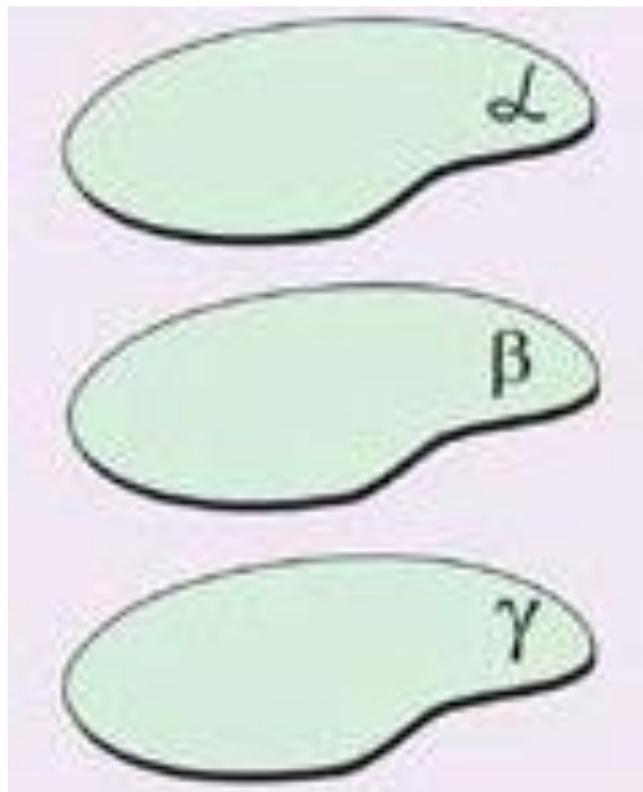


Параллельность плоскостей



Расположение плоскостей в пространстве.

α и β совпадают

$\&$

α

β

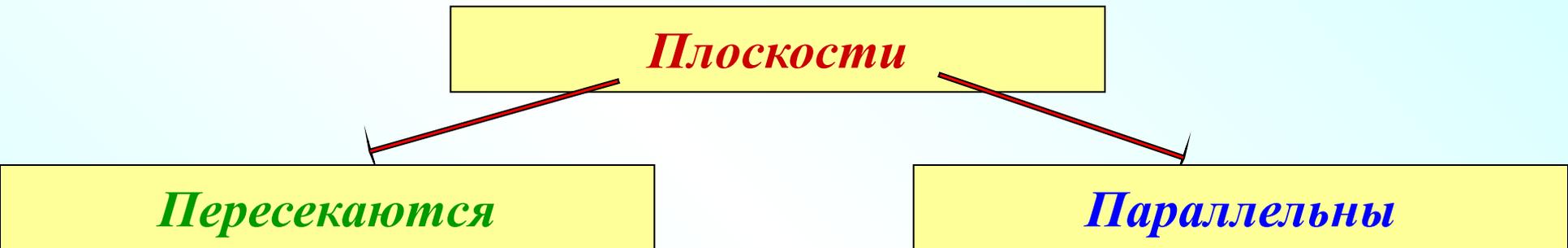
α

β

$\alpha \cap \beta$

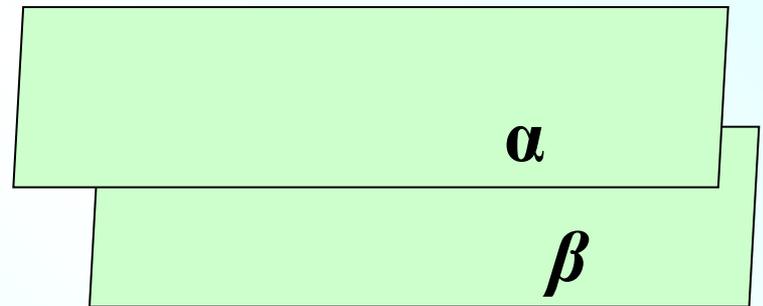
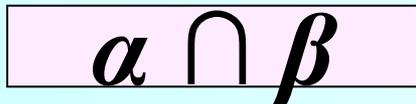
$\alpha \parallel \beta$

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

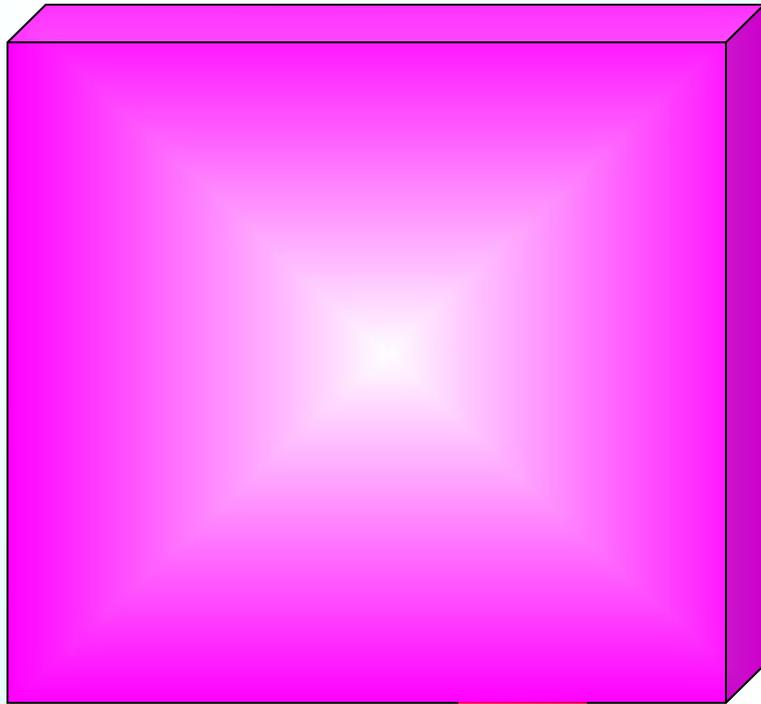


α

β







a

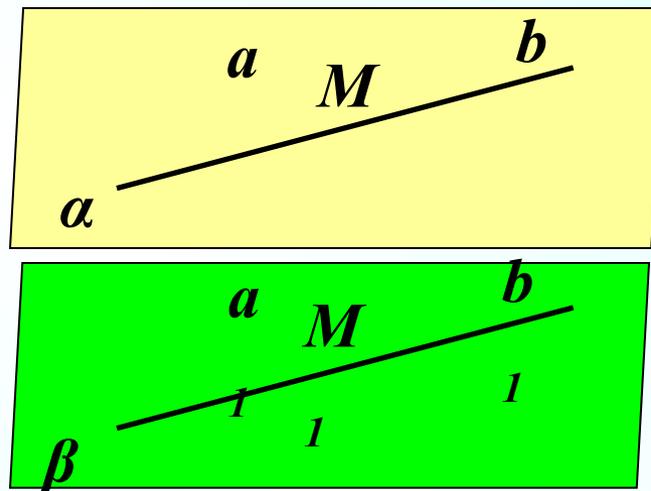
β

Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Дано:

- $a \subset \alpha; b \subset \alpha;$
 $a \cap b = M;$
- $a_1 \subset \beta; b_1 \subset \beta;$
- $a \parallel a_1; b \parallel b_1$
- Доказать,
- что $\alpha \parallel \beta$



Доказательство от противного

- $a \subset \alpha; a_1 \subset \beta; a \parallel a_1 \square a \parallel \beta$
 $v \subset \alpha; v_1 \subset \beta; v \parallel v_1 \square v \parallel \beta$

• Пусть $\alpha \cap \beta = c$

• Тогда

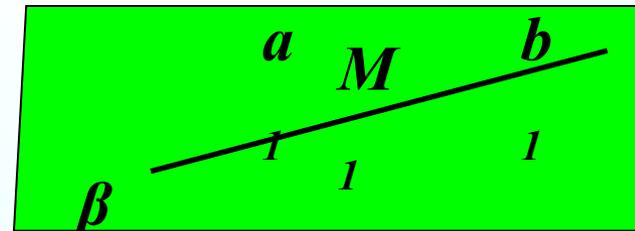
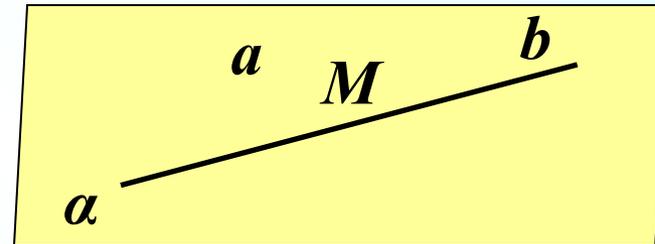
• $a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c \square a \parallel c.$

• $b \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c \square b \parallel c.$

• $a \cap b = M; a \parallel c; u \text{ в } \parallel c \square a \parallel b$

• Находим противоречие условию: через точку M проходят две прямые a и b , параллельные прямой c .

• Предположение $\alpha \cap \beta = c$ - неверно



c

Какие теоремы мы использовали при доказательстве признака?

$a \subset \alpha; a_1 \subset \beta; a \parallel a_1 \square a \parallel \beta; v \subset \alpha;$ $v_1 \subset \beta; v \parallel v_1 \square v \parallel \beta$	<i>Признак параллельности прямой и плоскости</i>
<i>Пусть $\alpha \cap \beta = c$</i>	<i>Делаем предположение, противное заключению</i>
<i>Тогда</i> $a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c \square a \parallel c.$ $b \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c \square b \parallel c.$	<i>Теорема о линии пересечения плоскостей</i>
$a \cap v = M; a \parallel c; u \in v \parallel c \square a \parallel b$	<i>Теорема о параллельности трех прямых в пространстве</i>
<i>Находим противоречие условию: через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c.</i>	<i>Теорема о параллельных прямых</i>
<i>Предположение</i> $\alpha \cap \beta = c$ - неверно	<i>Делаем вывод, $\alpha \parallel \beta$</i>

Задача № 51.

(еще один признак параллельности)

Дано: $m \cap n = K$, $m \in \alpha$, $n \in \alpha$,
 $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$.

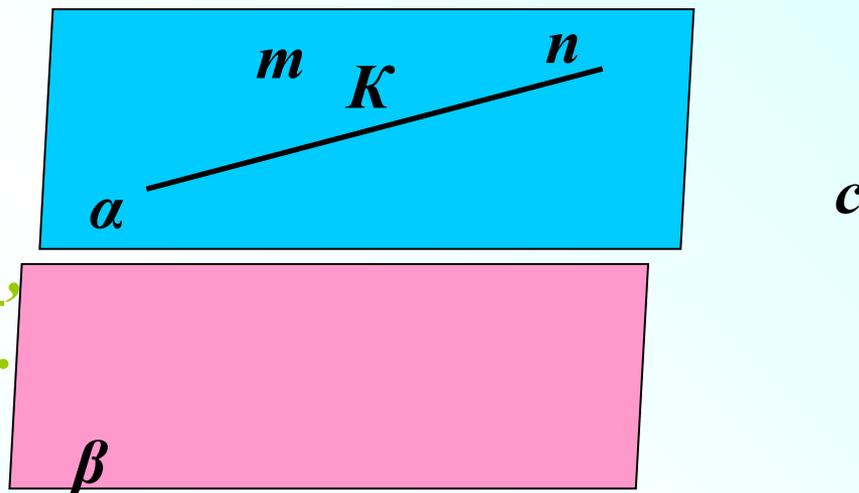
Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

1) Допустим, что $\alpha \cap \beta = c$

2) Так как $n \parallel \beta$, $m \parallel \beta$,
то $m \parallel c$ и $n \parallel c$.

Получаем, что
через точку K проходят две прямые параллельные прямой c .

Вывод: $\alpha \parallel \beta$



Задача № 53. Дано: отрезки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 не лежат в одной плоскости и имеют общую середину - точку O .

Доказать: $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.

Доказательство:

A_1A_2 и B_1B_2 лежат в одной плоскости по следствию из A_1 (через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна).

$A_1B_1A_2B_2$ - параллелограмм (диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам).

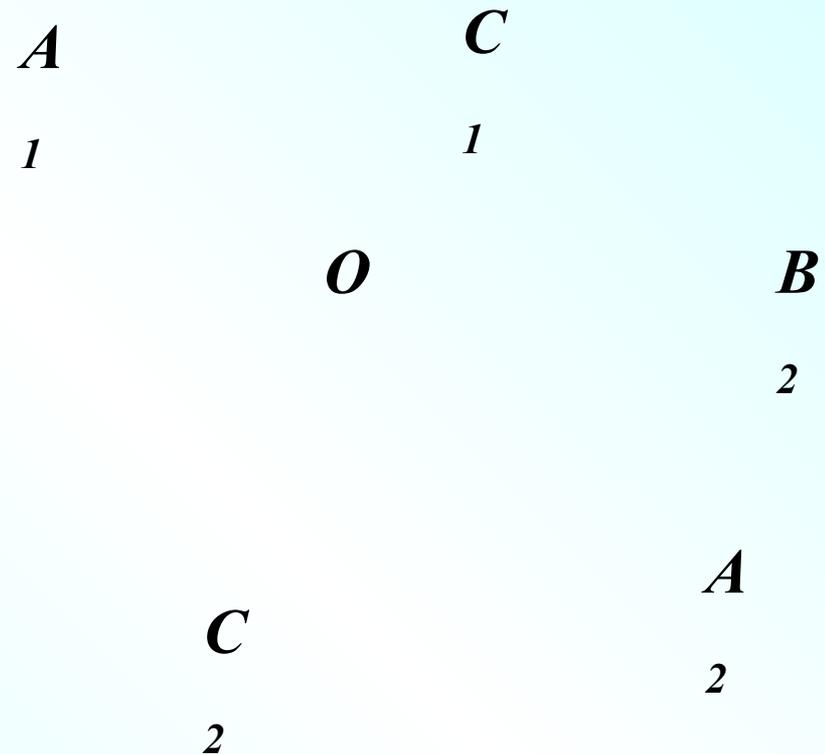
Следовательно, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$

Аналогично A_1A_2 и C_1C_2 лежат в B одной плоскости. $A_1C_1A_2C_2$ - параллелограмм.

Отсюда, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$

$A_1B_1 \cap A_1C_1 = A_1$; $A_2B_2 \cap A_2C_2 = A_2$.

По признаку параллельности плоскостей $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.



Отвечаем на вопросы

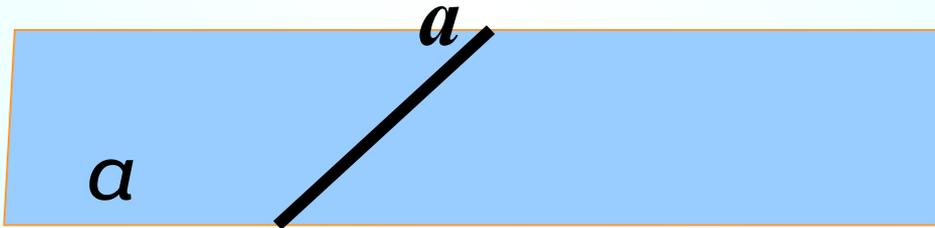
1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m не лежит в плоскости α . Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β ?
4. Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая a имеет одну общую точку?
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α . Верно ли, что плоскость трапеции параллельна плоскости α ?
6. Две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти стороны быть боковыми сторонами трапеции?
7. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?
8. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей?
9. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости?
10. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α , то и третья сторона параллельна плоскости α ?

Проверяем свою работу

1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек? **Да**
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны? **Нет**
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m не лежит в плоскости α . Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β ? **Да**
4. Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая a имеет одну общую точку? **Нет**
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α . Верно ли, что плоскость трапеции параллельна плоскости α ? **Да**
6. Две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти стороны быть боковыми сторонами трапеции? **Нет**
7. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? **Нет**
8. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей? **Нет**
9. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости? **Нет**
10. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α , то и третья сторона параллельна плоскости α ? **Да**

Свойства параллельных плоскостей.

*Если две параллельные плоскости
пересечены третьей, то линии их пересечения
параллельны.*



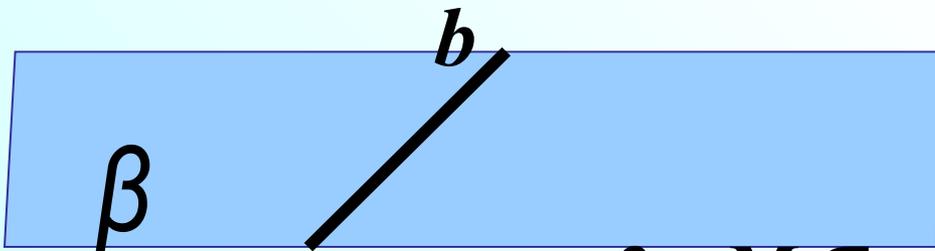
Дано:

$$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a$$

$$\beta \cap \gamma = b$$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:



1. $a \subset \gamma, b \subset \gamma$

2. Пусть $a \parallel b$,

тогда $a \cap b = M$

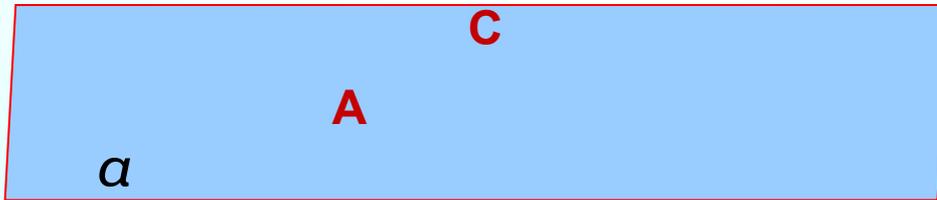
3. $M \in \alpha, M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c (A_2)$

Получили противоречие с условием.

Υ

Значит $a \parallel b$ ч. т. д.

**Свойства параллельных плоскостей.
Отрезки параллельных прямых,
заключенные между параллельными
плоскостями, равны.**



Дано:

$$\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD$$

$$AB \cap \alpha = A, AB \cap \beta = B,$$

$$CD \cap \alpha = C, CD \cap \beta = D$$

Доказать: $AB = CD$

Доказательство:

1. Через $AB \parallel CD$ проведем γ

$$2. \alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$$

$$3. \Rightarrow AC \parallel BD,$$

4. $AB \parallel CD$ (как отрезки парал. прямых)

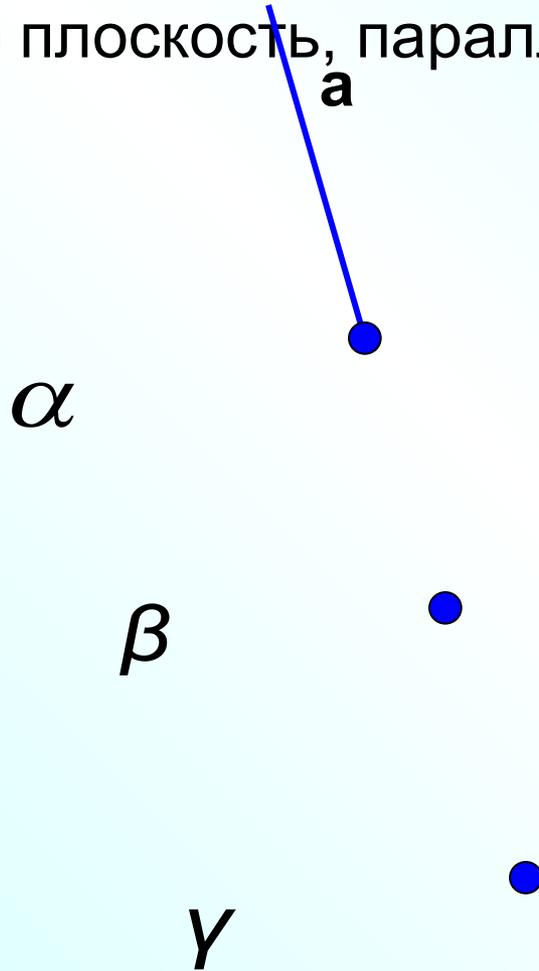
5. $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (по опр.)

$\Rightarrow AB = CD$ (по свойству параллелограмма)

γ

№55 (еще одно свойство)

Если прямая a пересекает плоскость α , то она пересекает также любую плоскость, параллельную данной плоскости α .



Решение задачи № 58. (еще одно свойство)

Если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей β и α , то она пересекает и другую плоскость.

Дано:

$\alpha \parallel \beta$, α пересекается с γ (рис)

Доказать: β пересекается с γ

Доказательство:

Пусть γ пересекает α по прямой a .

Проведем в плоскости γ прямую b , пересекающую a .

Прямая b пересекает α , поэтому она пересекает параллельную ей плоскость β (задача № 55).

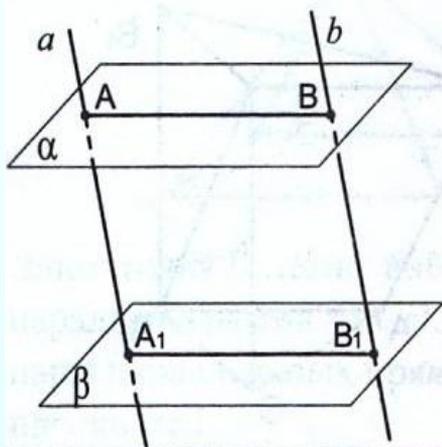
Следовательно, и плоскость γ , в которой лежит прямая b , пересекает плоскость β .

γ

Решите задачи и проверитъ.

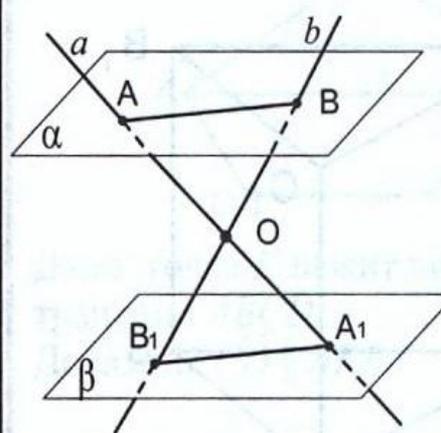
Плоскости α и β параллельны.

1



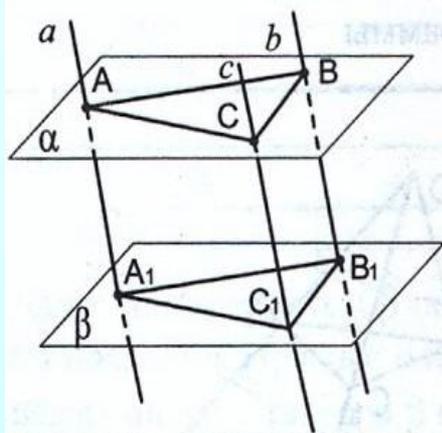
Дано:
 $a \parallel b$.
 Доказать:
 $AB = A_1B_1$

2



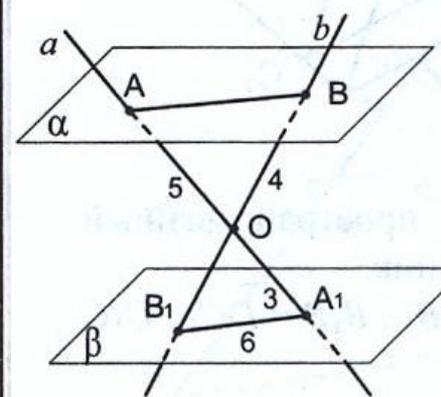
Дано:
 прямые a и b пересекаются в точке O .
 Доказать:
 $AB \parallel A_1B_1$

3



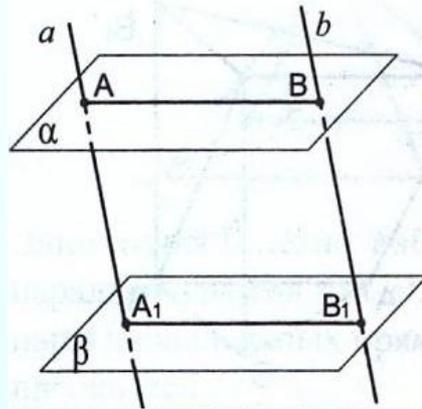
Дано:
 $a \parallel b \parallel c$.
 Доказать:
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

4



Дано: прямые a и b пересекаются в точке O .
 Найти:
 AB и OB_1

1



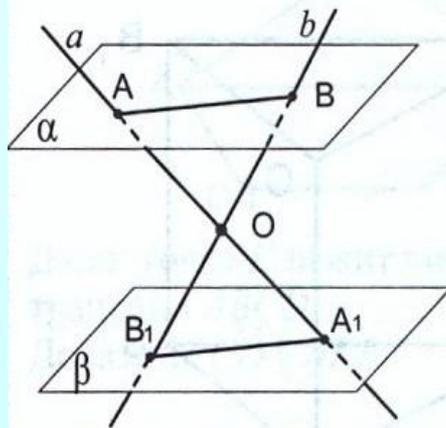
Дано:
 $a \parallel b$.
 Доказать:
 $AB = A_1B_1$

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник ABB_1A_1 : $AB \parallel A_1B_1$

(по свойству 1), $AA_1 \parallel BB_1$ ($AA_1 \in a$, $BB_1 \in b$, $a \parallel b$),
 $\Rightarrow ABB_1A_1$ – параллелограмм. В параллелограмме
 противоположные стороны равны. Значит, $AB = A_1B_1$. Ч.т.д.

2

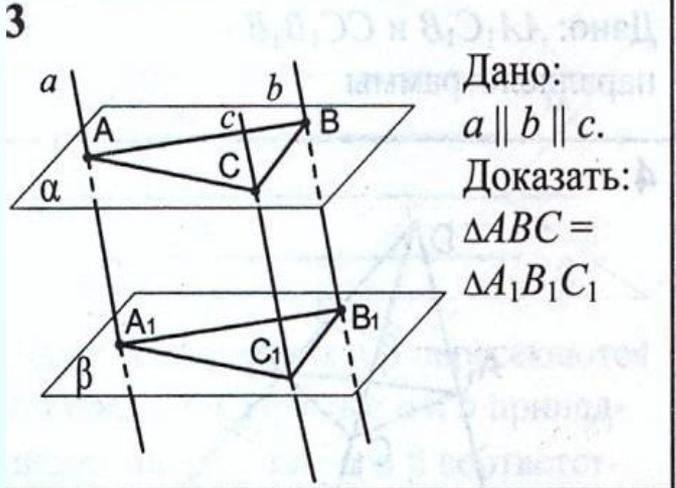


Дано:
 прямые a и
 b пересека-
 ются в
 точке O .
 Доказать:
 $AB \parallel A_1B_1$

Доказательство:

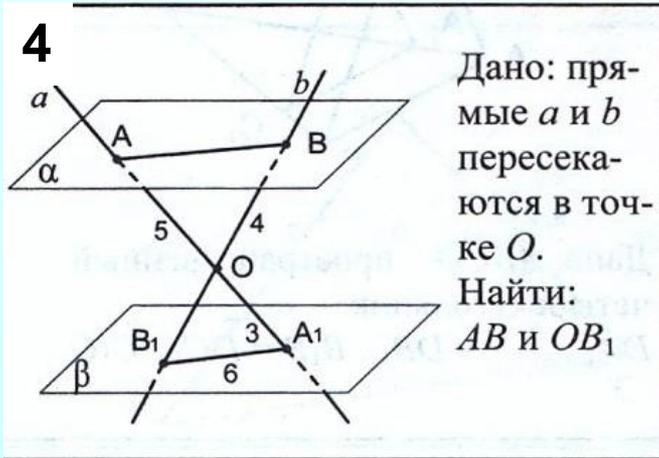
Проведем плоскость γ ч/з пересекающиеся
 прямые a и b : $\gamma \cap \alpha = AB$, $\gamma \cap \beta = A_1B_1$.

По свойству 1: $AB \parallel A_1B_1$. Ч.т.д.



Доказательство:

По свойствам 1 и 2 четырехугольники ACC_1A_1 , BCC_1B_1 , ABB_1A_1 – параллелограммы. В параллелограмме противоположные стороны равны. Значит, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $AB=A_1B_1$, тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ч.т.д.



Решение:

$AB \parallel A_1B_1$ по 1 свойству

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$: они подобны по первому признаку подобия. Из этого следует:
 $OA/OA_1 = OB/OB_1 = AB/A_1B_1$, тогда $5/3 = 4/OB_1 = AB/6$
 $\Rightarrow AB=10, OB_1=2,4$.

№60 Признак параллельности трех плоскостей

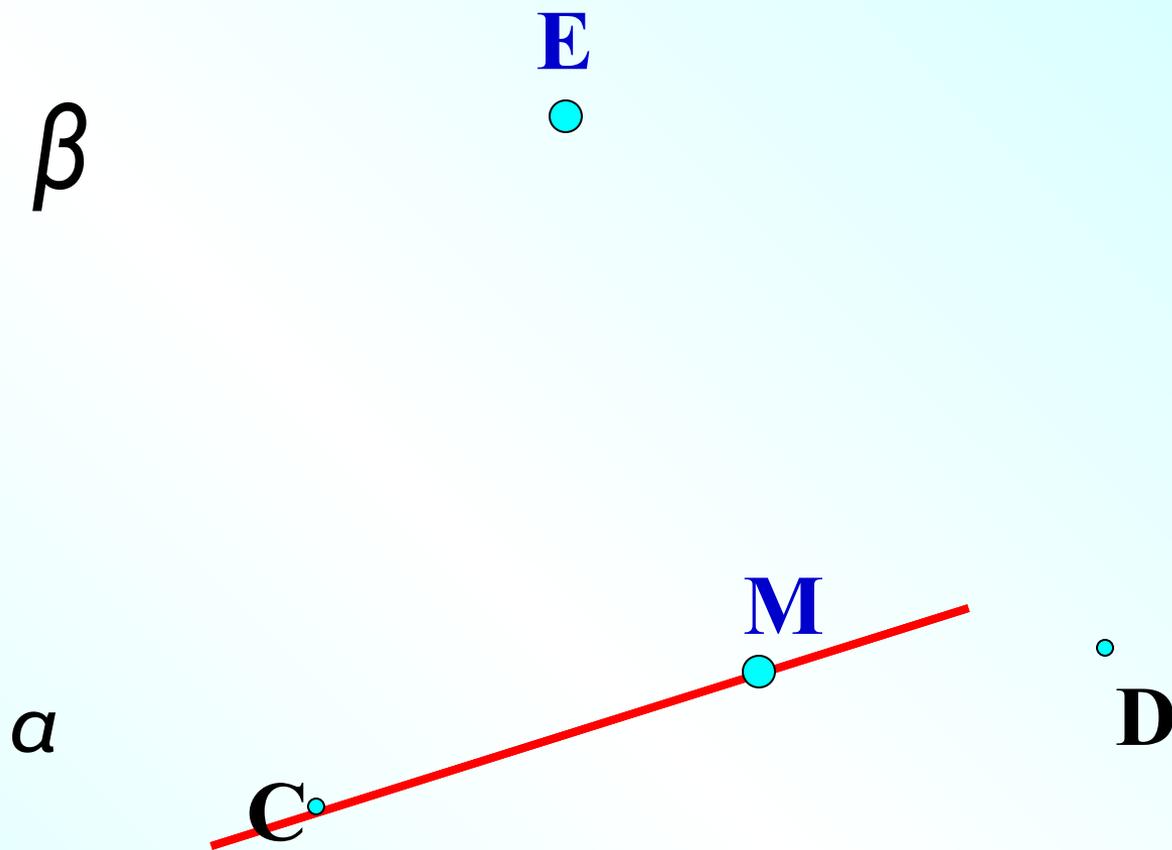
Если две плоскости α и β параллельны плоскости γ , то плоскости α и β параллельны.

β

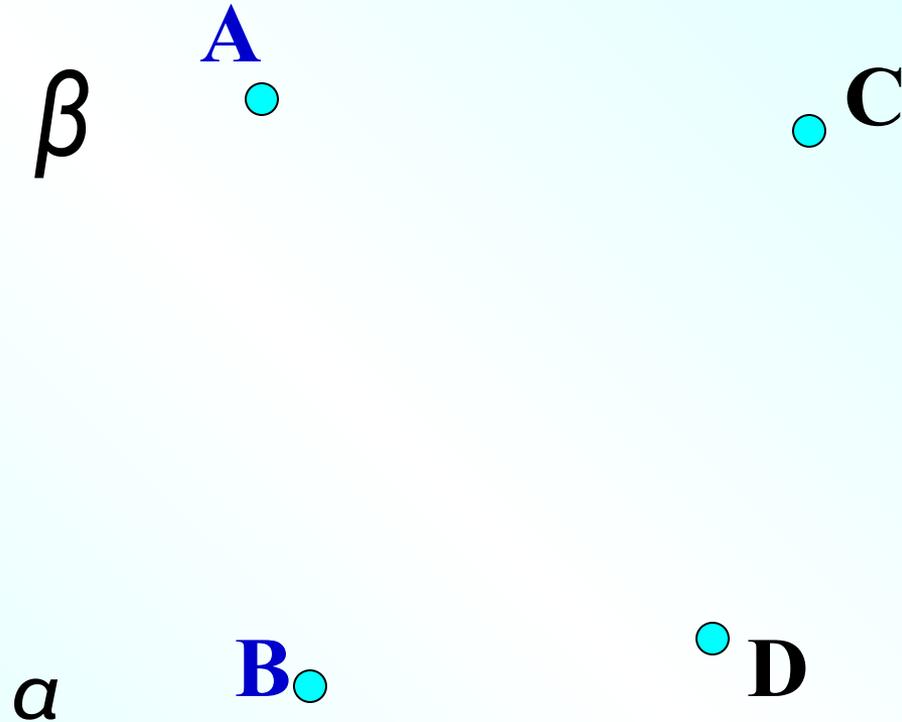
γ

α

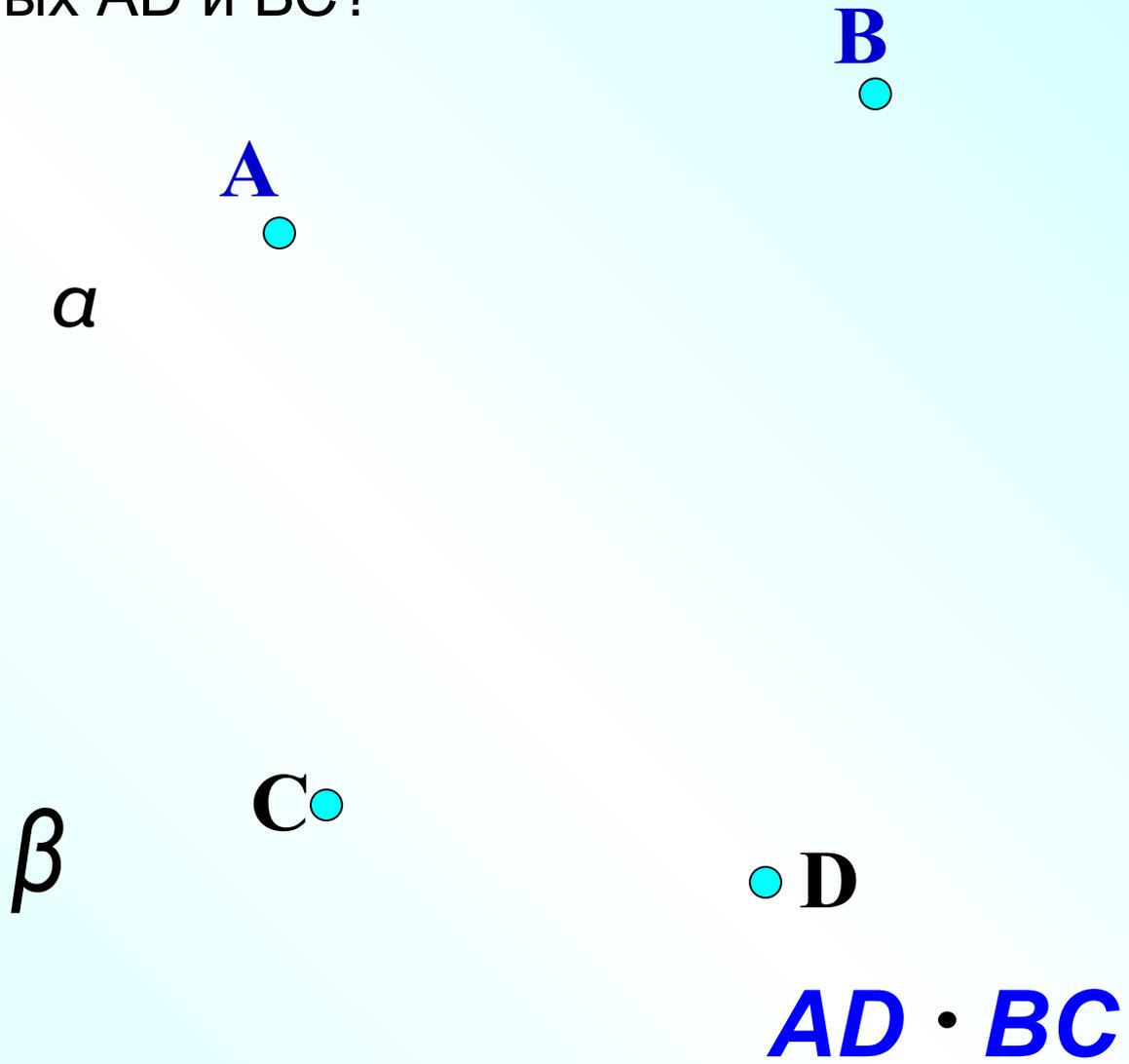
Отрезок CD лежит в плоскости α . Концы отрезка EM лежат на параллельных плоскостях α и β . Постройте линии пересечения плоскостей ECD , EMC и EMD с плоскостью β .



Концы отрезков AB и CD лежат на параллельных плоскостях α и β . Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и плоскости BDC с плоскостью β .



Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β . Что можно сказать о взаимном расположении прямых AD и BC ?



Плоскости α и β параллельны, прямые a и b пересекаются в точке M . Прямая a пересекает плоскости α и β

соответственно в точках A и B , а прямая b пересекает плоскость α в точке A_1 .

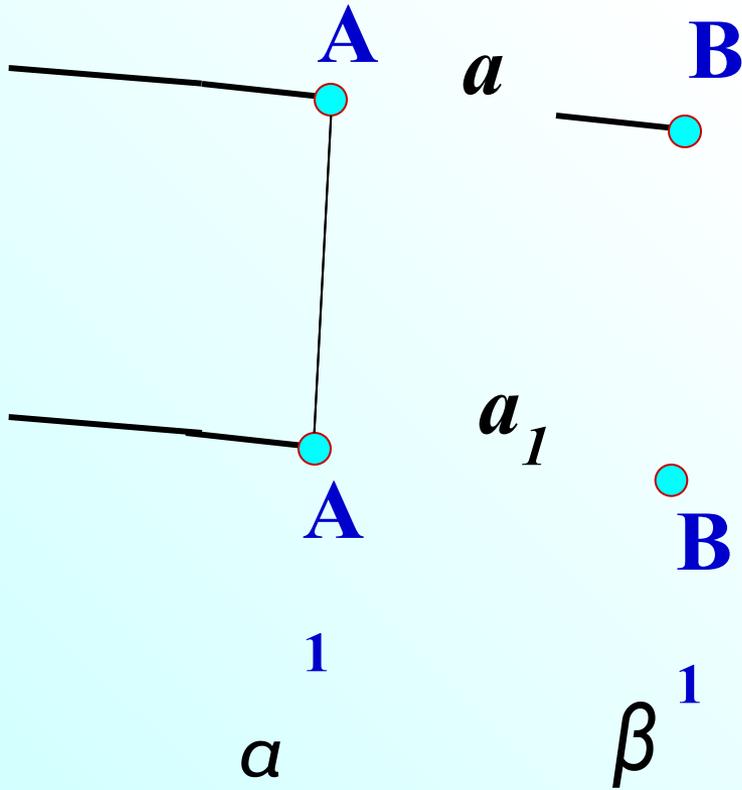
Постройте точку пересечения

прямой b с плоскостью β .

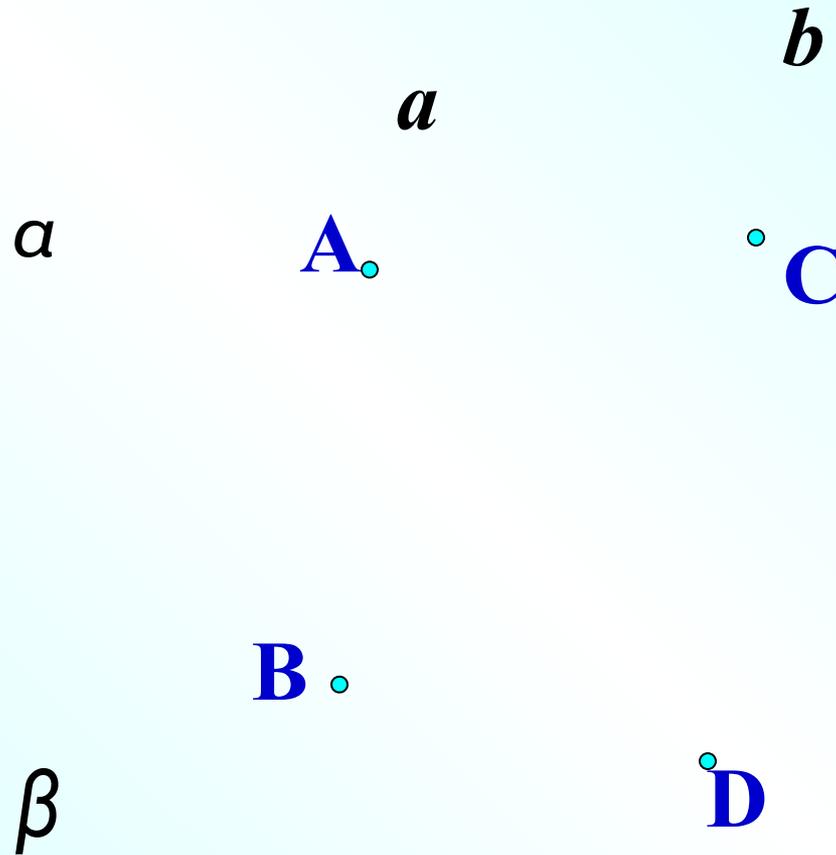
Поясните.



Плоскости α и β параллельны, $a \parallel a_1$. Прямая a пересекает α и β соответственно в точках А и В, а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1 . Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β . Поясните.



Плоскости α и β параллельны, прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B , а прямая b пересекает – в точках C и D . Найдите взаимное положение прямых a и b . Поясните.



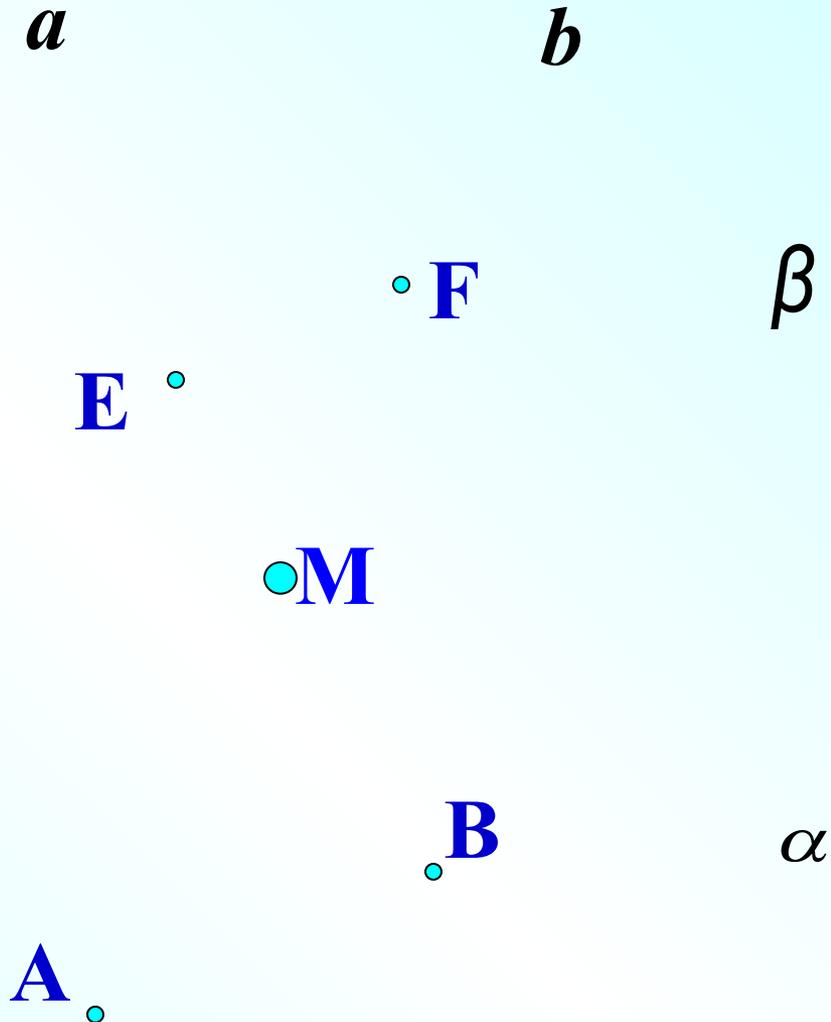
Плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке М
 прямые a и b пересекают плоскость α соответственно в
 точках В и А,

в плоскость β –
 в точках Е и F.

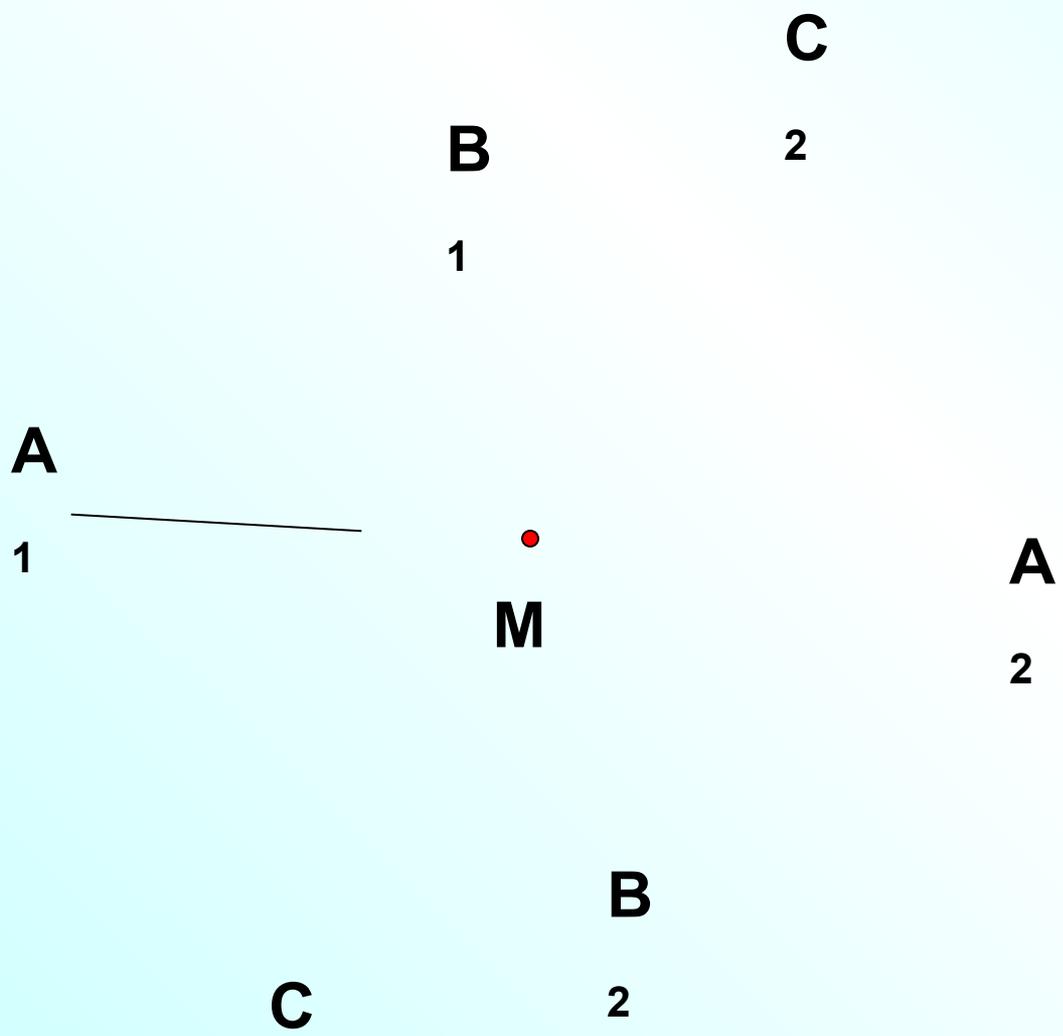
$$\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$$

Найдите отношение

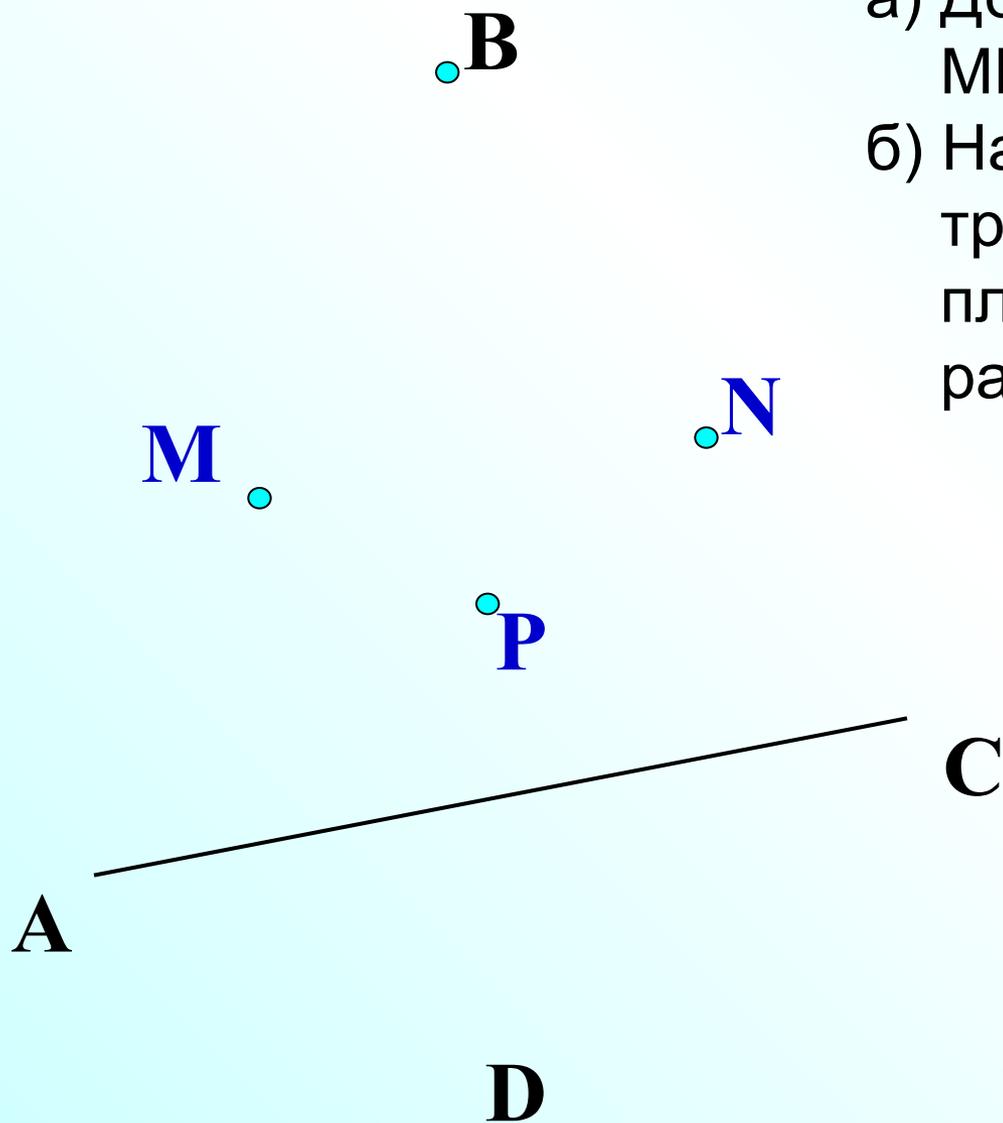
$$\frac{BA}{MA}$$



№53 Три отрезка A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 , не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны

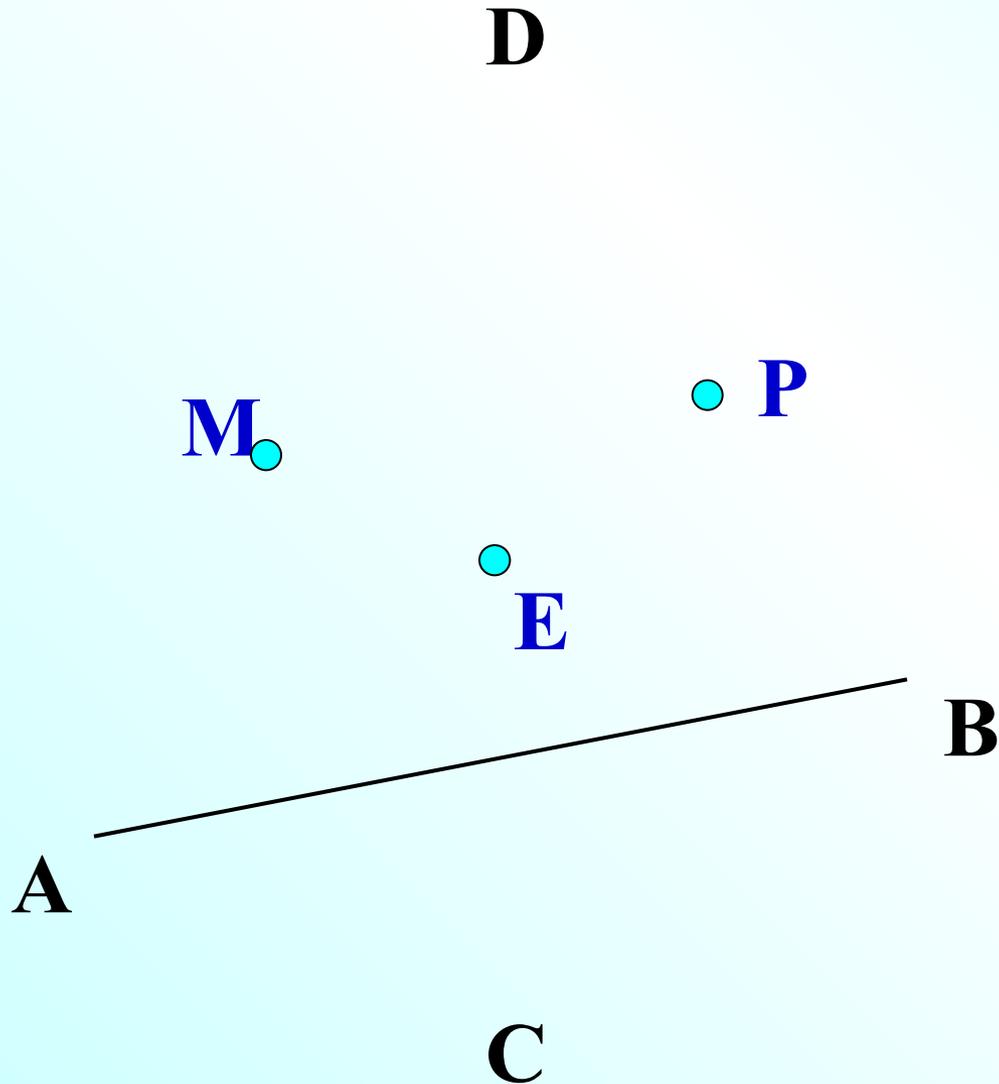


№ 54. Точка В не лежит в плоскости треугольника ADC, точки М, Р, N – середины сторон АВ, ВС, ВD соответственно.



- Докажите, что плоскости MPN и ADC параллельны.
- Найдите площадь треугольника MPN , если площадь треугольника ADC равна 48 см^2 .

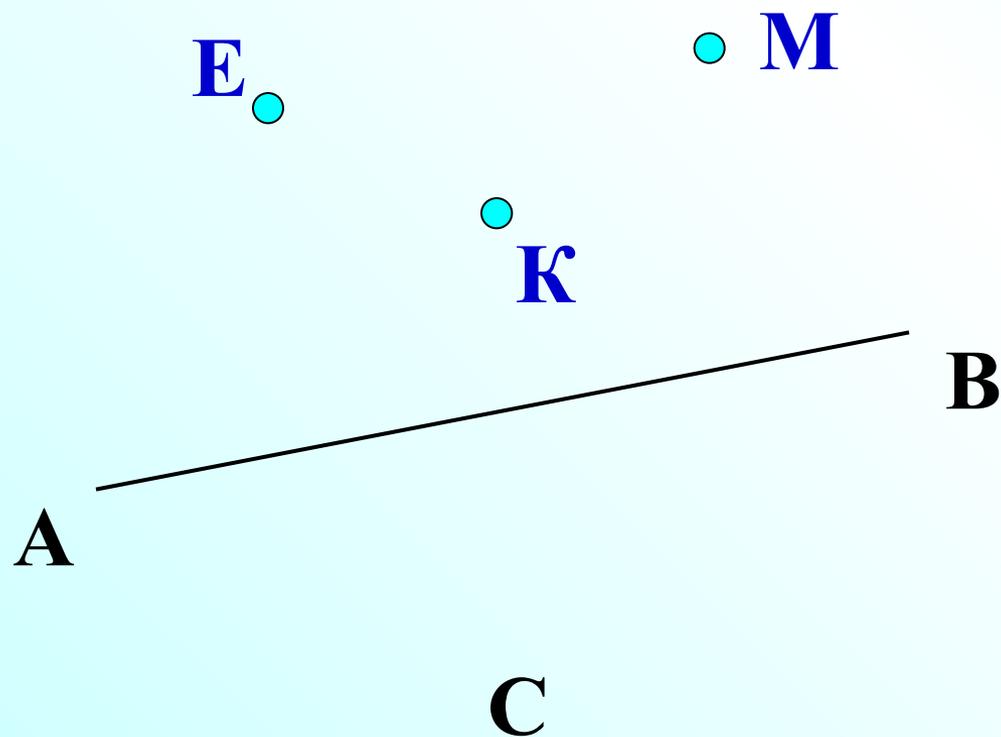
№1 Дано: \square $EMC = \square$ MCA и \square $PEB = \square$ EBC . Докажите, что плоскости MEP и ABC параллельны.



№2 Дано: $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$

Докажите, что плоскости
ЕКМ и АВС параллельны.

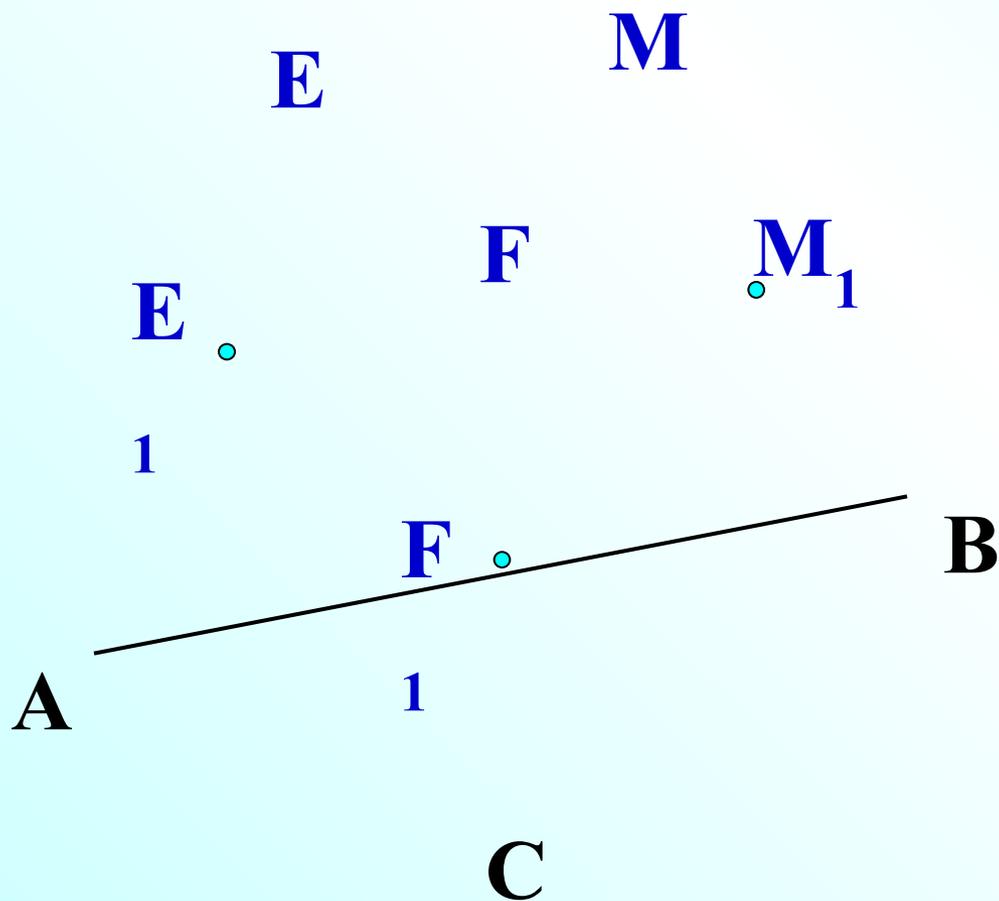
D



№3 Дано: $EF \parallel E_1F_1$, $EM \parallel E_1M_1$.

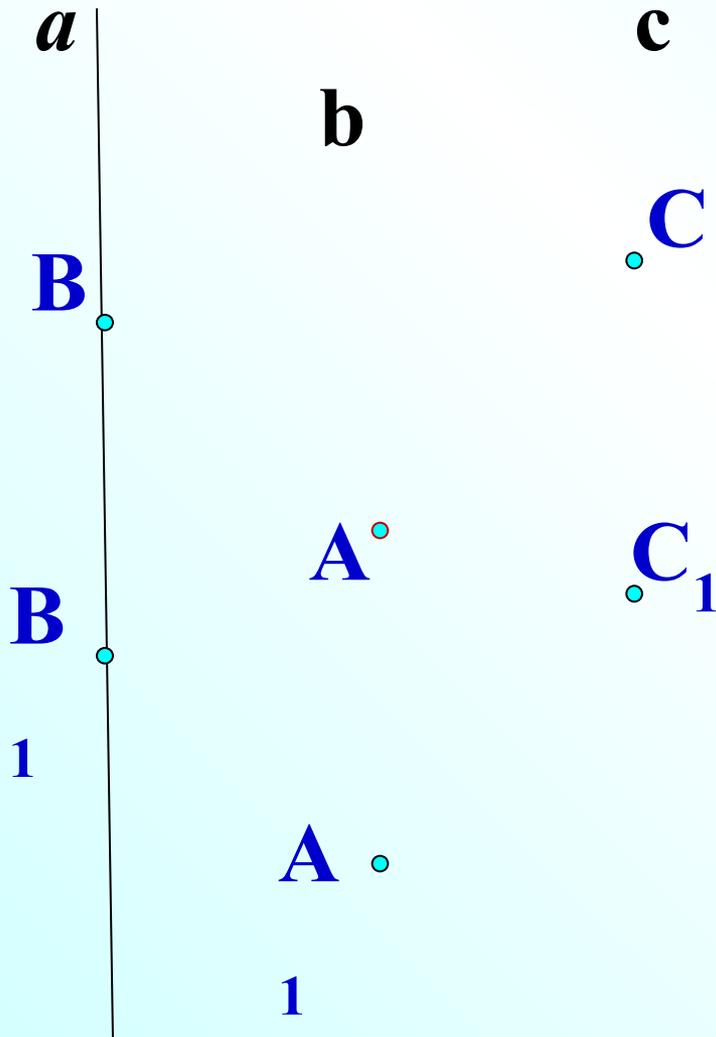
Доказать: $\sphericalangle DFM = \sphericalangle DF_1M_1$.

D



№4 Дано: $a \parallel b \parallel c$ и не лежат в одной плоскости,
 $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$.

Доказать: $AC = A_1C_1$.



Домашнее задание

- П. 10 выучить теорию
- Решить задачи из презентации: №53, 54, №1,2,3,4