

ПИФАГОР И ЕГО ШКОЛА

Пифагор Самосский



Великий древнегреческий ученый Пифагор родился на острове Самос в VI в. до н.э. В молодости побывал в Египте, где учился у жрецов. Говорят, что он был допущен в сокровенные святилища Египта, посетил халдейских мудрецов и персидских магов.

Школа Пифагора



Около 530 г. До н. э. Пифагор переехал в Кротон – греческую колонию в Южной Италии, где основал так называемый пифагорейский союз (или кротонское братство). В сферу интересов членов союза входили научные исследования, религиозно-философские искания, политическая деятельность.

Школа Пифагора



Они вели суровый образ жизни, превыше всего ценили самообладание, смелость и коллективную дисциплину. Пифагорейцы жили вместе, у них было совместное имущество, и даже свои открытия они считали общим достоянием.

Школа Пифагора



Деятельность союза была окружена тайной, поэтому никаких текстов от ранних пифагорейцев не осталось. Кроме того, по традиции, они все открытия приписывали Пифагору, о котором уже при жизни ходили легенды. Кто на самом деле является автором того или иного результата, неизвестно.

Школа Пифагора

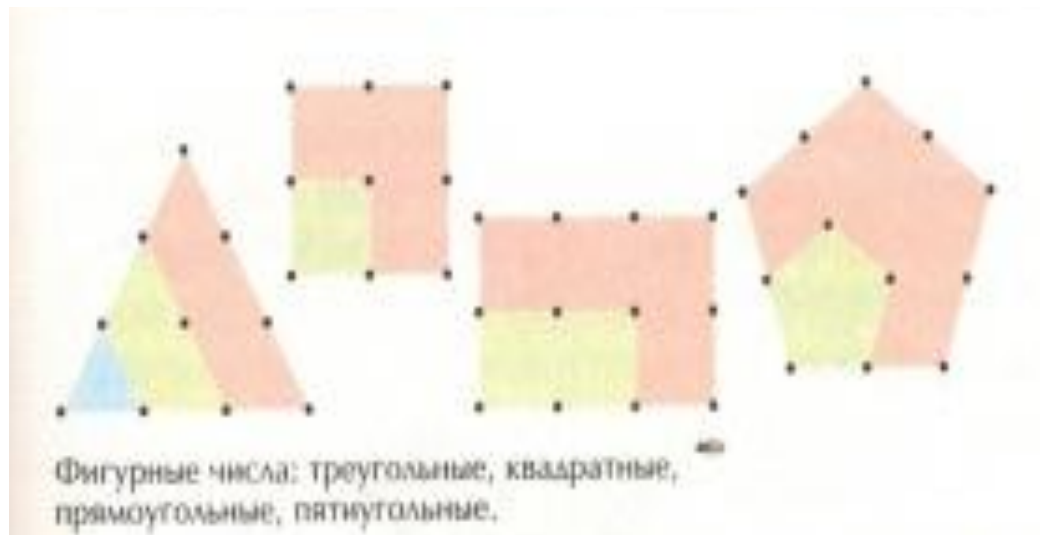


Пифагорейцы называли собственные исследования «математа», что означает «науки», и делили их на четыре части: арифметику, геометрию, астрономию и гармонию (учение о музыке).

Арифметика

Представление чисел

Пифагорейцы представляли числа как совокупности точек, образующих геометрические конфигурации – наподобие рисунка из камешков на земле. Таким образом, под числом они подразумевали «множество единиц» (греч. «аритмос») и признавали только целые положительные (т. е. натуральные) числа, разделяя их на чётные и нечётные.



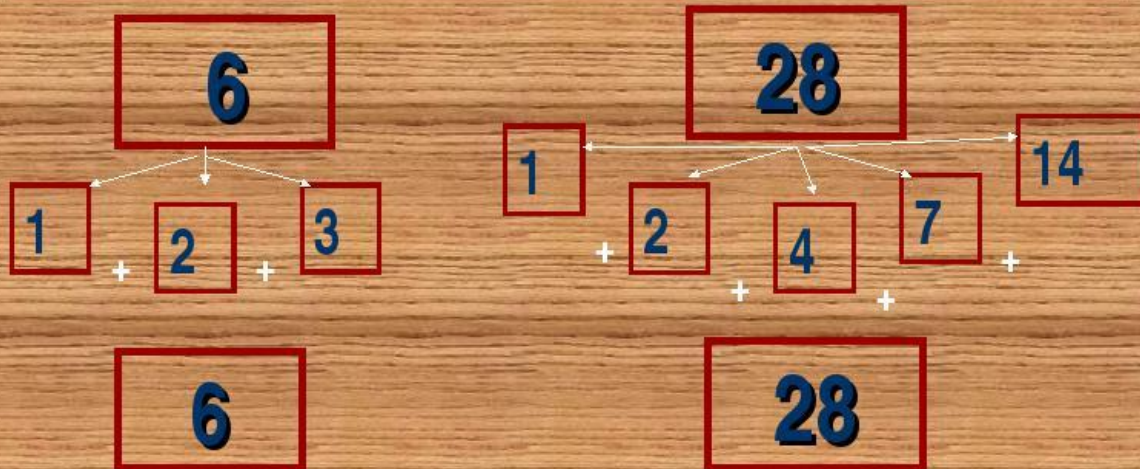
(Позже Платон говорил, что арифметика есть учение о чётном и нечётном.)

Пифагорейцы доказали первую теорему теории делимости: произведение двух чисел чётно тогда и только тогда, когда чётно по крайней мере одно из них.



Совершенные числа

Натуральное число n называется совершенным, если сумма всех его собственных делителей, отличных от самого n , в точности равна n .



Они поставили также задачу о нахождении совершенных чисел, т. е. чисел, равных сумме своих делителей (см. статью «Совершенные и дружественные числа»). Единица считалась неделимой, у неё не было «долей».

Вместо этого пифагорейцы рассматривали отношения (т. е. пропорции) целых чисел. К примеру, они могли сказать, что 2 точно так относится к 3, как 4 к 6. Говоря современным языком, они построили теорию рациональных чисел как теорию пар.

Элементы теории множеств (продолжение)

■ Числовые множества

- Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Множество целых чисел $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Множество рациональных чисел Q
- Множество действительных чисел R

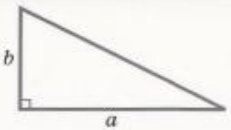
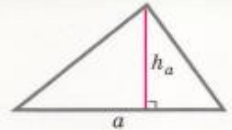
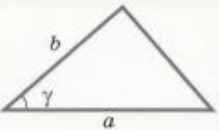
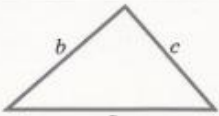
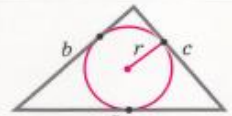
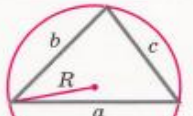
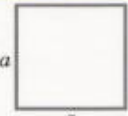
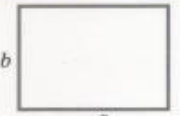
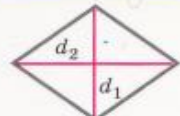


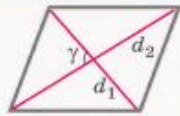
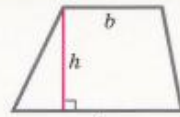
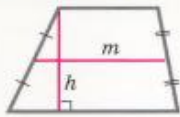
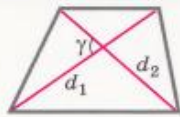
$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Её изложение дошло до нас в «Началах» Евклида (III в. до н. э.).



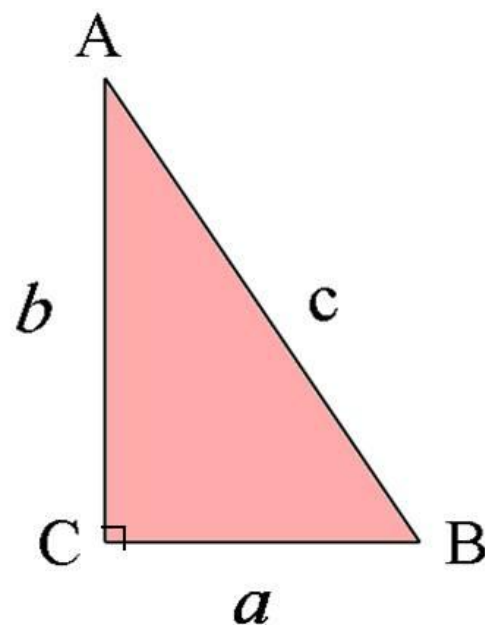
ГЕОМЕТРИЯ

Остается неизменным, сколько и какие именно аксиомы положили ранние пифагорейцы в основу своей геометрии, но все они относились к планиметрии прямолинейных фигур. Изучались свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и других плоских фигур, сравнивались их площади.

ПЛОЩАДЬ ФИГУР		
ТРЕУГОЛЬНИК		
 $S = \frac{1}{2}ab$	 $S = \frac{1}{2}ah_a$	 $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ $p = \frac{a+b+c}{2}$	 $S = pr,$ $p = \frac{a+b+c}{2}$	 $S = \frac{abc}{4R}$
КВАДРАТ	ПРЯМОУГОЛЬНИК	РОМБ
 $S = a^2$	 $S = ab$	 $S = \frac{1}{2}d_1d_2$
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ		
 $S = ah_a$	 $S = ab \sin \alpha$	 $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$
ТРАПЕЦИЯ		
 $S = \frac{1}{2}(a+b)h$	 $S = mh$	 $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$

Венчало их систему знаний
доказательство знаменитой теоремы Пифагора, которая до этого была известна лишь как факт для некоторых частных случаев. Трудно переоценить значение теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора



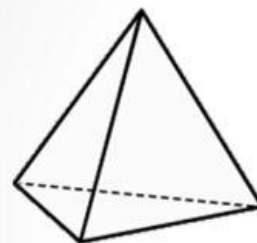
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

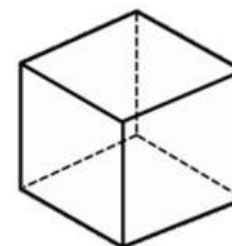
$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

Ее обобщение и сегодня лежит в основе определения всех метрических пространств. Можно утверждать, что и в стереометрии пифагорейцы достигли значительных успехов. По свидетельству греческого историка и философа V в. Прокла, именно они построили пять правильных многогранников:

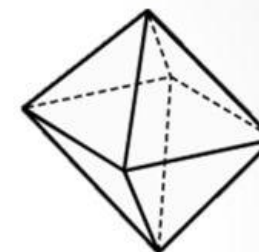
Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.



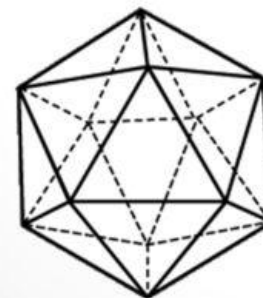
Тетраэдр {3,3}



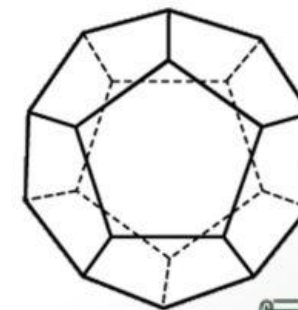
Куб {4,3}



Октаэдр {3,4}



Икосаэдр {3,5}



Додекаэдр {5,3}

Тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Правда, многие современные исследователи считают, что Пифагору были известны лишь куб, тетраэдр и додекаэдр, а октаэдр и икосаэдр открыл Теэтет Афинский (IV в. До н. э.), талантливый ученик пифагорейца Феодора Киренского и Платона.



Тетраэдр



Гексаэдр (куб)



Октаэдр



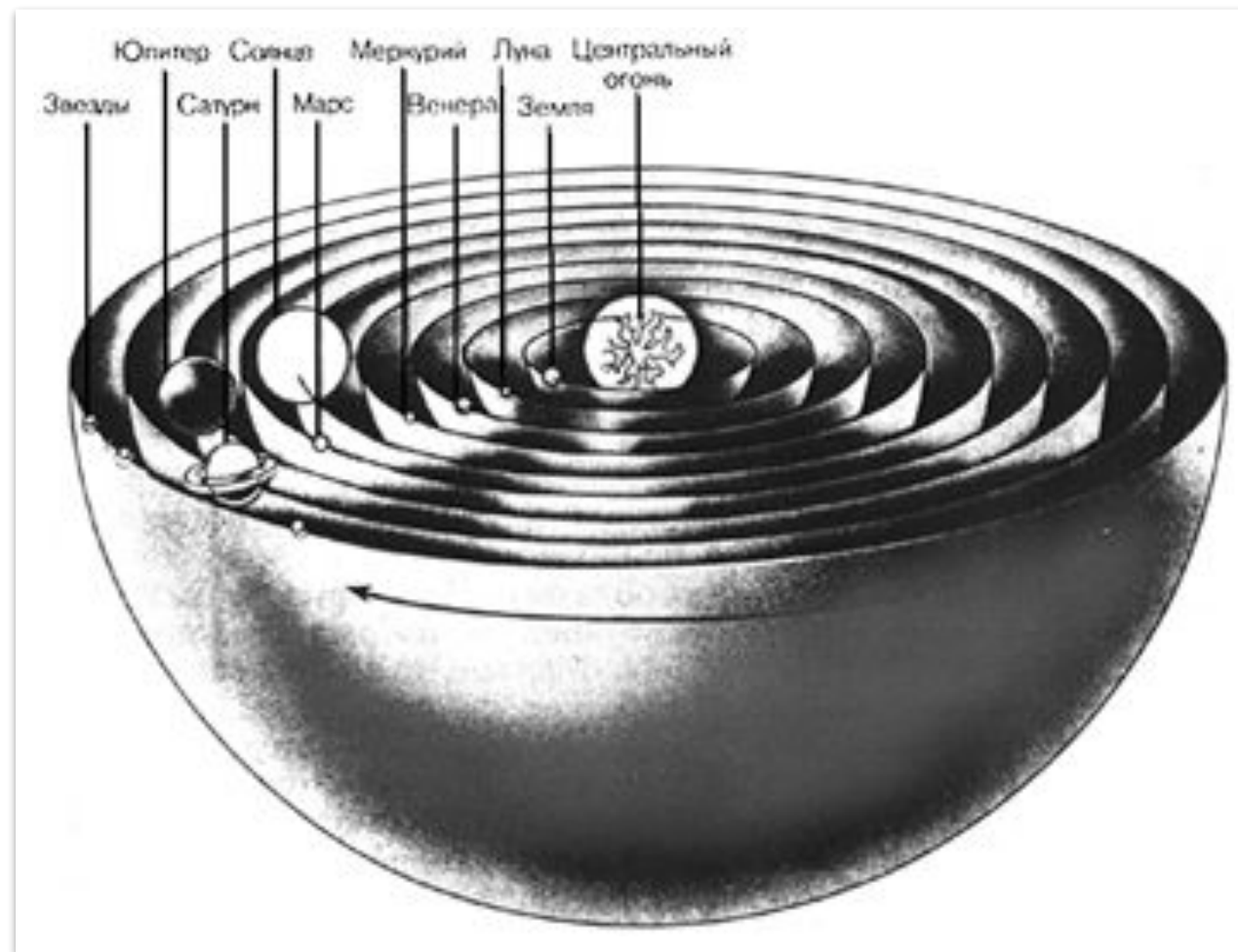
Додекаэдр



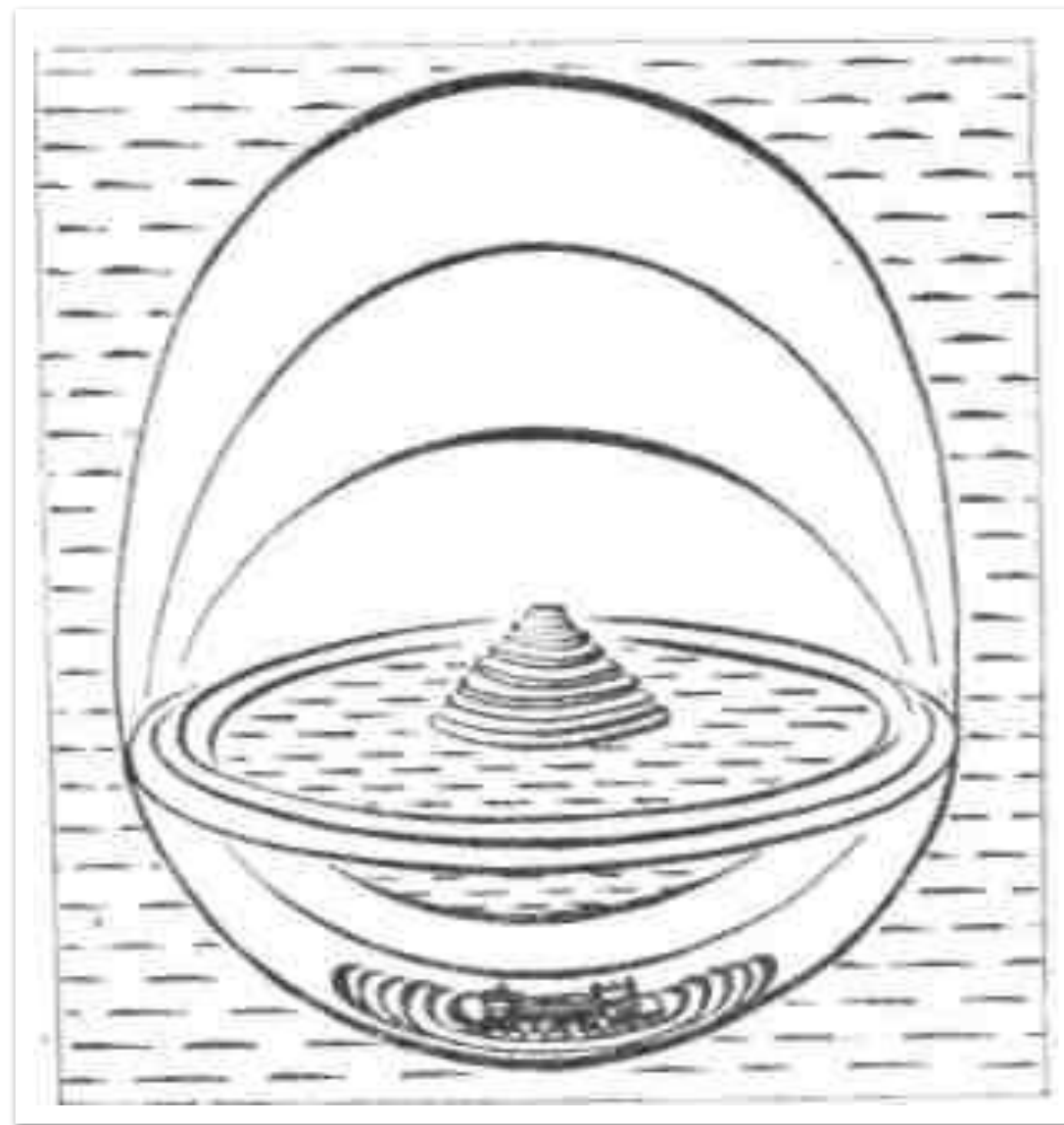
Икосаэдр

Астрономия и гармония

Пифагорейцы считали, что земля имеет форму шара и находится в центре Вселенной: ведь нет никаких оснований, чтобы она была смещена или вытянута в какую-то одну сторону. Солнце же, Луна и пять планет (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн) движутся вокруг Земли.



Расстояния от них до нашей планеты таковы, что они как бы составляют семиструнную арфу, и при их движении возникает прекрасная музыка – музыка сфер. Обычно люди не слышат ее из-за суеты жизни, и лишь после смерти некоторые из них смогут насладиться ею. А Пифагор слышал ее и при жизни.



Строй арфы должен был подчиняться законам арифметики. В частности, как обнаружили пифагорейцы, такие музыкальные интервалы, как октава, квинта и кварта, соответствуют звучанию пары одинаково натянутых струн, длины которых находятся в отношении 1:2, 2:3, и 3:4. Все эти открытия и привели пифагорейцев к идее о том, что «все есть число», т.е. законы природы – не что иное, как законы целых чисел и их отношений.

14 чистая малая большая малая большая чистая увеличенная

Прима Секунда Терция Кварта

Т
А
В 3 3 3 4 3 0 3 1 3 2 3 3 3 4

Detailed description: This musical staff shows four intervals on a treble clef. The first interval is 'Прима' (unison), labeled 'чистая'. The second is 'Секунда' (second), labeled 'малая'. The third is 'Терция' (third), labeled 'большая'. The fourth is 'Кварта' (fourth), labeled 'чистая' and 'увеличенная'. Below the staff, a table of fret numbers is provided for each interval: Prima (3, 3), Sekunda (3, 4), Terция (3, 0), and Кварта (3, 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4).

21 чистая малая большая малая большая чистая

Квинта Секста Септима Октава

0 1 2 3 0 1
3 3 3 3 3 3

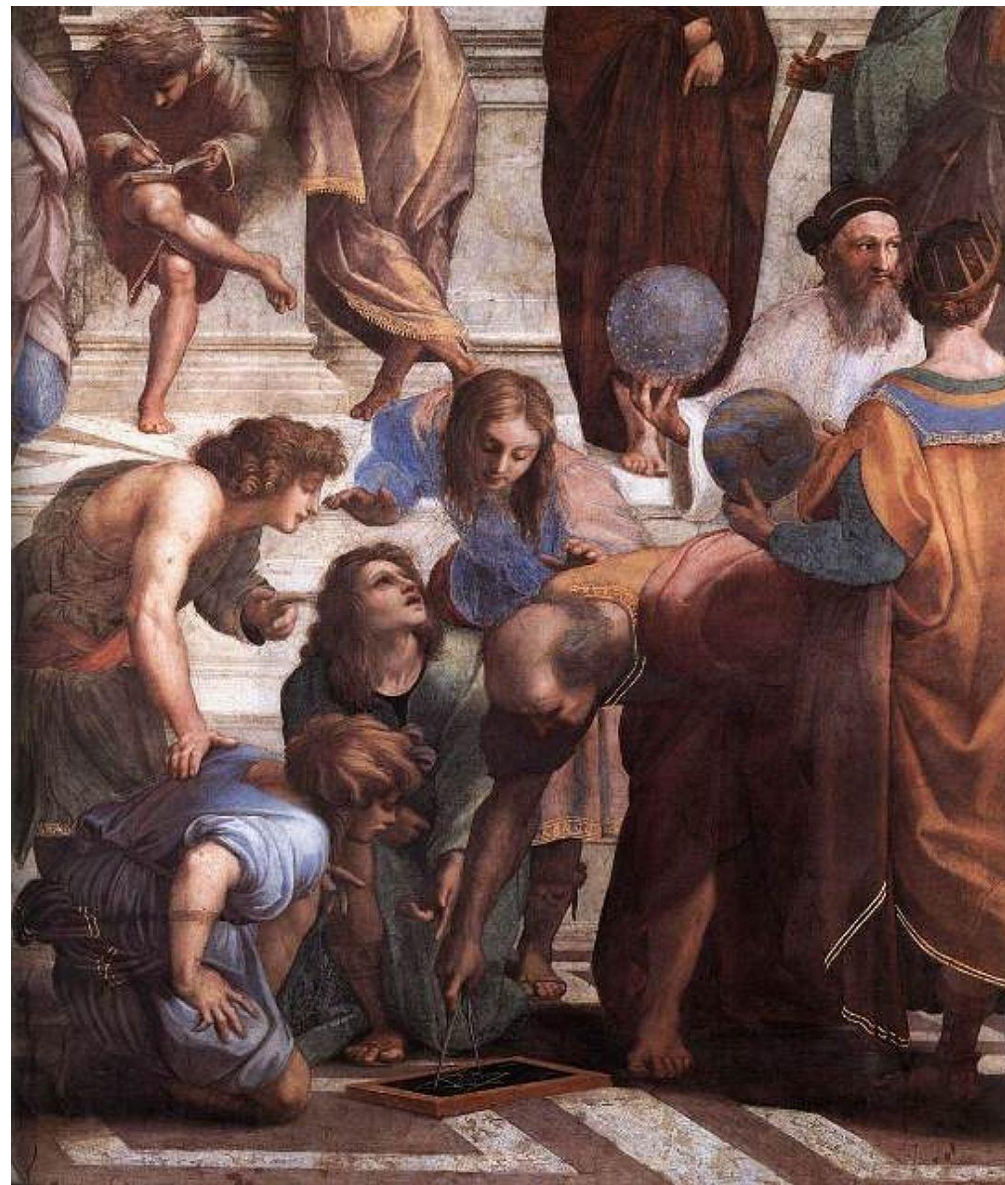
Detailed description: This musical staff shows four intervals on a treble clef. The first is 'Квинта' (fifth), labeled 'чистая'. The second is 'Секста' (sixth), labeled 'малая'. The third is 'Септима' (seventh), labeled 'большая'. The fourth is 'Октава' (octave), labeled 'чистая'. Below the staff, a table of fret numbers is provided for each interval: Квинта (0, 3), Секста (3, 1), Септима (3, 2, 3, 3), and Октава (3, 0, 1, 3).

ПИФАГОРЕИЗМ

- **«Все есть число»**
- Вещь может быть познана только через раскрытие ее числа.
- «4» – согласие и дружба
- «5» – богатство и благо
- «10» - вселенная

Открытие иррациональности

Вначале пифагорейцы полагали, что отношения любых физических или геометрических величин можно выразить отношениями целых чисел. В частности, они считали, что все отрезки соизмеримы, т.е. каковы бы ни были два отрезка AB и CD , существует такой отрезок e , который целое число раз укладывается как по длине AD , так и по длине CD , а значит, геометрию можно свести к арифметике.



Однако вскоре пифагорейцы сделали открытие, которое перевернуло все их взгляды они доказали, что отношение диагонали к стороне квадрата нельзя выразить отношением чисел.

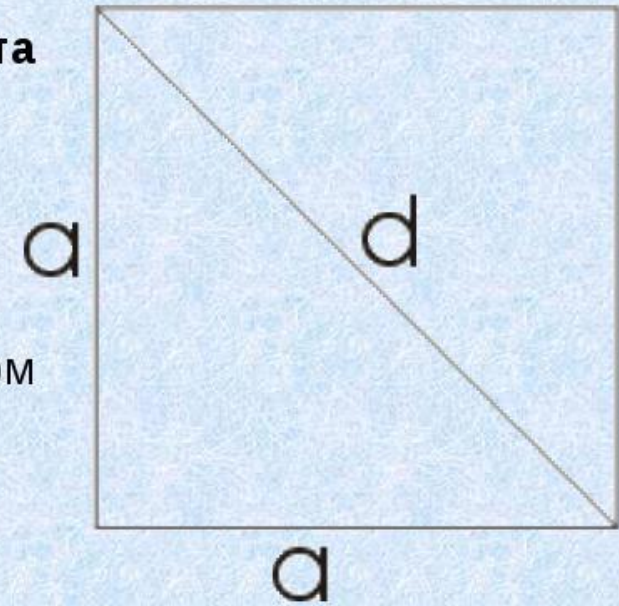
Применение теоремы Пифагора

- **Диагональ d квадрата** со стороной a можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом a . Таким образом,

$$d^2 = 2a^2$$

или

$$d = a\sqrt{2}$$



Позже были найдены и другие несоизмеримые отрезки. В частности, Феодор Киренсон обнаружил, что стороны квадратов с площадями 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. А Теодор доказал, что если площадь квадрата выражается любым целым неквадратным числом N , то сторона его несоизмерима с единицей.



Иными словами, было установлено: если $N \neq a^2$, то не выражается никаким рациональным числом - он иррационален.

Иррациональные числа

Иррациональные числа – это числа которые невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m - целое число, n – натуральное число.

Иррациональные числа – это бесконечные непериодические десятичные дроби.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414213562\dots; & \sqrt{3} &= 1,7320508075\dots; \\ \pi &= 3,14159\dots; & e &= 2,7182845 \\ & & & \text{- иррациональные числа.}\end{aligned}$$

И тогда древнегреческие мыслители заключили, что арифметика не может служить основой для геометрии. Геометрические величины решили они, имеют более общую природу, числа и их отношения. Значит, в основу математики следует положить геометрию!

Пифагор и его ученики предавали числам особое значение, приписывая каждому особую силу:

Число 1 - число цели, которое проявляется в форме агрессивности и амбиции.

▣ **Число 2** - число с крайностями. Оно поддерживает равновесие, смешивая позитивные и негативные качества.

▣ **Число 3** - означает неустойчивость. Оно объединяет талант и весёлость и символизирует приспособляемость.