

# Иррациональные неравенства

и способы их решения

# Занятие №1.

Цель: Рассмотреть неравенства вида:

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \text{ и } \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

1. Рассмотрим иррациональное неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x).$$

Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из решения неравенства  $f(x) \geq 0$ .

К тому же,  $\varphi(x) > 0$ , т.к.  $\sqrt{f(x)} \geq 0$ .

Поэтому данное неравенство равносильно следующей системе неравенств.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \sqrt{f(x)} < \varphi(x) \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^2 \end{cases}$$

# Пример 1.

- Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1.$$

# Пример 1.

Решить неравенство  $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$ .

Решение: ОДЗ  $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ , к тому же  $x - 1 > 0$ ,

Отсюда

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ \sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1 \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 < (x - 1)^2 \end{cases}$$

а)  $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{2}.$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[ \frac{5}{2}; \infty \right).$$

б)  $2x^2 - 3x - 5 < (x - 1)^2$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = 3.$$

$$x \in (-2; 3).$$

$$B) x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

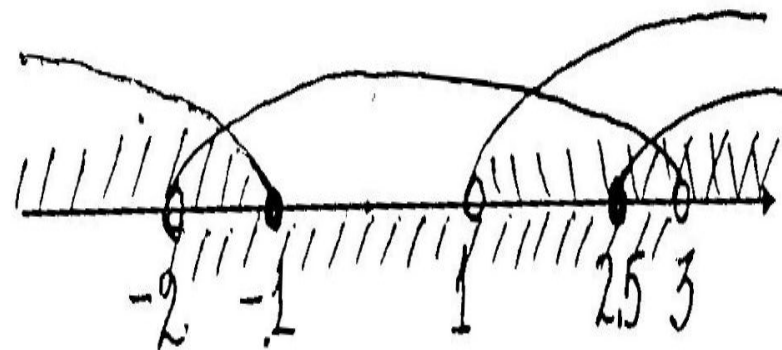
$$x \in (1; \infty).$$

Тогда, решением заданного неравенства будет пересечение множеств решений системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1] \cup \left[ \frac{5}{2}; \infty \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (1; \infty) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-2; 3) \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } \left[ \frac{5}{2}; 3 \right).$$

2. Рассмотрим неравенство вида:  $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$ .

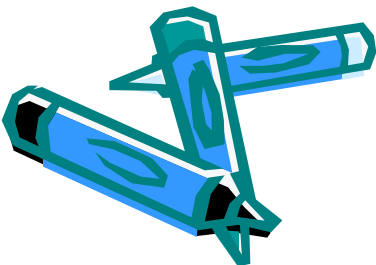
Решение. ОДЗ неизвестного будет определяться из условия  $f(x) \geq 0$ .

Но, в отличие от предыдущего,  $\varphi(x)$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому в процессе решения должны рассматривать два случая:  $\varphi(x) < 0$  и  $\varphi(x) \geq 0$ . В первом случае данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases}$$

Но в этой системе можно опустить последнее неравенство, т.к. при  $\varphi(x) < 0$  оно выполняется всегда. Т.о. имеем

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}.$$



В случае же  $\varphi(x) \geq 0$   
Заданное неравенство равносильно следующей  
системе неравенств:

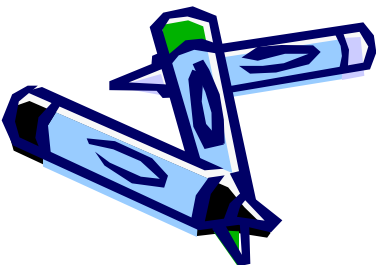
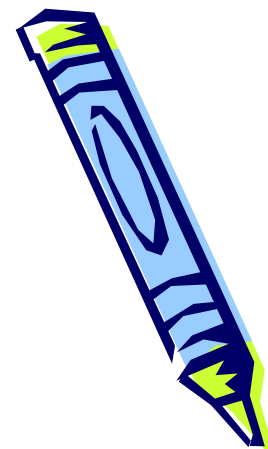
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^2 \end{cases}$$

Тогда, из последней системы видно, что первое неравенство можно опустить, т. к. из  $f(x) > (\varphi(x))^2$  следует справедливость  $f(x) \geq 0$

Решением неравенства будет объединение множеств решений обоих случаев.





## Пример 2.

- Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x.$$

**Пример 2.** Решить неравенство:  $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$ .

Рассмотрим два случая:

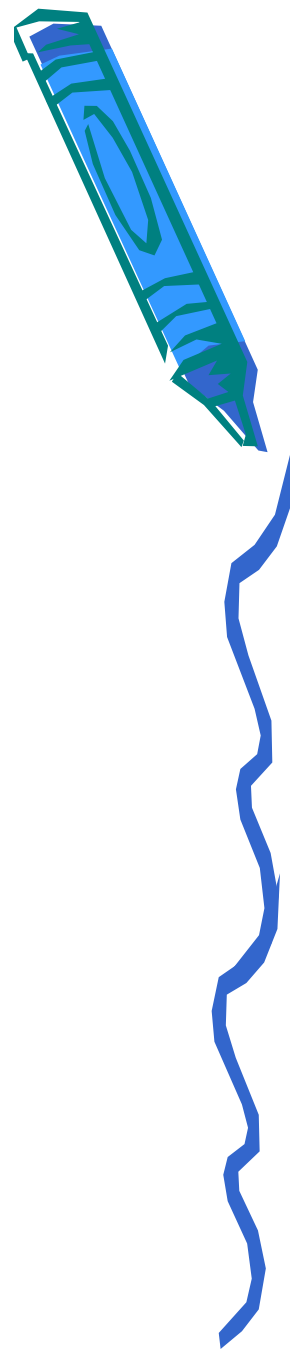
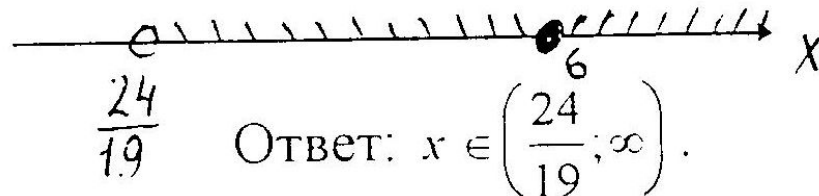
$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 7x + 12 \geq 0 \\ 6 - x < 0 \end{cases} \quad x \in (6; \infty).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 7x + 12 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + 7x + 12 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ x^2 + 7x + 12 > (6 - x)^2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ x^2 + 7x + 12 > 36 - 12x + x^2 \end{cases} ; \begin{cases} x \leq 6 \\ 19x > 24 \end{cases} ; \begin{cases} x \leq 6 \\ x > \frac{24}{19} \end{cases}$$

$$x \in \left( \frac{24}{19}; 6 \right]$$

Объединим множества решений обоих случаев:




# Занятие №2

- Цель: Рассмотреть неравенства вида:

$$\sqrt[2^n]{f(x)} < \sqrt[2^n]{g(x)}, n \in N,$$


$$\sqrt[2^{n+1}]{f(x)} < \sqrt[2^{n+1}]{g(x)}, n \in N.$$

При решении иррациональных неравенств используются те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых переменных и т.д. Однако при решении иррациональных неравенств необходимо следить за тем, чтобы выполняемые преобразования приводили к равносильному неравенству.



1. Неравенство вида  $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}, n \in N,$

равносильно системе неравенств:


$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > f(x) \end{cases}$$



2. Неравенство вида  $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}, n \in N.$   
равносильно неравенству  $f(x) < q(x).$



## Пример 3.

- Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$



# Пример 3. Решить неравенство:

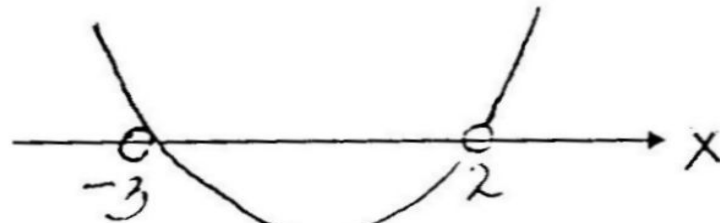
$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}.$$

Имеем:  $\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 \leq 8 \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}; \begin{cases} |x| \leq 2\sqrt{2} \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}.$

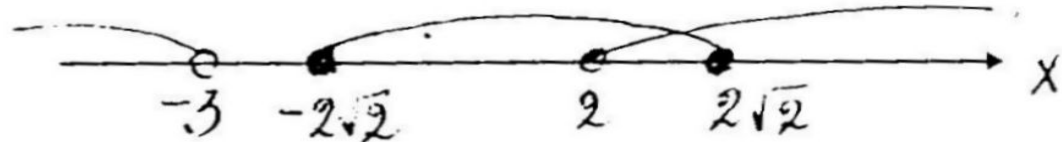
$$x^2 + x - 6 > 0$$

$x_1 = -3; x_2 = 2$

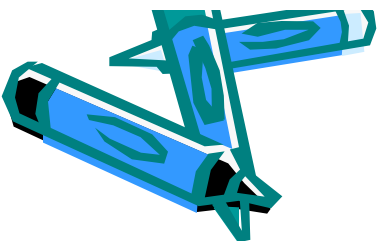
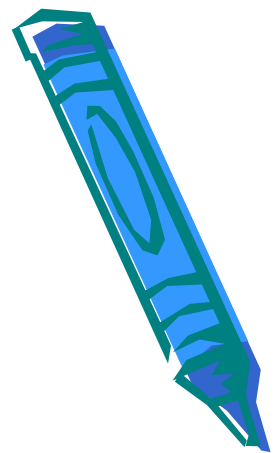
$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$



Таким образом:



Ответ:  $(2; 2\sqrt{2}]$ .



## Пример 4.

- Решить неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}.$$

# Пример 4. Решить неравенство:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$$

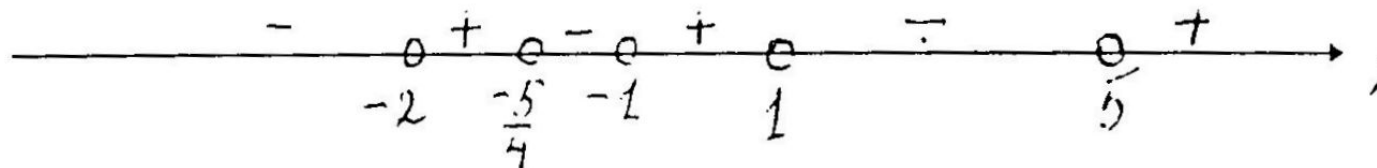
Имеем:  $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1}$

$$\frac{4x^2 - 15x - 25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0,$$

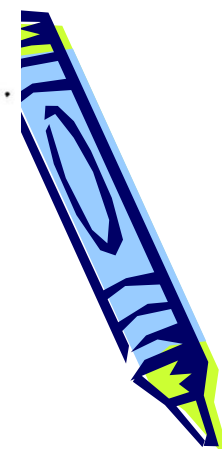
$$\frac{\left(x + \frac{5}{4}\right)(x - 5)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0.$$

а) нули числителя:  $-\frac{5}{4}; 5$ .

б) нули знаменателя:  $-1; -2; 1$ .



Ответ:  $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; 5)$ .





# Занятие №3.

- Цель: Рассмотреть решения неравенств методом интервалов.
- При решении иррациональных неравенств методом интервалов надо всегда помнить, что нули функций рассматриваются только входящие в ОДЗ.

# Пример 5. Решим иррациональное неравенство методом интервалов :

$$\sqrt{3x - x^2} < 4 - x.$$

$$\sqrt{3x - x^2} - 4 + x < 0$$

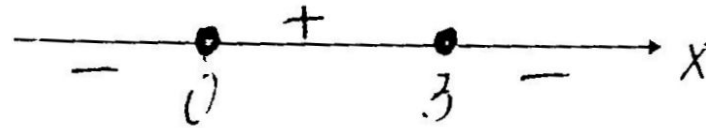
$$f(x) = \sqrt{3x - x^2} - 4 + x$$

$$\text{ОДЗ } 3x - x^2 \geq 0$$

$$x(3 - x) \geq 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3.$$

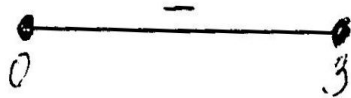
$$D(f) = [0; 3]$$



$$f(x) = 0, \quad \sqrt{3x - x^2} = 4 - x$$

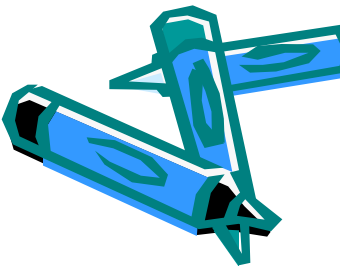
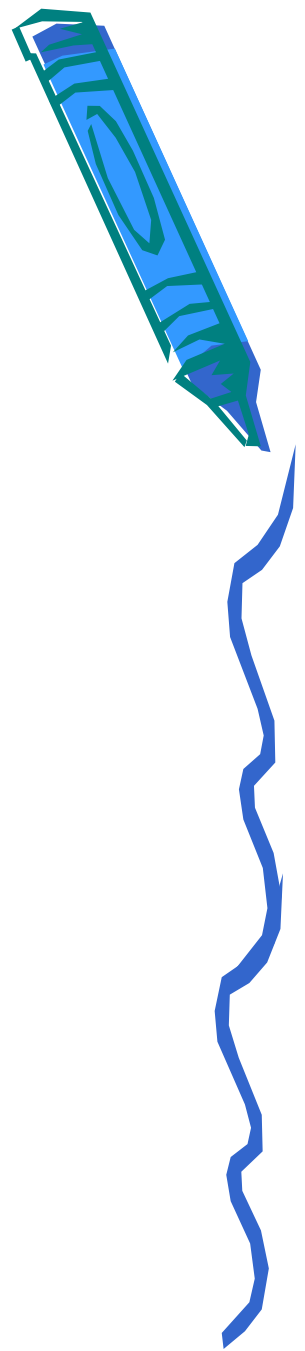
$$3x - x^2 = 16 - 8x + x^2$$

$$2x^2 - 11x + 16 = 0; \quad D = 121 - 128 = -7 < 0 \text{ - нет решения.}$$



$$f(1) = \sqrt{2} - 3 < 0$$

Ответ:  $[0; 3]$ .



# Занятие №4.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств введением новой переменной

Пример 6. Решим неравенство введением новой переменной

$$\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} - 6\sqrt{x+1} - 1 > 0$$

Пусть  $\sqrt{x+1} = t$ , тогда  $x+1 = t^2$   
 $x = t^2 - 1$

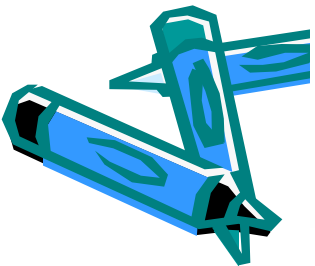
$$\sqrt{t^2 - 1 + 5} - 4t + \sqrt{t^2 - 1 + 10} - 6t - 1 > 0$$

$$\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} - 1 > 0$$

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} - 1 > 0$$

$$|t-2| + |t-3| - 1 > 0$$

$ t-2 $	-	0	+	0	+
$ t-3 $	-	2	-	3	+
					$\rightarrow t$



$$t < 2, -t + 2 - t + 3 - 1 > 0, -2 \cdot t > -4, t < 2$$

$$2 \leq t \leq 3, t - 2 - t + 3 - 1 > 0, 0 \cdot t > 0 \text{ ложно}$$

$$t > 3, t - 2 + t - 3 - 1 > 0, 2 \cdot t > 6, t > 3$$

1 случай

$$t < 2$$

$$\sqrt{x+1} < 2$$

$$0 \leq x+1 < 4$$

$$0-1 \leq x < 4-1$$

$$-1 \leq x < 3$$

2 случай

$$t > 3$$

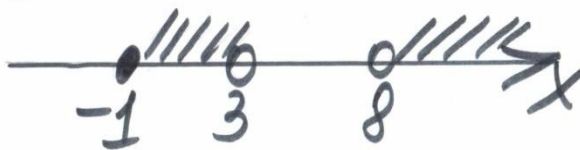
$$\sqrt{x+1} > 3$$

$$(\sqrt{x+1})^2 > 3^2$$

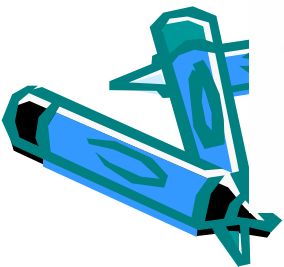
$$x+1 > 9$$

$$x > 9-1$$

$$x > 8$$



Ответ:  $[-1; 3) \cup (8; +\infty)$



# Занятие №5.

- Цель: Рассмотреть решения иррациональных неравенств методом замены множителя .

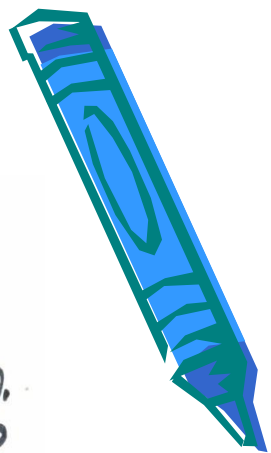
$$(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \cdot h \geq 0 \Leftrightarrow (f - g) \cdot h \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{при } g=0, \sqrt{f} \cdot h \geq 0 \\ (\sqrt{f} - \sqrt{0}) \cdot h \geq 0 \\ f \cdot h \geq 0 \end{aligned}$$

О.Д.З.

$$\begin{cases} f \geq 0 \\ g \geq 0 \end{cases}$$

Пример №7. Решим неравенство методом замены множителя



$$\frac{\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7} - 1} \leq 0; \quad \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{1}} \leq 0;$$

$$\frac{x^2-1 - 4(1-x)}{(x+7)-1} \leq 0; \quad \frac{x^2-1-4+4x}{x+6} \leq 0;$$

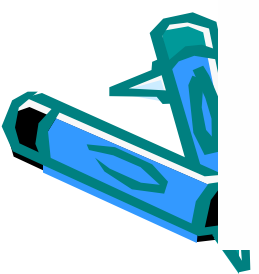
$$\frac{x^2+4x-5}{x+6} \leq 0; \quad \frac{(x-1)(x+5)}{x+6} \leq 0$$

О.О.З.

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ x+7 \neq 1 \end{cases}$$

Учитывая О.О.З.

Ответ:  $[-7; -6) \cup [-5; -1] \cup \{1\}$



# Домашнее задание.

Решить неравенство:

Пример 1.  $\sqrt{x-4} \leq x-6;$

Пример 2.  $\sqrt{x^2+x} \geq 1-2x;$

Пример 3.  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$

Пример 4.  $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

Пример 5.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{5-x}$



# ВЫВОДЫ:

Рассмотрели иррациональные неравенства и способы их решения.

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \text{ И } \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in N,$$

$$\sqrt[n+1]{f(x)} < \sqrt[n+1]{g(x)}, n \in N.$$

возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень

введение новой переменной , метод интервалов , метод замены множителя .

---

**СПАСИБО**

**ЗА УРОК!**