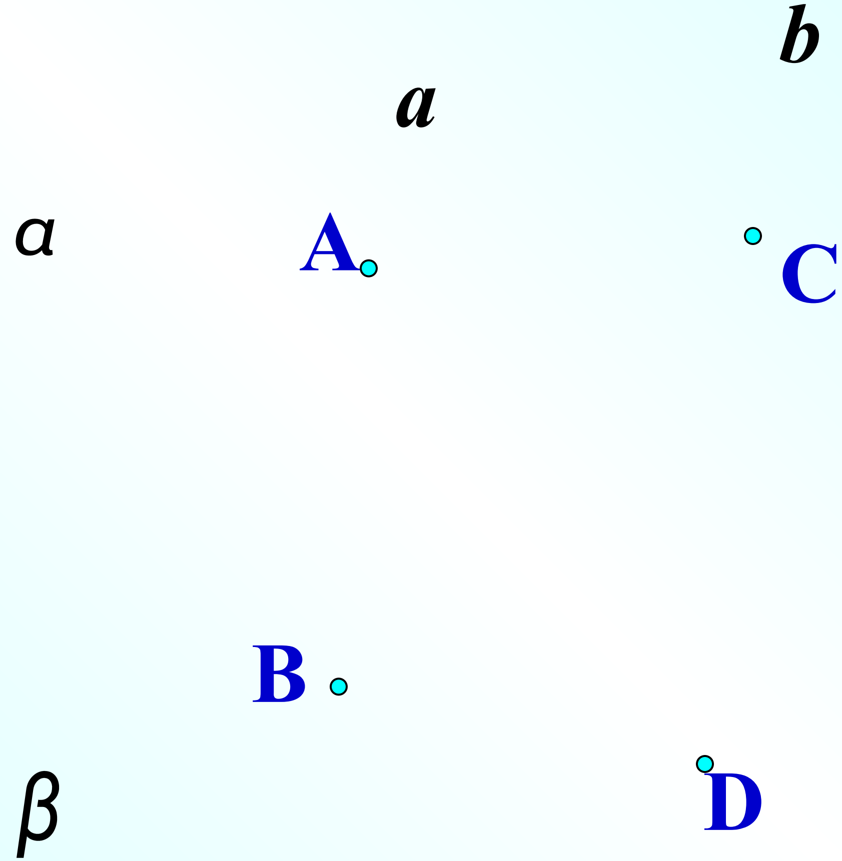
Поясните.



Плоскости α и β параллельны, $a \| a_1$. Прямая a пересекает α и β соответственно в точках А и В, а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β. Поясните.



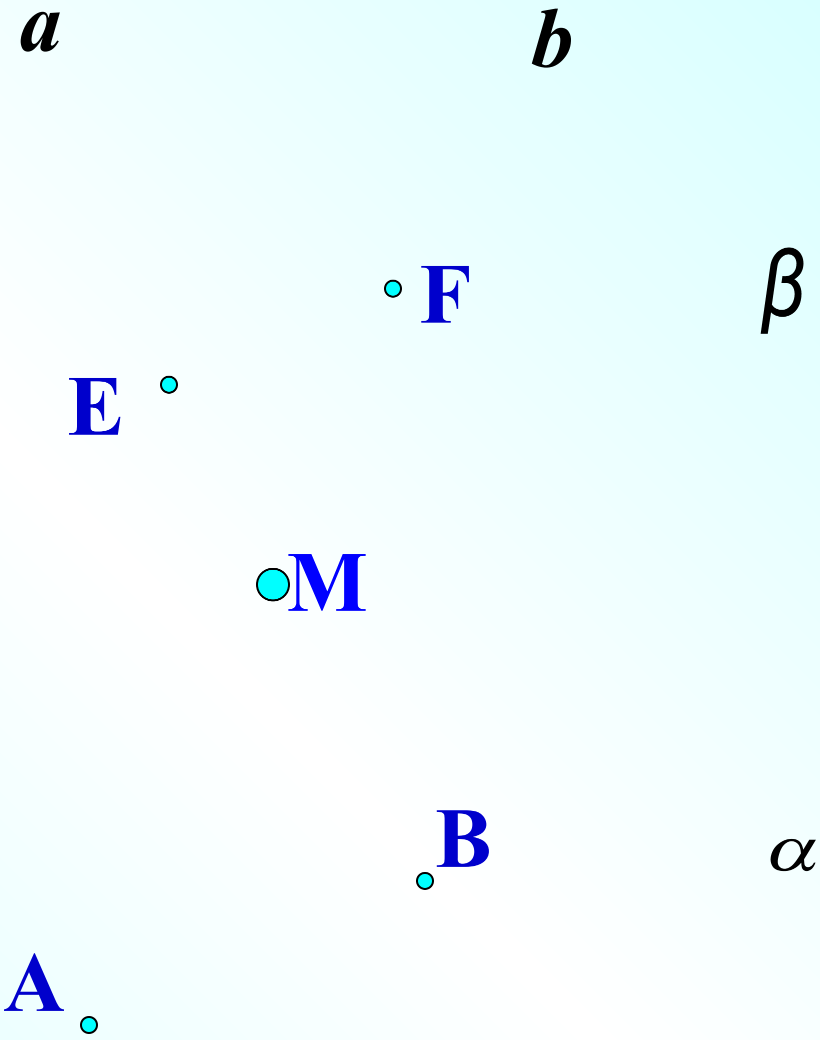
Плоскости α и β параллельны, прямая ***a*** пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая ***b*** пересекает – в точках C и D. Найдите взаимное положение прямых ***a*** и ***b***. Поясните.



Плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке М прямые ***a*** и ***b*** пересекают плоскость α соответственно в точках В и А,

в плоскость β –

в точках Е и F.

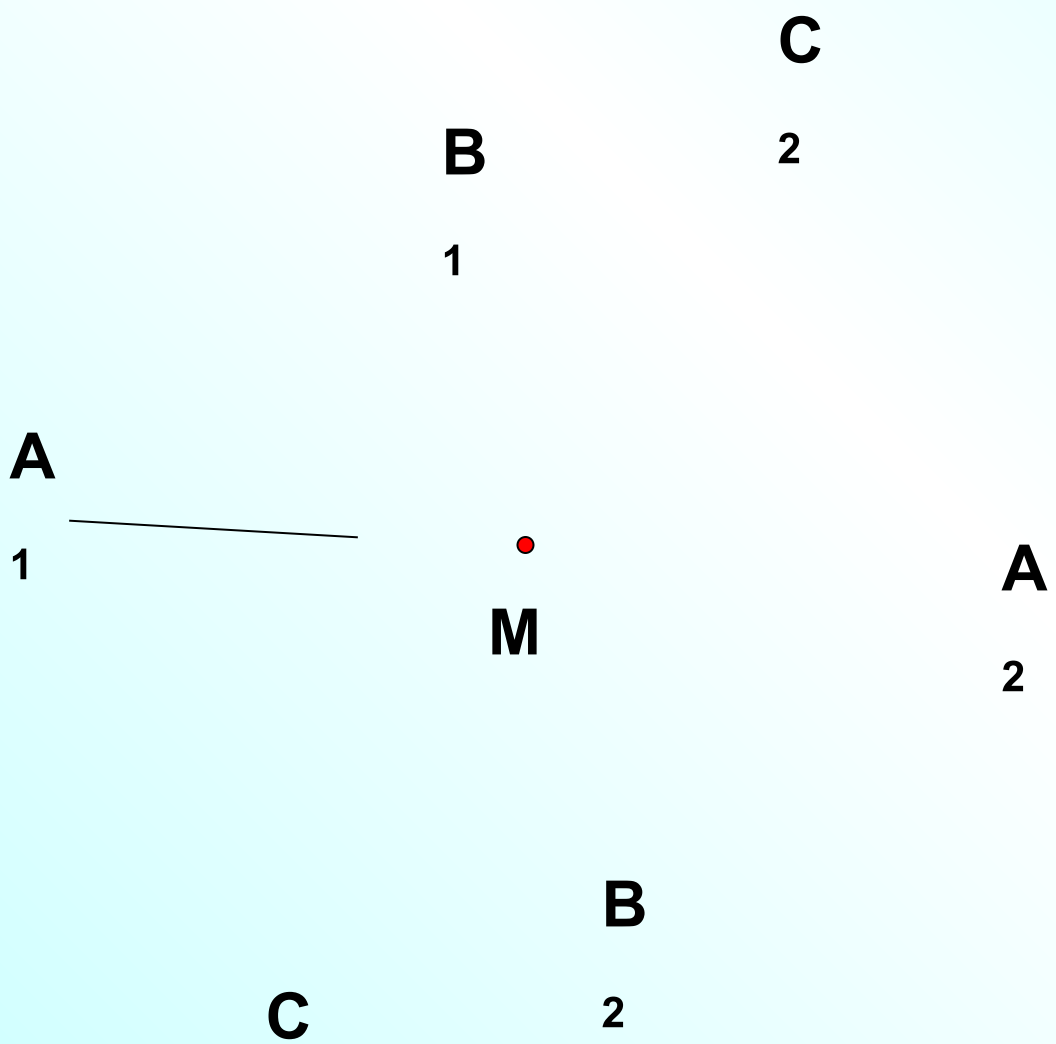


$$\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$$

Найдите отношение

$$\frac{BA}{MA}$$

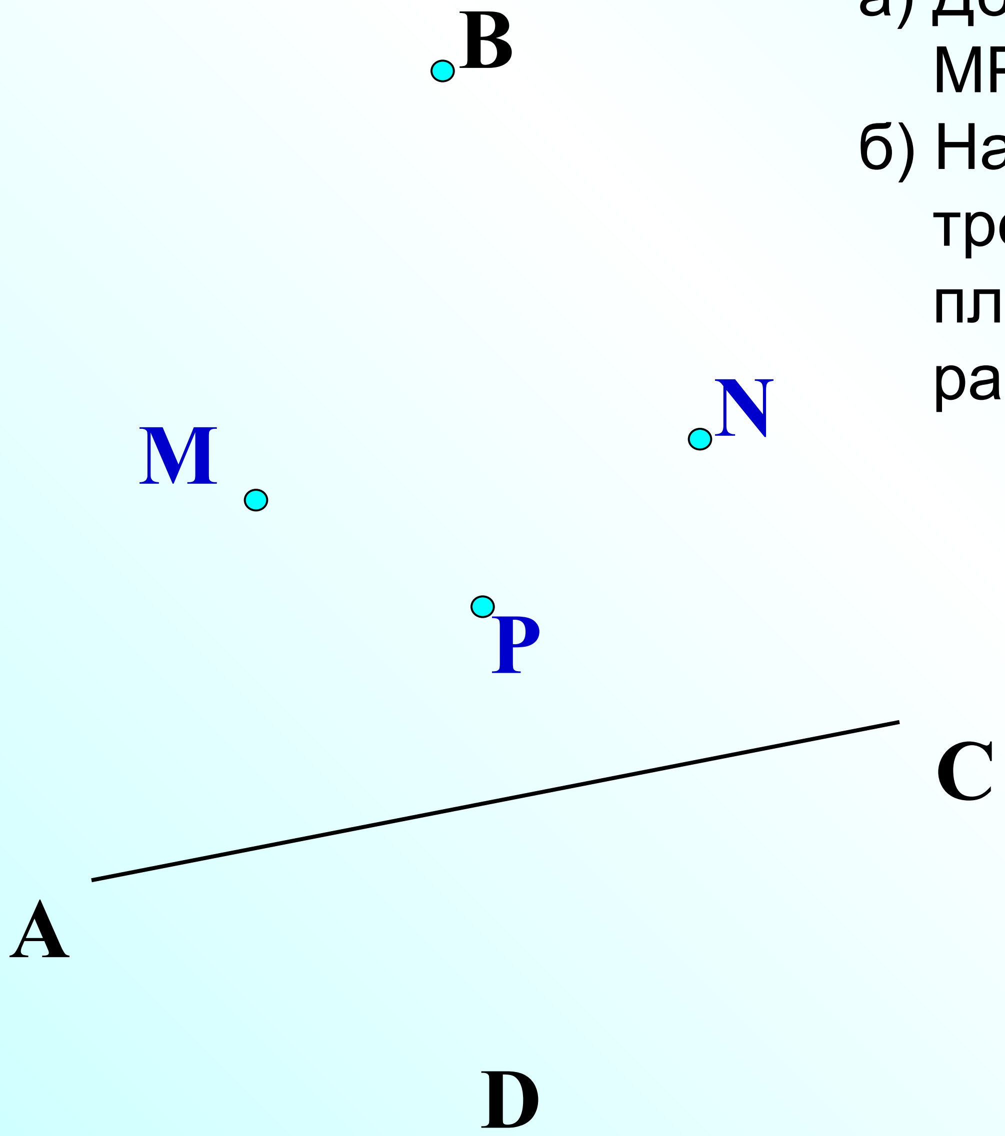
№53 Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны



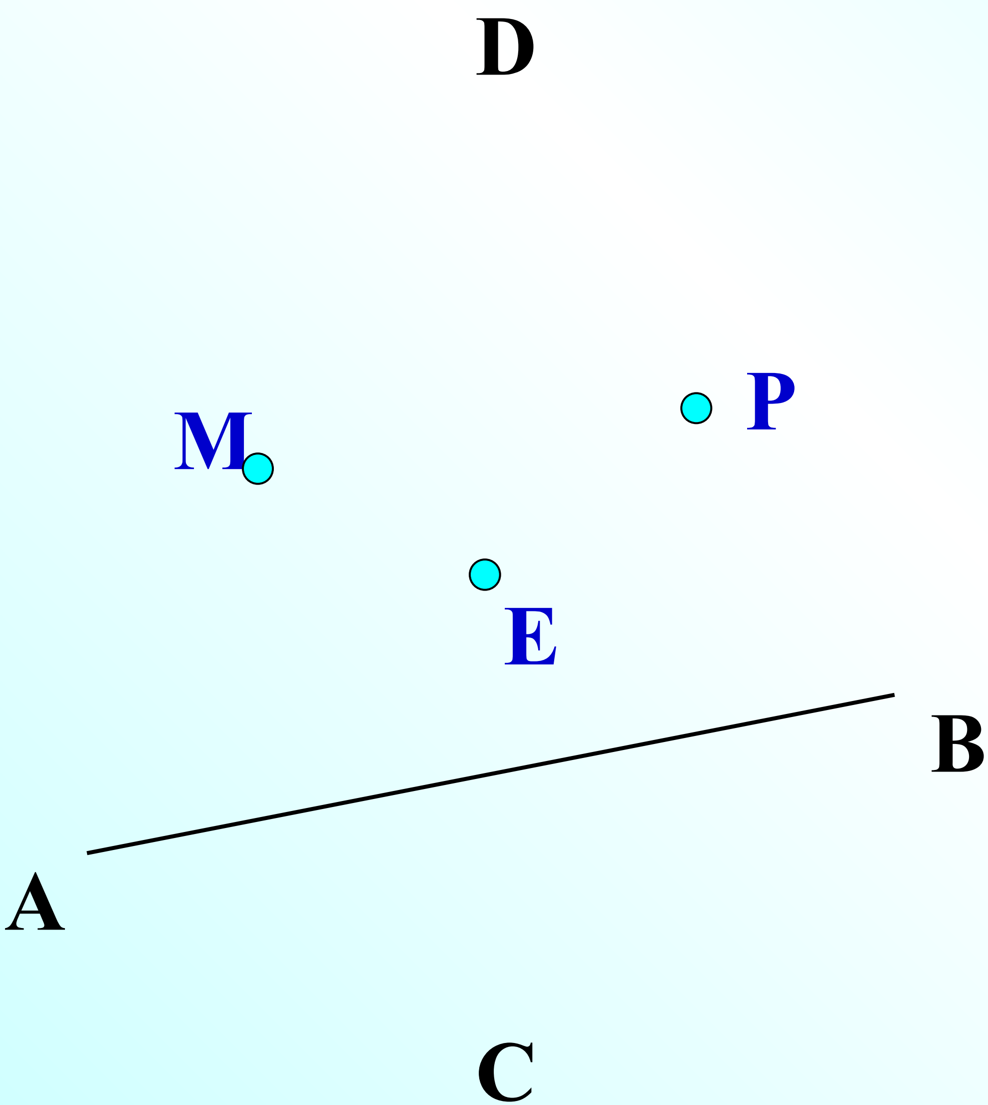
№ 54. Точка В не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, P, N – середины сторон AB, BC, BD соответственно.

а) Докажите, что плоскости MPN и ACD параллельны.

б) Найдите площадь треугольника MPN, если площадь треугольника ACD равна 48 см^2.

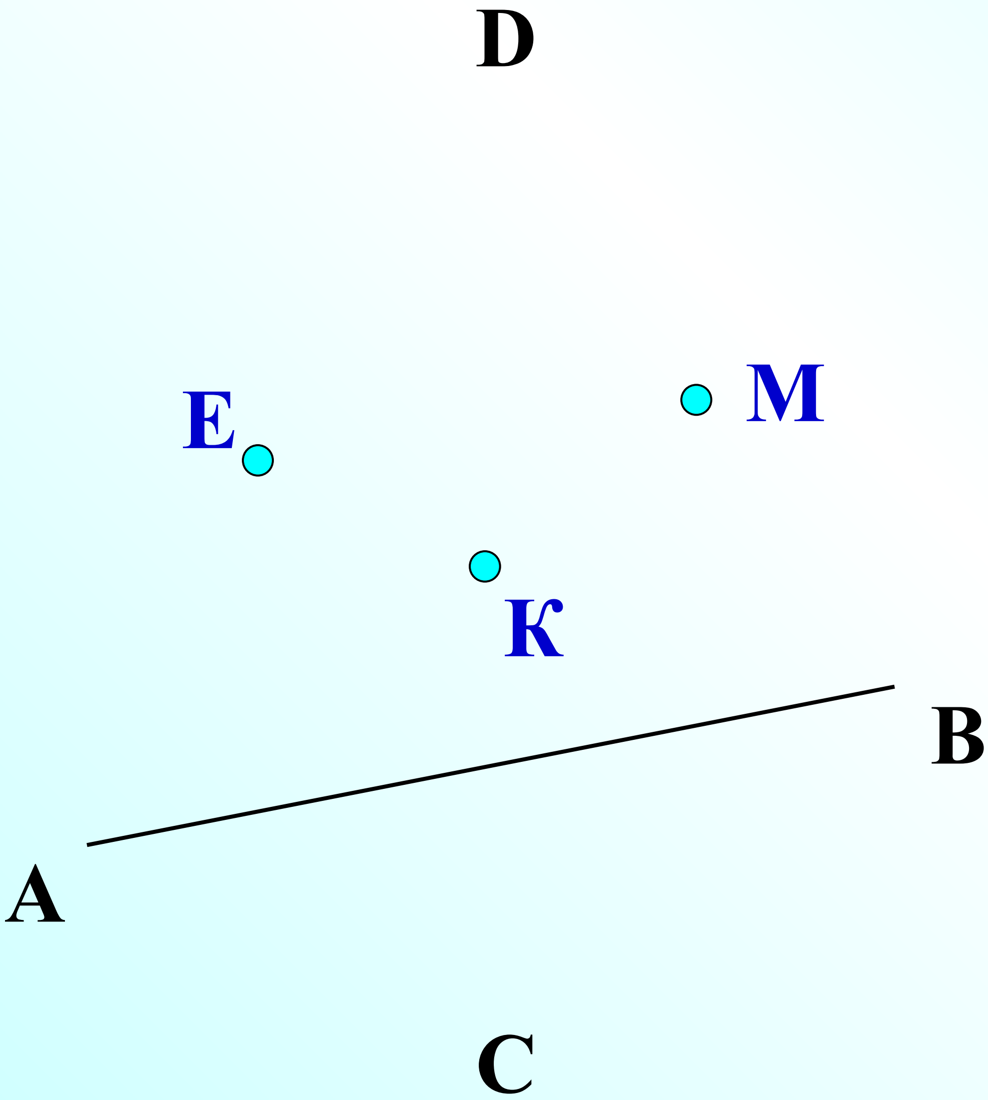


№1Дано: $\angle$ EMC = $\angle$ MCA и $\angle$ PEB = $\angle$ EBC. Докажите, что плоскости MEP и ABC параллельны.



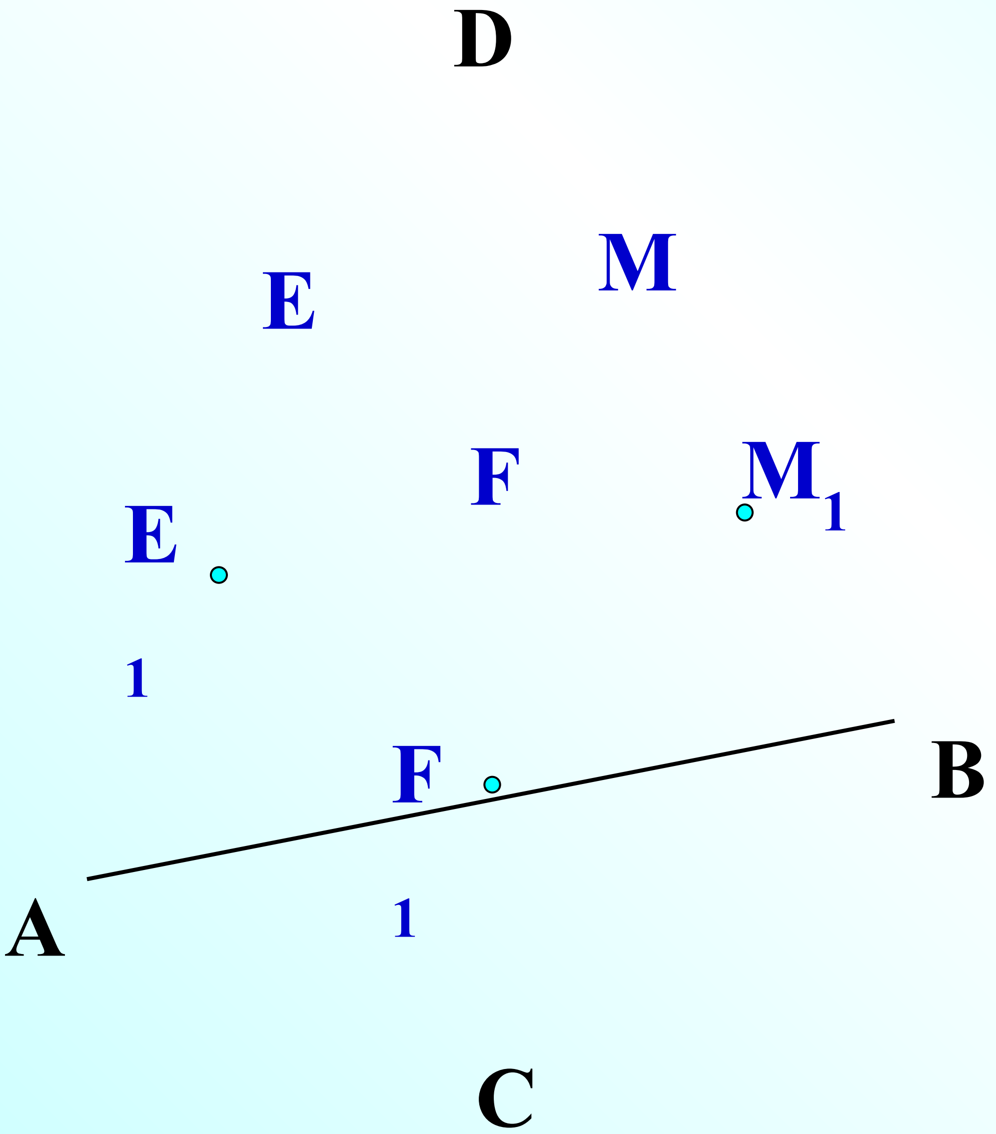
№2 Дано: $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{DK}{DC} = \dfrac{DM}{DB}$

Докажите, что плоскости ЕКМ и АВС параллельны.



№3 Дано: $EF \parallel E_1F_1$, $EM \parallel E_1M_1$.

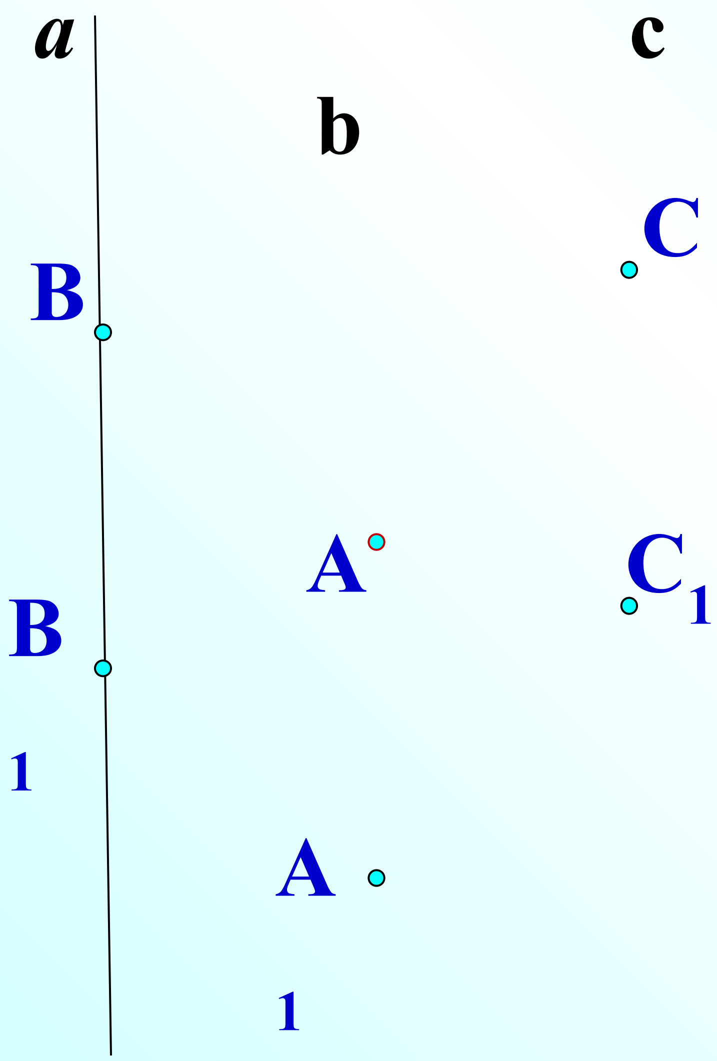
Доказать: $\angle DFM = \angle DF_1M_1$.



№4 Дано: a II b II c и не лежат в одной плоскости,

AB II A_1B_1 и BC II B_1C_1.

Доказать: AC = A_1C_1.



Домашнее задание

- П. 10 выучить теорию
- Решить задачи из презентации:№53, 54, №1,2,3,4