

A photograph of a large, multi-story university building with a modern architectural style, featuring a mix of brick and light-colored panels. The building is set against a blue sky with scattered white clouds. In the foreground, there is a green lawn and a paved path. A tall, slender street lamp stands on the left side of the path.

Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 3

Двойственные задачи линейного программирования

## Постановка двойственной задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в виде

$$L = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Назовем эту задачу исходной.

Тогда двойственной к ней будет называться задача вида

$$F = c_0 + b_1z_1 + \dots + b_mz_m \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \dots + a_{m1}z_m \geq c_1; \\ \dots \\ a_{1n}z_1 + \dots + a_{mn}z_m \geq c_n; \end{cases}$$

$$z_1 \geq 0, \dots, z_m \geq 0.$$

## Постановка двойственной задачи линейного программирования

Двойственная задача линейного программирования ставится следующим образом.

1. В исходной задаче  $L \rightarrow \max$ , в двойственной  $F \rightarrow \min$ .
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи являются коэффициентами в правой части при ограничениях двойственной задачи.
3. Коэффициенты при переменных в целевой функции двойственной задачи равны свободным коэффициентам ограничений исходной задачи.

## Постановка двойственной задачи линейного программирования

4. Свободный коэффициент функции  $F$  равен свободному коэффициенту функции  $L$ .

5. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи является транспонированной к соответствующей матрице исходной задачи.

6. Ограничения в исходной задаче имеют вид " $\leq$ ", а в двойственной – " $\geq$ ".

Между решениями исходной задачи и двойственной имеется тесная связь.

## Лемма (основное неравенство)

### Лемма (основное неравенство)

Пусть  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  — допустимые наборы (то есть опорные планы) исходной и двойственной задач соответственно.

Тогда  $L(x_1, \dots, x_n) \leq F(z_1, \dots, z_m)$ .

### Доказательство.

Обозначим  $y_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 0$  для любого  $i = 1, \dots, m$  дополнительные переменные исходной задачи и  $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}z_i - c_j \geq 0$  для любого  $j = 1, \dots, n$  дополнительные переменные двойственной задачи.

## Лемма (основное неравенство)

Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^m y_i z_i = \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) z_i = \sum_{i=1}^m b_i z_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i x_j \geq 0, \text{ поскольку } y_i \geq 0, z_i \geq 0$$

для любого  $i$ . Отсюда  $\sum_{i=1}^m b_i z_i \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i x_j$ .

Теперь рассмотрим

$$\sum_{j=1}^n x_j w_j = \sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i - c_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i x_j - \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq 0, \text{ поскольку } x_j \geq 0, w_j \geq 0$$

для любого  $j$ . Отсюда  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$ .

Сравниваем полученные неравенства и замечаем, что  $\sum_{i=1}^m b_i z_i \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$ .

Тогда  $L(x_1, \dots, x_n) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq c_0 + \sum_{i=1}^m b_i z_i = F(z_1, \dots, z_m)$ .

Лемма доказана.

## Теорема о двойственных задачах

### Теорема (о двойственных задачах)

Пусть  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  – допустимые наборы исходной и двойственной задач соответственно. Равенство  $L(x_1, \dots, x_n) = F(z_1, \dots, z_m)$  имеет место тогда и только тогда, когда  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(z_1, \dots, z_m)$  являются решениями соответствующих задач.

Если  $L$  не ограничена сверху ( $L \rightarrow \infty$ ), то область допустимых решений двойственной задачи пуста.

## Теорема о двойственных задачах

### Доказательство.

Если  $L(x_1, \dots, x_n) = F(z_1, \dots, z_m)$  для допустимых наборов, то для любого допустимого набора  $(x_1, \dots, x_n)$  из основного неравенства

$$L(x_1, \dots, x_n) \leq F(z_1, \dots, z_m) = L(x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно,  $(x_1, \dots, x_n)$  является решением исходной задачи. Для набора  $(z_1, \dots, z_m)$  – аналогично (доказать самостоятельно).

Достаточность данного утверждения принимаем без доказательства.

Докажем второе утверждение теоремы.

Предположим, что область допустимых решений не пуста и существует набор  $(z_1, \dots, z_m)$  в двойственной задаче. Тогда для любого допустимого набора  $(x_1, \dots, x_n)$  выполняется неравенство

$$L(x_1, \dots, x_n) \leq F(z_1, \dots, z_m) = M.$$

Следовательно, функция  $L$  ограничена сверху, что противоречит условию.

Теорема доказана.

## Теорема о двойственных задачах

### **Замечание.**

Обратное ко второму утверждению неверно. Если область допустимых решений двойственной задачи пуста, то из этого не следует, что  $L \rightarrow \infty$ .

Область допустимых решений исходной задачи также может быть пуста.

# Соответствие между исходной и двойственной задачами линейного программирования

Установим соответствие между переменными.

Исходная задача

Основные переменные

$$x_1, \dots, x_n$$

$$\begin{matrix} \square & \square \end{matrix}$$

$$w_1, \dots, w_n$$

Дополнительные переменные

$$y_1, \dots, y_m$$

$$\begin{matrix} \square & \square \end{matrix}$$

$$z_1, \dots, z_m$$

Дополнительные переменные

Основные переменные

Двойственная задача

## Лемма о дополняющей нежесткости

### Лемма (о дополняющей нежесткости)

Пусть  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  и  $(z_1^0, \dots, z_m^0)$  – решения исходной и двойственной задачи соответственно. Выполнены следующие соотношения.

1). Если  $x_j^0 > 0$ , то  $w_j^0 = 0$ .

2). Если  $w_j^0 > 0$ , то  $x_j^0 = 0$ .

3). Если  $y_j^0 > 0$ , то  $z_j^0 = 0$ .

4). Если  $z_j^0 > 0$ , то  $y_j^0 = 0$ .

## Лемма о дополняющей нежёсткости

### Доказательство.

$$\text{Рассмотрим } \sum_{j=1}^n x_j^0 w_j^0 = \sum_{j=1}^n x_j^0 \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i^0 - c_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 z_i^0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j^0.$$

$$\text{С другой стороны, } \sum_{i=1}^m y_i^0 z_i^0 = \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0) z_i^0 = \sum_{i=1}^m b_i z_i^0 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 z_i^0.$$

Заметим, что так  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  и  $(z_1^0, \dots, z_m^0)$  – решения, то  $L(x_1^0, \dots, x_n^0) = F(z_1^0, \dots, z_m^0)$ , а, следовательно,  $c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = c_0 + \sum_{i=1}^m b_i z_i^0$ ,

$$\text{Отсюда, } \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^m b_i z_i^0.$$

$$\text{Тогда получаем, что } \sum_{j=1}^n x_j^0 w_j^0 = - \sum_{i=1}^m y_i^0 z_i^0.$$

## Лемма о дополняющей нежёсткости

Но поскольку  $x_j^0 \geq 0, w_j^0 \geq 0, y_j^0 \geq 0, z_j^0 \geq 0$ , получаем

$$\sum_{j=1}^n x_j^0 w_j^0 = \sum_{i=1}^n y_i^0 z_i^0 = 0.$$

Так как  $x_j^0 \geq 0, w_j^0 \geq 0, y_j^0 \geq 0, z_j^0 \geq 0$ , то  $x_j^0 w_j^0 = 0$   
для любого  $j = 1, \dots, n$  и  $y_i^0 z_i^0 = 0$  для любого  $i = 1, \dots, m$ .  
Отсюда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

## Следствие из второй теоремы двойственности

### **Замечание.**

Из второй теоремы двойственности для рассматриваемых симплекс-таблиц следует, что переменные, соответствующие базисным переменным исходной задачи, равны 0. Переменные, соответствующие свободным переменным исходной задачи, будут равны соответствующим числам первой строки (строки  $L$ ) с противоположным знаком.

Пример решения двойственной задачи.  
Вариант 50

	$C$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$L$	-4	-2	3	-4	-1
$y_1$	-2	2	-2	1	1
$y_2$	3	-3	-1	-4	4
$y_3$	3	2	2	-2	2

## Пример решения двойственной задачи

Задача, соответствующая этой симплекс-таблице имеет вид

$$-L = 4 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 - (2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) \geq 0; \\ y_2 = 3 - (-3x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4) \geq 0; \\ y_3 = 3 - (2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4) \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Ограничения можно записать в виде

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq -2; \\ -3x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 \leq 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 3. \end{cases}$$

## Пример решения двойственной задачи

Двойственная задача ставится следующим образом

$$-F = 4 - 2z_1 + 3z_2 + 3z_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 + 2z_3 \geq -2; \\ -2z_1 - z_2 + 2z_3 \geq 3; \\ z_1 - 4z_2 - 2z_3 \geq -4; \\ z_1 + 4z_2 + 2z_3 \geq -1. \end{cases}$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0.$$

Дополнительные переменные двойственной задачи удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} w_1 = 2z_1 - 3z_2 + 2z_3 + 2 \geq 0; \\ w_2 = -2z_1 - z_2 + 2z_3 - 3 \geq 0; \\ w_3 = z_1 - 4z_2 - 2z_3 + 4 \geq 0; \\ w_4 = z_1 + 4z_2 + 2z_3 + 1 \geq 0. \end{cases}$$

## Пример решения двойственной задачи

Было получено решение исходной задачи.

	$C$	$x_1$	$y_3$	$x_3$	$x_4$
$L$	$-17/2$	$-5$	$-3/2$	$-1$	$-4$
$x_2$	$3/2$	$1$	$1/2$	$-1$	$1$
$y_2$	$9/2$	$-2$	$1/2$	$-5$	$6$
$y_1$	$1$	$4$	$1$	$-1$	$3$

## Пример решения двойственной задачи

Из второй теоремы двойственности

$$-F_{\max} = -L_{\min} = (-L)_{\max} = \frac{17}{2};$$

$$w_2 = 0, z_2 = 0, z_1 = 0;$$

$$w_1 = 5, z_3 = \frac{3}{2}, w_3 = 1, w_4 = 4.$$

По лемме о дополняющей нежесткости

$$w_2 = z_2 = z_1 = 0;$$

$$w_2 = -2z_1 - z_2 + 2z_3 - 3, \quad \text{следовательно, } z_3 = \frac{3}{2}.$$

$$w_1 = 0 + 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 5; \quad w_3 = 0 - 0 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 = 1;$$

$$w_4 = 0 + 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4.$$

Это совпадает с полученными результатами.

## Задания для самоконтроля

1. В двойственной задаче линейного программирования целевая функция ...
  - 1) исследуется на минимум;
  - 2) исследуется на максимум;
  - 3) неотрицательна;
  - 4) равна нулю.

## Задания для самоконтроля

2. Ограничения в двойственной задаче задаются при помощи знаков...

- 1) " $\leq$ ";
- 2) " $\geq$ ";
- 3) " $<$ ";
- 4) " $>$ ".

## Задания для самоконтроля

3. Свободные коэффициенты целевых функций в прямой и двойственной задаче линейного программирования...

- 1) положительны;
- 2) равны;
- 3) взаимно обратны;
- 4) отличаются знаком.

## Задания для самоконтроля

4. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи по отношению к соответствующей матрице исходной задачи является...

- 1) обратной;
- 2) вырожденной;
- 3) транспонированной;
- 4) противоположной.

**Спасибо за внимание**

