Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 3

Двойственные задачи линейного программирования

Постановка двойственной задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в виде

$$L = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1; \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

Назовем эту задачу исходной.

Тогда двойственной к ней будет называться задача вида

$$F = c_0 + b_1 z_1 + \ldots + b_m z_m \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11} z_1 + \ldots + a_{m1} z_m \ge c_1; \\ \ldots \\ a_{1n} z_1 + \ldots + a_{mn} z_m \ge c_n; \end{cases}$$

$$z_1 \ge 0, \ldots, z_m \ge 0.$$

Постановка двойственной задачи линейного программирования

Двойственная задача линейного программирования ставится следующим образом.

1. В исходной задаче $L \to \max$, в двойственной $F \to \min$.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи являются коэффициентами в правой части при ограничениях двойственной задачи.

3. Коэффициенты при переменных в целевой функции двойственной задачи равны свободным коэффициентам ограничений исходной задачи.

Постановка двойственной задачи линейного программирования

4. Свободный коэффициент функции F равен свободному коэффициенту функции L.

5. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи является транспонированной к соответствующей матрице исходной задачи.

6. Ограничения в исходной задаче имеют вид "$\leq$", а в двойственной – "$\geq$".

Между решениями исходной задачи и двойственной имеется тесная связь.

Лемма (основное неравенство)

Лемма (основное неравенство)

Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(z_1, z_2, ..., z_m)$ – допустимые наборы (то есть опорные планы) исходной и двойственной задач соответственно.

Тогда $L(x_1, ..., x_n) \le F(z_1, ..., z_m)$.

Доказательство.

Обозначим $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 0$ для любого $i = 1, ..., m$ дополнительные переменные исходной задачи и $w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - c_j \ge 0$ для любого $j = 1, ..., n$ дополнительные переменные двойственной задачи.

Лемма (основное неравенство)

Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{m} y_i z_i = \sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)z_i = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i x_j \ge 0,$$ поскольку $y_i \ge 0,\ z_i \ge 0$

для любого $i.$ Отсюда $\sum_{i=1}^{m} b_i z_i \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i x_j.$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - c_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge 0,$$ поскольку $x_j \ge 0,\ w_j \ge 0$

для любого $j.$ Отсюда $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i x_j \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$

Сравниваем полученные неравенства и замечаем, что $\sum_{i=1}^{m} b_i z_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$

Тогда

$$L(x_1,\dots,x_n) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i z_i = F(z_1,\dots,z_m).$$

Лемма доказана.

Теорема о двойственных задачах

Теорема (о двойственных задачах)

Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(z_1, z_2, ..., z_m)$ – допустимые наборы исходной и двойственной задач соответственно. Равенство $L(x_1, ..., x_n) = F(z_1, ..., z_m)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(x_1, ..., x_n)$ и $(z_1, ..., z_m)$ являются решениями соответствующих задач.

Если L не ограничена сверху $(L \to \infty)$, то область допустимых решений двойственной задачи пуста.

Теорема о двойственных задачах

Доказательство.

Если $L(x_1,...,x_n) = F(z_1,...,z_m)$ для допустимых наборов, то для любого допустимого набора $(x_1^`,...,x_n^`)$ из основного неравенства $L(x_1^`,...,x_n^`) \le F(z_1,...,z_m) = L(x_1,...,x_n).$

Следовательно, $(x_1, ..., x_n)$ является решением исходной задачи. Для набора $(z_1, ..., z_m)$ – аналогично (доказать самостоятельно).

Достаточность данного утверждения принимаем без доказательства.

Докажем второе утверждение теоремы.

Предположим, что область допустимых решений не пуста и существует набор $(z_1, ..., z_m)$ в двойственной задаче. Тогда для любого допустимого набора $(x_1, ..., x_n)$ выполняется неравенство

$L(x_1,...,x_n) \le F(z_1,...,z_m) = M.$

Следовательно, функция L ограничена сверху, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Теорема о двойственных задачах

Замечание.

Обратное ко второму утверждению неверно. Если область допустимых решений двойственной задачи пуста, то из этого не следует, что $L \to \infty$.

Область допустимых решений исходной задачи также может быть пуста.

Соответствие между исходной и двойственной задачами линейного программирования

Установим соответствие между переменными.

Исходная задача

Основные переменные

$x_1, ..., x_n$

$\updownarrow \quad \updownarrow$

$w_1, ..., w_n$

Дополнительные переменные

Дополнительные переменные

$y_1, ..., y_m$

$\updownarrow \quad \updownarrow$

$z_1, ..., z_m$

Основные переменные

Двойственная задача

Лемма о дополняющей нежёсткости

Лемма (о дополняющей нежесткости)

Пусть $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ и $(z_1^0,\ldots,z_m^0)$ – решения исходной и двойственной задачи соответственно. Выполнены следующие соотношения.

1). Если $x_j^0>0,$ то $w_j^0=0.$

2). Если $w_j^0>0,$ то $x_j^0=0.$

3). Если $y_j^0>0,$ то $z_j^0=0.$

4). Если $z_j^0>0,$ то $y_j^0=0.$

Лемма о дополняющей нежёсткости

Доказательство.

Рассмотрим $\sum_{j=1}^{n} x_j^0 w_j^0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^0 - c_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 z_i^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0.$

С другой стороны, $\sum_{i=1}^{m} y_i^0 z_i^0 = \sum_{i=1}^{m} (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) z_i^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i^0 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 z_i^0.$

Заметим, что так $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и $(z_1^0,\dots,z_m^0)$ – решения, то $L(x_1^0,\dots,x_n^0) = F(z_1^0,\dots,z_m^0)$, а, следовательно, $c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i z_i^0,$

Отсюда, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i^0.$

Тогда получаем, что $\sum_{j=1}^{n} x_j^0 w_j^0 = -\sum_{i=1}^{n} y_i^0 z_i^0.$

Лемма о дополняющей нежёсткости

Но поскольку $x_j^0 \geq 0, w_j^0 \geq 0, y_j^0 \geq 0, z_j^0 \geq 0,$ получаем

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 w_j^0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 z_i^0 = 0.$$

Так как $x_j^0 \geq 0, w_j^0 \geq 0,$ $y_j^0 \geq 0,$ $z_j^0 \geq 0,$ то $x_j^0 w_j^0 = 0$ для любого $j = 1,\dots,n$ и $y_i^0 z_i^0 = 0$ для любого $i = 1,\dots,m.$
Отсюда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Следствие из второй теоремы двойственности

Замечание.

Из второй теоремы двойственности для рассматриваемых симплекс-таблиц следует, что переменные, соответствующие базисным переменным исходной задачи, равны 0. Переменные, соответствующие свободным переменным исходной задачи, будут равны соответствующим числам первой строки (строки L) с противоположным знаком.

Пример решения двойственной задачи. Вариант 50

	C	x_1	x_2	x_3	x_4
L	-4	-2	3	-4	-1
y_1	-2	2	-2	1	1
y_2	3	-3	-1	-4	4
y_3	3	2	2	-2	2

Пример решения двойственной задачи

Задача, соответствующая этой симплекс-таблице имеет вид

$$-L = 4 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 - (2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) \geq 0; \\ y_2 = 3 - (-3x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4) \geq 0; \\ y_3 = 3 - (2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4) \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Ограничения можно записать в виде

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq -2; \\ -3x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 \leq 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 3. \end{cases}$$

Пример решения двойственной задачи

Двойственная задача ставится следующим образом

$$-F = 4 - 2z_1 + 3z_2 + 3z_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 + 2z_3 \geq -2; \\ -2z_1 - z_2 + 2z_3 \geq 3; \\ z_1 - 4z_2 - 2z_3 \geq -4; \\ z_1 + 4z_2 + 2z_3 \geq -1. \end{cases}$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0.$$

Дополнительные переменные двойственной задачи удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} w_1 = 2z_1 - 3z_2 + 2z_3 + 2 \geq 0; \\ w_2 = -2z_1 - z_2 + 2z_3 - 3 \geq 0; \\ w_3 = z_1 - 4z_2 - 2z_3 + 4 \geq 0; \\ w_4 = z_1 + 4z_2 + 2z_3 + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Пример решения двойственной задачи

Было получено решение исходной задачи.

	C	x_1	y_3	x_3	x_4
L	-17/2	-5	-3/2	-1	-4
x_2	3/2	1	1/2	-1	1
y_2	9/2	-2	1/2	-5	6
y_1	1	4	1	-1	3

Пример решения двойственной задачи

Из второй теоремы двойственности

$$-F_{\max} = -L_{\min} = (-L)_{\max} = \frac{17}{2};$$

$$w_2 = 0,\ z_2 = 0,\ z_1 = 0;$$

$$w_1 = 5,\ z_3 = \frac{3}{2},\ w_3 = 1,\ w_4 = 4.$$

По лемме о дополняющей нежесткости

$$w_2 = z_2 = z_1 = 0;$$

$$w_2 = -2z_1 - z_2 + 2z_3 - 3,$$ следовательно, $$z_3 = \frac{3}{2}.$$

$$w_1 = 0 + 0 + 2\cdot\frac{3}{2} + 2 = 5;\quad w_3 = 0 - 0 - 2\cdot\frac{3}{2} + 4 = 1;$$

$$w_4 = 0 + 0 + 2\cdot\frac{3}{2} + 1 = 4.$$

Это совпадает с полученными результатами.

Задания для самоконтроля

1. В двойственной задаче линейного программирования целевая функция F …

1) исследуется на минимум;
2) исследуется на максимум;
3) неотрицательна;
4) равна нулю.

Задания для самоконтроля

2. Ограничения в двойственной задаче задаются при помощи знаков…

1) "$\le$";
2) "$\ge$";
3) "$<$";
4) "$>$".

Задания для самоконтроля

3. Свободные коэффициенты целевых функций в прямой и двойственной задаче линейного программирования…

1) положительны;
2) равны;
3) взаимно обратны;
4) отличаются знаком.

Задания для самоконтроля

4. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи по отношению к соответствующей матрице исходной задачи является…

1) обратной;
2) вырожденной;
3) транспонированной;
4) противоположной.


Спасибо за внимание