

Дифференциальные уравнения

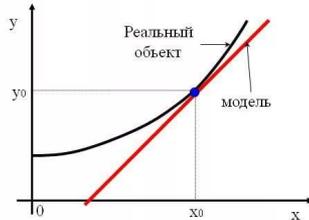
Быченкова Ирина 103-ДП-17

Ноябрь, 2017г

Дифференциальное уравнение

Уравнение, в которое входят производные функции, и может входить сама функция, независимая переменная и параметры. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен.

Дифференциальные уравнения



$$F(x,y) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y = 0 \quad \begin{array}{l} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \end{array}$$

Решением дифференциального уравнения

порядка n называется функция $y(x)$, имеющая на некотором интервале (a, b) производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению.

Процесс решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием***

Задача об интегрировании дифференциального уравнения считается решённой, если нахождение неизвестной функции $y(x)$ удастся привести к квадратуре, (т.е. к виду $\int f(x) dx$, где $f(x)$ - элементарная функция) независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде через известные функции или нет.

Виды дифференциальных уравнений

- Обыкновенные
- Уравнения с частными производными
- Стохастические дифференциальные уравнения

Обыкновенные (ОДУ)

это дифференциальные уравнения для функции от одной переменной.

Они имеют вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

Уравнения с частными производными

это уравнения, содержащие неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные

Общий вид:

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n} \right) = 0,$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

Уравнение, в котором один член или более имеют стохастическую природу, то есть представляют собой стохастический процесс. Таким образом, решения уравнения также оказываются стохастическими процессами.

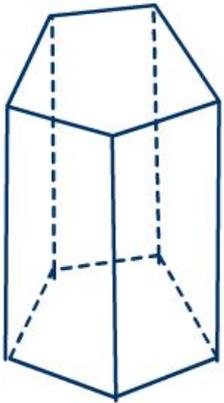
СДУ первого
порядка:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^n g_i^m(\mathbf{x})\eta_m(t),$$

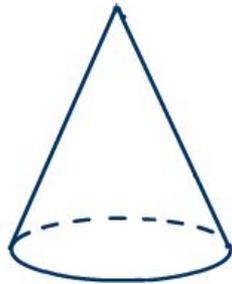
В физике СДУ традиционно записывают в форме уравнения Ланжевена. И часто, не совсем точно, называют самим уравнением Ланжевина, хотя СДУ можно записать многими другими способами.

История дифференциальных уравнений

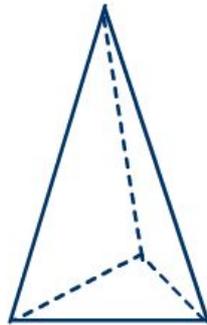
Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых требовалось определить координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени при различных воздействиях. К дифференциальным уравнениям приводили также некоторые рассмотренные в то время геометрические задачи.



Призма

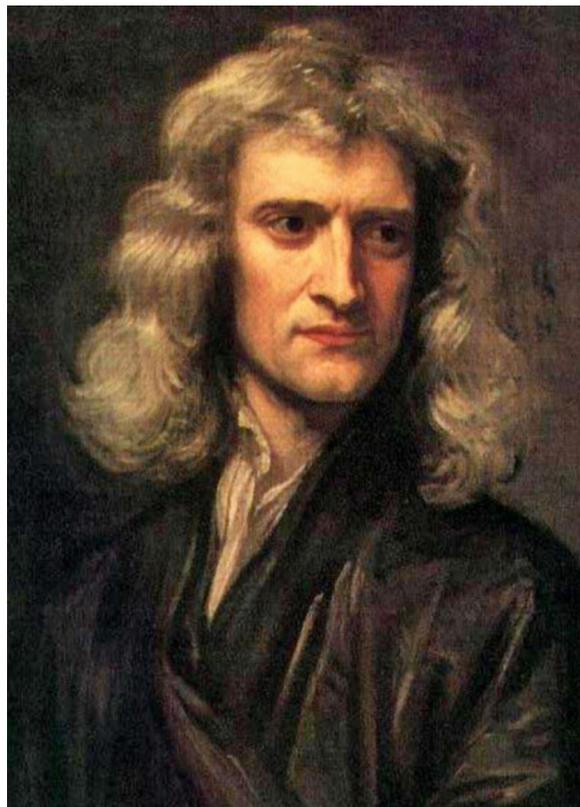


Конус



Пирамида

Основой теории дифференциальных уравнений стало дифференциальное исчисление, созданное Лейбницем и Ньютоном. Сам термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Лейбницем.



Из огромного числа работ по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера и Лагранжа. В этих работах была прежде развита теория малых колебаний, а следовательно — теория линейных систем дифференциальных уравнений



Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Анри Пуанкаре, созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных легла в основу современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь её чаще называют, теория динамических систем, сейчас активно развивается и имеет важные применения в естествознании.

