Иррациональные неравенства

и способы их решения

Занятие №1.

Цель: Рассмотреть неравенства вида:

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \text{ и } \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

1.Рассмотрим иррациональное неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x).$$

Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из решения неравенства $f(x) \geq 0$.

К тому же, φ **(x)>0, т.к** $\sqrt{f(x)} \geq 0$.

Поэтому данное неравенство равносильно следующей системе неравенств.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \sqrt{f(x)} < \varphi(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^2 \end{cases}$$

Пример 1.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1.$$

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1.$

Решение: ОДЗ $2x^2-3x-5\geq 0$, к тому же $x-1>0$,

Отсюда

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5\geq 0 \\ x-1>0 \\ \sqrt{2x^2-3x-5}<x-1 \end{cases} \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} 2x^2-3x-5\geq 0 \\ x-1>0 \\ 2x^2-3x-5<(x-1)^2 \end{cases}$$

а) $2x^2-3x-5\geq 0$

$2x^2-3x-5=0$

$x_1=-1; x_2=\dfrac{5}{2}.$

$x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{5}{2};\infty\right).$

б) $2x^2-3x-5<(x-1)^2$

$x^2-x-6<0$

$x^2-x-6=0$

$x_1=-2; x_2=3.$

$x\in(-2;3).$

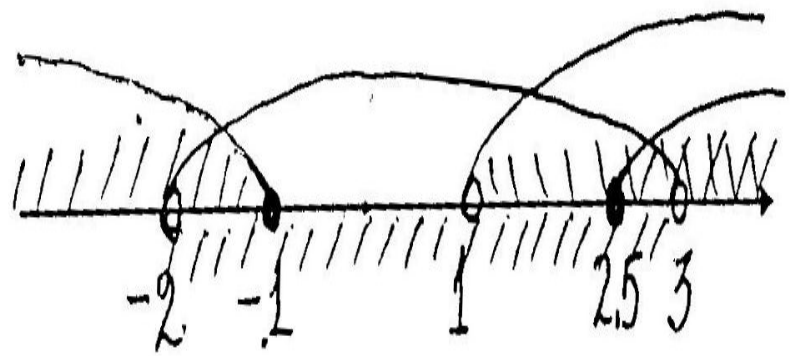
в) $x-1>0$

$x>1$

$x\in(1;\infty)$.

Тогда, решением заданного неравенства будет пересечение множеств решений системы

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right) \\ x\in(1;\infty) \\ x\in(-2;3) \end{cases}$$



Ответ: $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

2.Рассмотрим неравенство вида: $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$.

Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из условия $f(x) \geq 0$.

Но, в отличие от предыдущего, φ(x) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому в процессе решения должны рассматривать два случая: φ (x) <0 и φ(x) ≥ 0 . В первом случае данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases}$$

Но в этой системе можно опустить последнее неравенство, т.к. при φ (x)<0 оно выполняется всегда. Т.о. имеем

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}.$$

В случае же $\varphi(x) \geq 0$

Заданное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^2 \end{cases}.$$

Тогда, из последней системы видно, что первое неравенство можно опустить, т. к. из $f(x)>(\varphi(x))^2$ следует справедливость $f(x) \geq 0$

Решением неравенства будет объединение множеств решений обоих случаев.

Пример 2.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x.$$

<u>Пример 2</u>. Решить неравенство: $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x.$

Рассмотрим два случая:

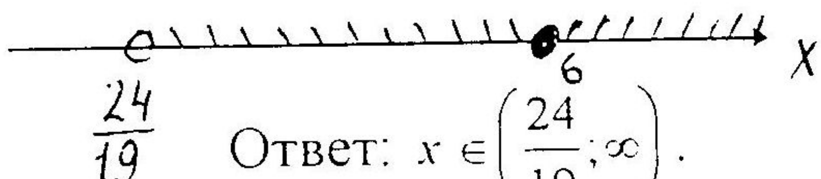
а) $\begin{cases} x^2+7x+12 \ge 0 \\ 6-x < 0 \end{cases}$ $\quad x \in (6;\infty).$

б) $\begin{cases} x^2+7x+12 \ge 0 \\ 6-x \ge 0 \\ \sqrt{x^2+7x+12} > 6-x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+7x+12 \ge 0 \\ 6-x \ge 0 \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6-x \ge 0 \\ x^2+7x+12 > 36-12x+x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 6 \\ 19x > 24 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 6 \\ x > \dfrac{24}{19} \end{cases}$

$x \in \left(\dfrac{24}{19};6\right]$

Объединим множества решений обоих случаев:



Ответ: $x \in \left(\dfrac{24}{19};\infty\right).$

Занятие №2

- **Цель: Рассмотреть неравенства вида:**

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$$

При решении иррациональных неравенств используются те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых переменных и т.д. Однако при решении иррациональных неравенств необходимо следить за тем, чтобы выполняемые преобразования приводили к равносильному неравенству.

1.Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$

равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > f(x) \end{cases}$$

2.Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$

равносильно неравенству f(x) <q(x).

Пример 3.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$

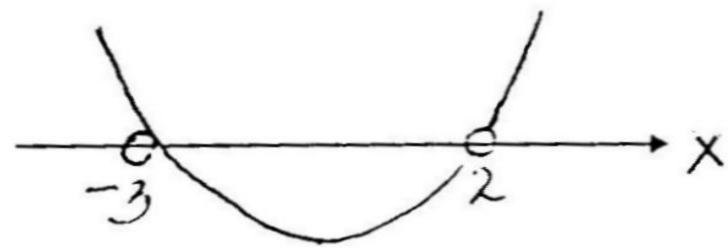
Пример 3.Решить неравенство:

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$

Имеем: $\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \leq 8 \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$; $\begin{cases} |x| \leq 2\sqrt{2} \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$.

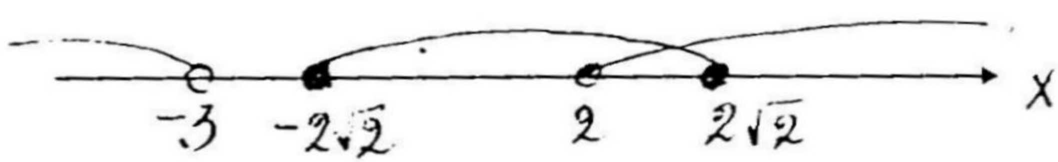
$x^2+x-6>0$

$x_1=-3; x_2=2$



$x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty)$

Таким образом:



Ответ: $\left(2;2\sqrt{2}\right]$.

Пример 4.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}.$$

Пример4.Решить неравенство: $\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$.

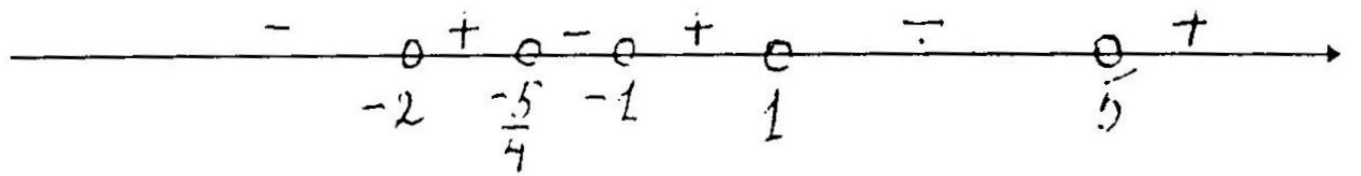
Имеем: $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1}$

$$\frac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0,$$

$$\frac{\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0.$$

а) нули числителя: $-\frac{5}{4}$;5.

б) нули знаменателя: -1; -2; 1.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(1;5)$.

Занятие №3.

- Цель: Рассмотреть решения неравенств методом интервалов.
- При решении иррациональных неравенств методом интервалов надо всегда помнить, что нули функций рассматриваются только входящие в ОДЗ.

Пример 5. Решим иррациональное неравенство методом интервалов :

$$\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$$

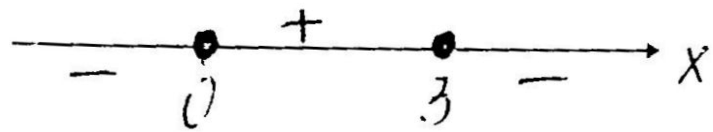
$$\sqrt{3x-x^2} - 4 + x < 0$$

$$f(x) = \sqrt{3x-x^2} - 4 + x$$

ОДЗ $\quad 3x - x^2 \geq 0$

$$x(3-x) \geq 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3.$$



$$D(f) = [0;3]$$

$f(x) = 0, \quad \sqrt{3x-x^2} = 4-x$

$$3x - x^2 = 16 - 8x + x^2$$

$2x^2 - 11x + 16 = 0; \quad D = 121 - 128 = -7 < 0$ - нет решения.

$$f(1) = \sqrt{2} - 3 < 0$$

Ответ: $[0;3]$.

Занятие №4.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств введением новой переменной

Пример 6. Решим неравенство введением новой переменной

$$\sqrt{x+5-4\cdot\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\cdot\sqrt{x+1}}-1>0$$

Пусть $\sqrt{x+1}=t$, тогда $x+1=t^2$

$x=t^2-1$

$$\sqrt{t^2-1+5-4\cdot t}+\sqrt{t^2-1+10-6t}-1>0$$

$$\sqrt{t^2-4\cdot t+4}+\sqrt{t^2-6\cdot t+9}-1>0$$

$$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}-1>0$$

$$|t-2|+|t-3|-1>0$$

	$t<2$	2	$2<t<3$	3	$t>3$
$\lvert t-2\rvert$	$-$		$+$		$+$
$\lvert t-3\rvert$	$-$		$-$		$+$

$t<2,\ -t+2-t+3-1>0,\ -2\cdot t>-4,\ t<2$

$2\le t\le 3,\ t-2-t+3-1>0,\ 0\cdot t>0$ ложно

$t>3,\ t-2+t-3-1>0,\ 2\cdot t>6,\ t>3$

1 случай

$t<2$

$\sqrt{x+1}<2$

$0\le x+1<4$

$0-1\le x<4-1$

$-1\le x<3$

2 случай

$t>3$

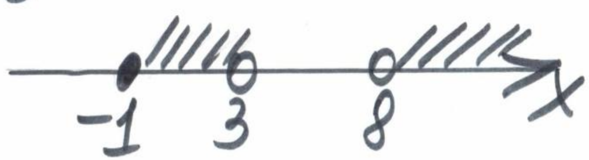
$\sqrt{x+1}>3$

$(\sqrt{x+1})^2>3^2$

$x+1>9$

$x>9-1$

$x>8$



Ответ: $[-1;\ 3)\cup(8;\ +\infty)$

Занятие №5.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств методом замены множителя .

$$(\sqrt{f}-\sqrt{g})\cdot h \vee 0 \Leftrightarrow (f-g)\cdot h \vee 0$$

при $g=0$, $\sqrt{f}\cdot h \vee 0$

$$(\sqrt{f}-\sqrt{0})\cdot h \vee 0$$

$$f\cdot h \vee 0$$

О.Д.З.

$$\begin{cases} f \geqslant 0 \\ g \geqslant 0 \end{cases}$$

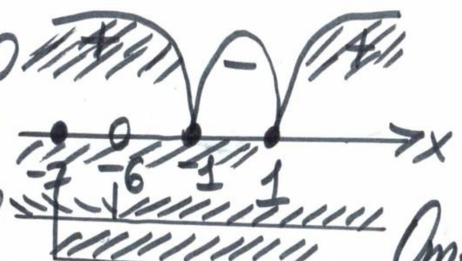
Пример №7. Решим неравенство методом замены множителя

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0;\qquad \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4\cdot(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}}\le 0;$$

$$\frac{x^2-1-4\cdot(1-x)}{(x+7)-1}\le 0;\qquad \frac{x^2-1-4+4x}{x+6}\le 0;$$

$$\frac{x^2+4x-5}{x+6}\le 0;\qquad \frac{(x-1)(x+5)}{x+6}\le 0$$

О.Д.З. $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ x+7\ge 0 \\ x+7\ne 1 \end{cases}$



Учитывая О.Д.З.

Ответ: $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$

Домашнее задание.

Решить неравенство:

Пример 1. $\sqrt{x-4} \leq x-6$;

Пример 2. $\sqrt{x^2+x} \geq 1-2x$;

Пример 3. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$

Пример 4. $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

Пример 5. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{5-x}$

ВЫВОДЫ:

Рассмотрели иррациональные неравенства и способы их решения.

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \text{ и } \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$$

возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень

введение новой переменной , метод интервалов , метод замены множителя .

СПАСИБО

ЗА УРОК!