ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОБЩЕЕ

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3,… , 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: ***перестановки, размещения, сочетания***.

ФАКТОРИАЛ

Предварительно познакомимся с понятием ***факториала***.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют

n- факториалом и пишут

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n .$$

Пример 1. Вычислить: а) $3!$; б) $7!-5!$; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. а) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки 5!

Тогда получим

$$5!(6 \cdot 7 - 1) = 5! \cdot 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920 .$$

в) $\frac{7!+5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 + 1)}{5! \cdot 6} = \frac{6 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{43}{6}$.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом $\boldsymbol{P_n}$, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку. (*P* - первая буква французского слова *permutation*-перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

Запомним, что ***0!=1 и 1!=1.***

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \ .$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m- число всех имеющихся элементов, n- число элементов в каждой комбинации. (A-первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что $n \leq m$.

Число размещений можно вычислить по формуле

$$\underbrace{A_m^n = m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots}_{n \text{ множителей}},$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

т.е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Пример 3. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

СОЧЕТАНИЯ

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n-натуральные числа, причем $n \leq m$).

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n (C-первая буква французского слова *combination*- сочетание).

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n, деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

СОЧЕТАНИЯ

Пример 4. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650 .$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \le n \le m)$$

(по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1} .$$

ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОМ СОБЫТИИ. ВИДЫ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, называют испытанием.

Результат этого действия или наблюдения называется событием**.**

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным.

Событие которое должно непременно произойти – достоверным**.**

Если оно заведомо не может произойти - невозможным

ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОМ СОБЫТИИ. ВИДЫ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C,* … .

ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОМ СОБЫТИИ. ВИДЫ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Полной системой событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Если полная система состоит из двух несовместных событий, то такие события называются противоположными и обозначаются $\mathbf{A}$ **и** $\bar{A}$

ПРИМЕР

Пример. В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными:

достали пронумерованный шар *(А)*;

достали шар с четным номером *(В)*;

достали шар с нечетным номером *(С)*;

достали шар без номера *(Д)*.

Какие из них образуют полную группу?

Решение. *А* - достоверное событие; *Д* - невозможное событие;

В и *С* - противоположные события.

Полную группу событий составляют *А* и *Д*, *В* и *С*.

Вероятность события, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы n, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение m к n.

СВОЙСТВА

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$.

Разделив обе части на n, получим

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

ПРИМЕР

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2 .$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом A+B, а сумму *n* событий символом $A_1+A_2+\ldots+A_n$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \text{ или}$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Следствие 1. Если событие $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Задача 1. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 - по 15000 руб, на 15 - по 10000 руб., на 25 - по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение. Пусть А, В, и С- события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события А, В и С несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0,3\,.$$

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B возникает вопрос:

Как связаны события A и B друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие ***условной вероятности.***

Определение. Пусть A и B - два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события A или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$.

Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ (P(B) \neq 0).$$

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Задача 1. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок-мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в семье два мальчика, а событие B - что один мальчик.

Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка.

Тогда $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ и по формуле находим

$$P(A/B) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3 .$$

Событие A называется ***независимым*** от события B, если наступление события B не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события A.

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Задача 2. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2- из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

находим

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$