Иррациональные неравенства

и способы их решения

(c) 1999 enderfect.com

Занятие №1.

Цель: Рассмотреть неравенства вида:

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

1.Рассмотрим иррациональное неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x).$$

Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из решения неравенства $f(x) \geq 0.$

К тому же, φ **(x)>0, т.к** $\sqrt{f(x)} \geq 0.$

Поэтому данное неравенство равносильно следующей системе неравенств.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \sqrt{f(x)} < \varphi(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^2 \end{cases}$$

Пример 1.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1.$$

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

Решение: ОДЗ $2x^2-3x-5 \geq 0$, к тому же $x-1>0$,

Отсюда

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5 \geq 0 \\ x-1>0 \\ \sqrt{2x^2-3x-5} < x-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x^2-3x-5 \geq 0 \\ x-1>0 \\ 2x^2-3x-5 < (x-1)^2 \end{cases}$$

а) $2x^2-3x-5 \geq 0$

$2x^2-3x-5=0$

$x_1=-1; x_2=\frac{5}{2}.$

$x \in (-\infty;-1] \cup \left[\frac{5}{2};\infty\right).$

б) $2x^2-3x-5 < (x-1)^2$

$x^2-x-6<0$

$x^2-x-6=0$

$x_1=-2; x_2=3.$

$x \in (-2;3).$

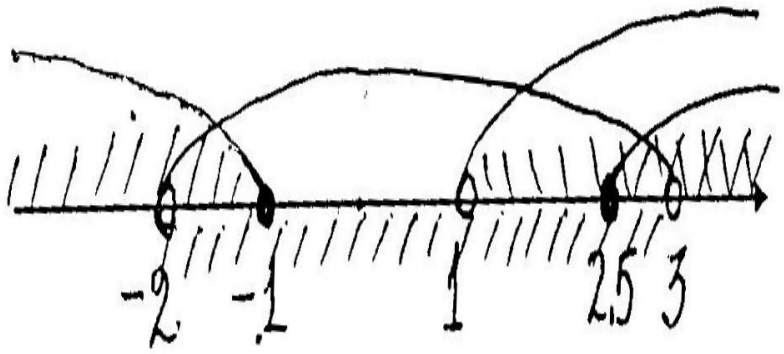
в) $x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in (1;\infty)$.

Тогда, решением заданного неравенства будет пересечение множеств решений системы

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-1] \cup \left[\frac{5}{2};\infty\right) \\ x \in (1;\infty) \\ x \in (-2;3) \end{cases}$$



Ответ: $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

2.Рассмотрим неравенство вида: $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$.

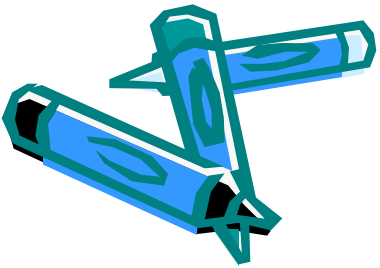
Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из условия $f(x) \geq 0$.

Но, в отличие от предыдущего, φ(x) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому в процессе решения должны рассматривать два случая: φ (x) <0 и φ(x) ≥ 0 . В первом случае данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases}$$

Но в этой системе можно опустить последнее неравенство, т.к. при φ (x)<0 оно выполняется всегда. Т.о. имеем

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}.$$



В случае же $\varphi(x) \geq 0$
Заданное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^2 \end{cases}.$$

Тогда, из последней системы видно, что первое неравенство можно опустить, т. к. из $f(x)>(\varphi(x))^2$ следует справедливость $f(x) \geq 0$

Решением неравенства будет объединение множеств решений обоих случаев.

Пример 2.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x.$$

Пример 2. **Решить неравенство:** $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x.$

Рассмотрим два случая:

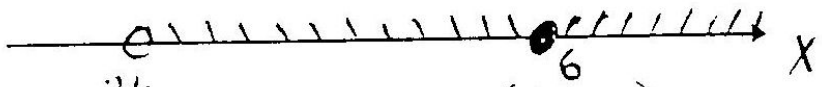
а) $\begin{cases} x^2+7x+12 \geq 0 \\ 6-x < 0 \end{cases}$ $x \in (6;\infty).$

б) $\begin{cases} x^2+7x+12 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+7x+12} > 6-x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+7x+12 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x^2+7x+12 > 36-12x+x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 6 \\ 19x > 24 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 6 \\ x > \frac{24}{19} \end{cases}$

$x \in \left(\frac{24}{19};6\right]$

Объединим множества решений обоих случаев:



$\frac{24}{19}$ Ответ: $x \in \left(\frac{24}{19};\infty\right)$.

Занятие №2

- **Цель: Рассмотреть неравенства вида:**

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$$

При решении иррациональных неравенств используются те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых переменных и т.д. Однако при решении иррациональных неравенств необходимо следить за тем, чтобы выполняемые преобразования приводили к равносильному неравенству.

1.Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$

равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > f(x) \end{cases}$$

2.Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$

равносильно неравенству f(x) <q(x).

Пример 3.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$

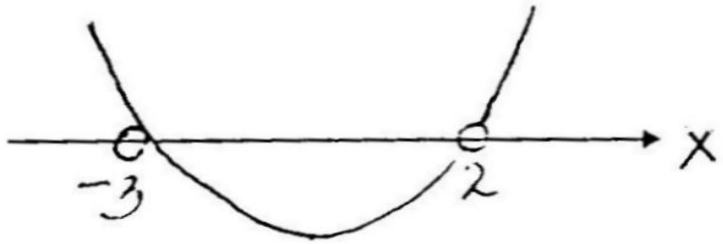
Пример 3.Решить неравенство:

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$

Имеем: $\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \leq 8 \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} |x| \leq 2\sqrt{2} \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}$.

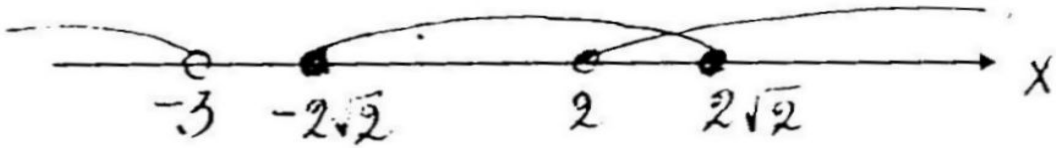
$x^2 + x - 6 > 0$

$x_1 = -3; x_2 = 2$



$x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty)$

Таким образом:



Ответ: $(2;2\sqrt{2}]$.

Пример 4.

- **Решить неравенство**

$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}.$$

Пример4.Решить неравенство: $\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$.

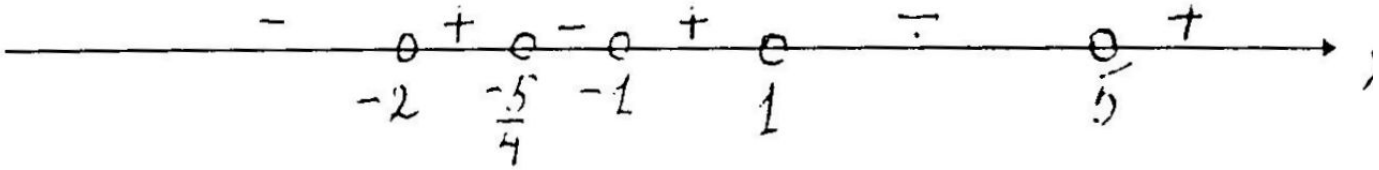
Имеем: $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}$

$$\frac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)}<0,$$

$$\frac{\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)}<0.$$

а) нули числителя: $-\frac{5}{4};5$.

б) нули знаменателя: -1; -2; 1.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(1;5)$.

Занятие №3.

- Цель: Рассмотреть решения неравенств методом интервалов.
- При решении иррациональных неравенств методом интервалов надо всегда помнить, что нули функций рассматриваются только входящие в ОДЗ.

Пример 5. Решим иррациональное неравенство методом интервалов :

$$\sqrt{3x-x^2} < 4-x\,.$$

$$\sqrt{3x-x^2} - 4 + x < 0$$

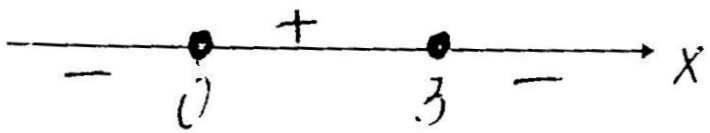
$$f(x) = \sqrt{3x-x^2} - 4 + x$$

ОДЗ $3x - x^2 \geq 0$

$$x(3-x) \geq 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3.$$

$$D(f) = [0;3]$$



$$f(x) = 0, \quad \sqrt{3x-x^2} = 4-x$$

$$3x - x^2 = 16 - 8x + x^2$$

$2x^2 - 11x + 16 = 0;$ $D = 121 - 128 = -7 < 0$ - нет решения.

$$f(1) = \sqrt{2} - 3 < 0$$

Ответ: $[0;3]$.

Занятие №4.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств введением новой переменной

Пример 6. Решим неравенство введением новой переменной

$$\sqrt{x+5-4\cdot\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\cdot\sqrt{x+1}}-1>0$$

Пусть $\sqrt{x+1}=t$, тогда $x+1=t^2$

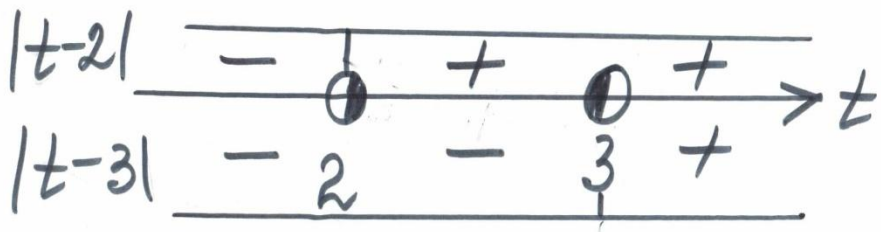
$x=t^2-1$

$$\sqrt{t^2-1+5-4\cdot t}+\sqrt{t^2-1+10-6t}-1>0$$

$$\sqrt{t^2-4\cdot t+4}+\sqrt{t^2-6\cdot t+9}-1>0$$

$$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}-1>0$$

$$|t-2|+|t-3|-1>0$$



$t<2, -t+2-t+3-1>0, -2t>-4, t<2$

$2 \le t \le 3, t-2-t+3-1>0, 0 \cdot t>0$ ложно

$t>3, t-2+t-3-1>0, 2t>6, t>3$

1 случай

$t<2$

$\sqrt{x+1}<2$

$0 \le x+1<4$

$0-1 \le x<4-1$

$-1 \le x<3$

2 случай

$t>3$

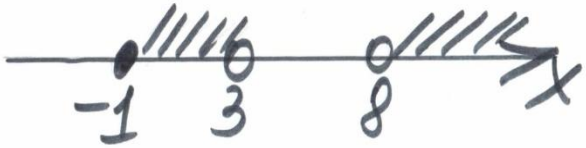
$\sqrt{x+1}>3$

$(\sqrt{x+1})^2>3^2$

$x+1>9$

$x>9-1$

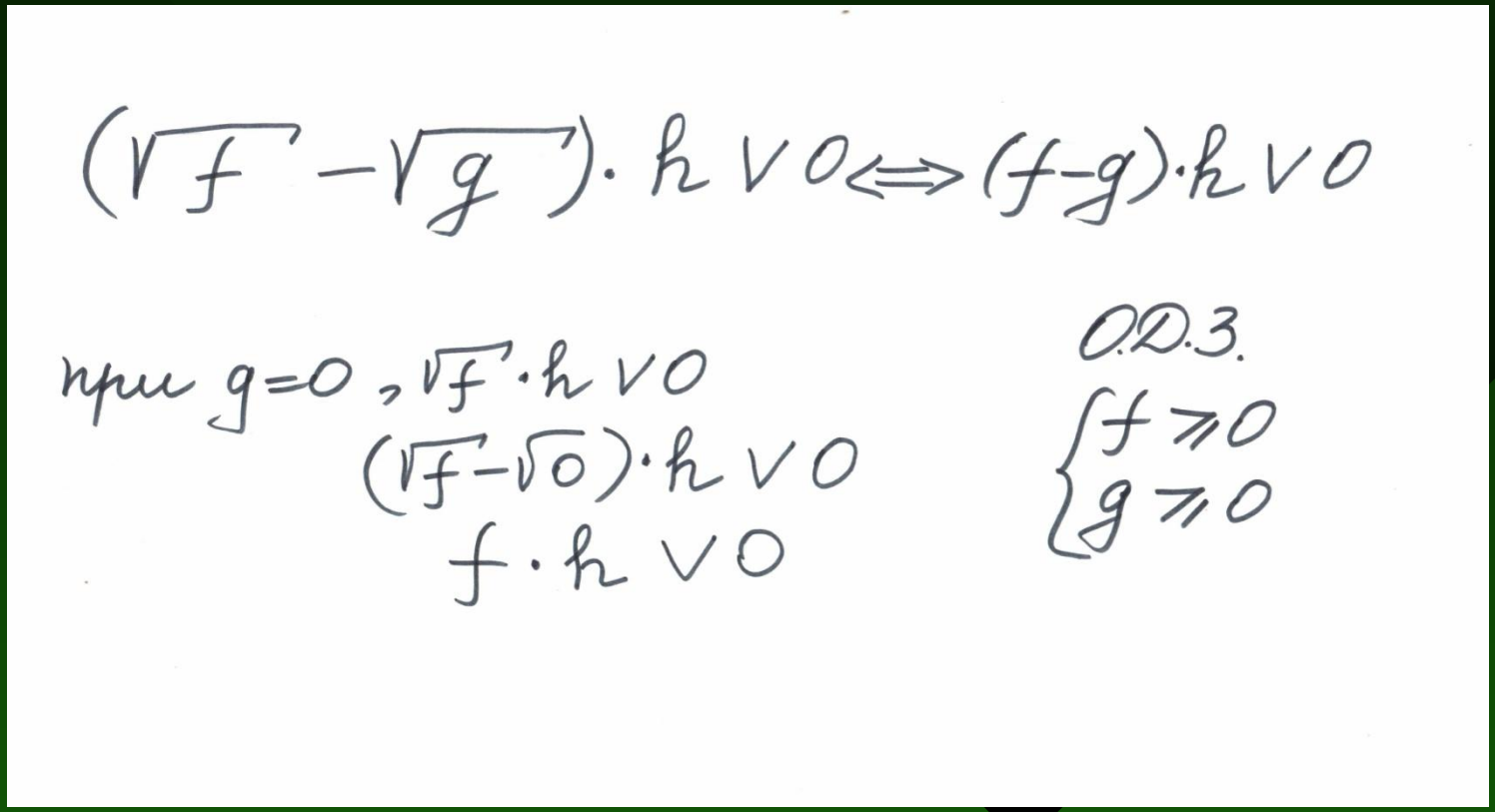
$x>8$



Ответ: $[-1; 3) \cup (8; +\infty)$

Занятие №5.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств методом замены множителя .



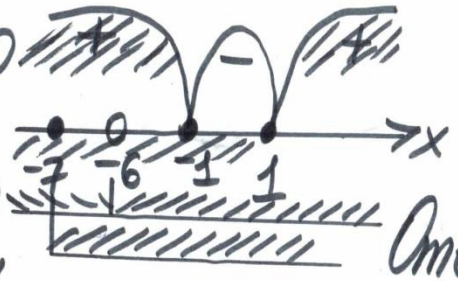
Пример №7. Решим неравенство методом замены множителя

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0;\quad \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4\cdot(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}}\le 0;$$

$$\frac{x^2-1-4\cdot(1-x)}{(x+7)-1}\le 0;\quad \frac{x^2-1-4+4x}{x+6}\le 0;$$

$$\frac{x^2+4x-5}{x+6}\le 0;\quad \frac{(x-1)(x+5)}{x+6}\le 0$$

О.Д.З. $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ x+7\ge 0 \\ x+7\ne 1 \end{cases}$



Учтовая О.Д.З.

Ответ: $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$

Домашнее задание.

Решить неравенство:

Пример 1. $\sqrt{x-4} \le x-6;$

Пример 2. $\sqrt{x^2+x} \ge 1-2x;$

Пример 3. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$

Пример 4. $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

Пример 5. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{5-x}$

ВЫВОДЫ:

Рассмотрели иррациональные неравенства и способы их решения.

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \text{ и } \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$$

возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень

введение новой переменной , метод интервалов , метод замены множителя .

СПАСИБО

ЗА УРОК!