Лекция 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

где E – единичная матрица

Алгоритм нахождения обратной матр

1

Определяем, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.

2

Находим определитель матрицы.

Если он равен нулю, то обратной матрицы не существует.

3

Заменяем каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением.

4

Полученную матрицу транспонируем.

5

Каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы. Получаем матрицу, обратную к данной.

6

Делаем проверку. Для этого перемножаем полученную и исходную матрицы. Должна получиться единичная матрица.

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. Матрица квадратная, следовательно обратная матрица для нее существует.

2. Находим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

3

Находим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^2 \cdot M_{22} = 2$$

Составляем из полученных значений матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 **Транспонируем ее:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 **Каждый элемент матрицы делим на определитель Δ=1 и получаем обратную матрицу:**

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

6 **Проверяем:**

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 2 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 2 & -1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \boxtimes & \boxtimes \\ -2 & \boxtimes & \boxtimes \\ 1 & \boxtimes & \boxtimes \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & & \\ -2 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Обратная матрица. Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & & \\ 1 & & 1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & & \\ -2 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & \\ -2 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Обратная матрица. Пример

Аналогично

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$