Лекция 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

где E – единичная матрица

Алгоритм нахождения обратной матр

1

Определяем, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.

2

Находим определитель матрицы.

Если он равен нулю, то обратной матрицы не существует.

3

Заменяем каждый элемент матрицы
его алгебраическим дополнением.

4

Полученную матрицу транспонируем.

5

Каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы. Получаем матрицу, обратную к данной.

6

Делаем проверку. Для этого перемножаем полученную и исходную матрицы. Должна получиться единичная матрица.

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. Матрица квадратная, следовательно обратная матрица для нее существует.

2. Находим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

3

Находим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^2 \cdot M_{22} = 2$$

Составляем из полученных значений матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Каждый элемент матрицы делим на определитель Δ=1 и получаем обратную матрицу:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

6 **Проверяем:**

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 3\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 2 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 2 & -1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Обратная матрица. Пример

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \square & \square \\ -2 & \square & \square \\ 1 & \square & \square \end{pmatrix}$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & & \\ -2 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & & \\ -2 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & \\ -2 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Обратная матрица. Пример

Аналогично

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$