ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Лектор – к.ф.-м.н., доц. Смирнова Татьяна Николаевна

Доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем (Б-304, Б-305)

https://vk.com/id126588484

ВЫПИСКА ИЗ УЧЕБНОГО ПЛАНА

1 академический час – 45 астрономических минут

Лк – 32 ч (16 занятий)

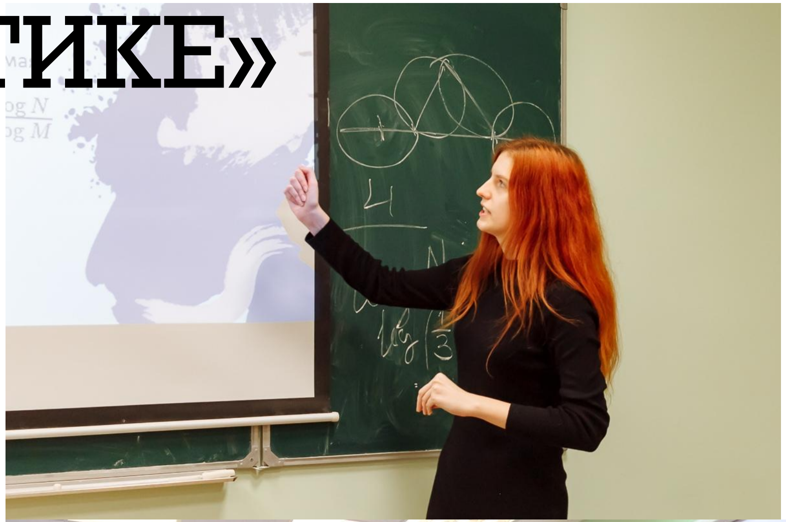
Практ – 64 ч (32 занятия)

I семестр – экзамен

ДОПУСК К ЭКЗАМЕНУ

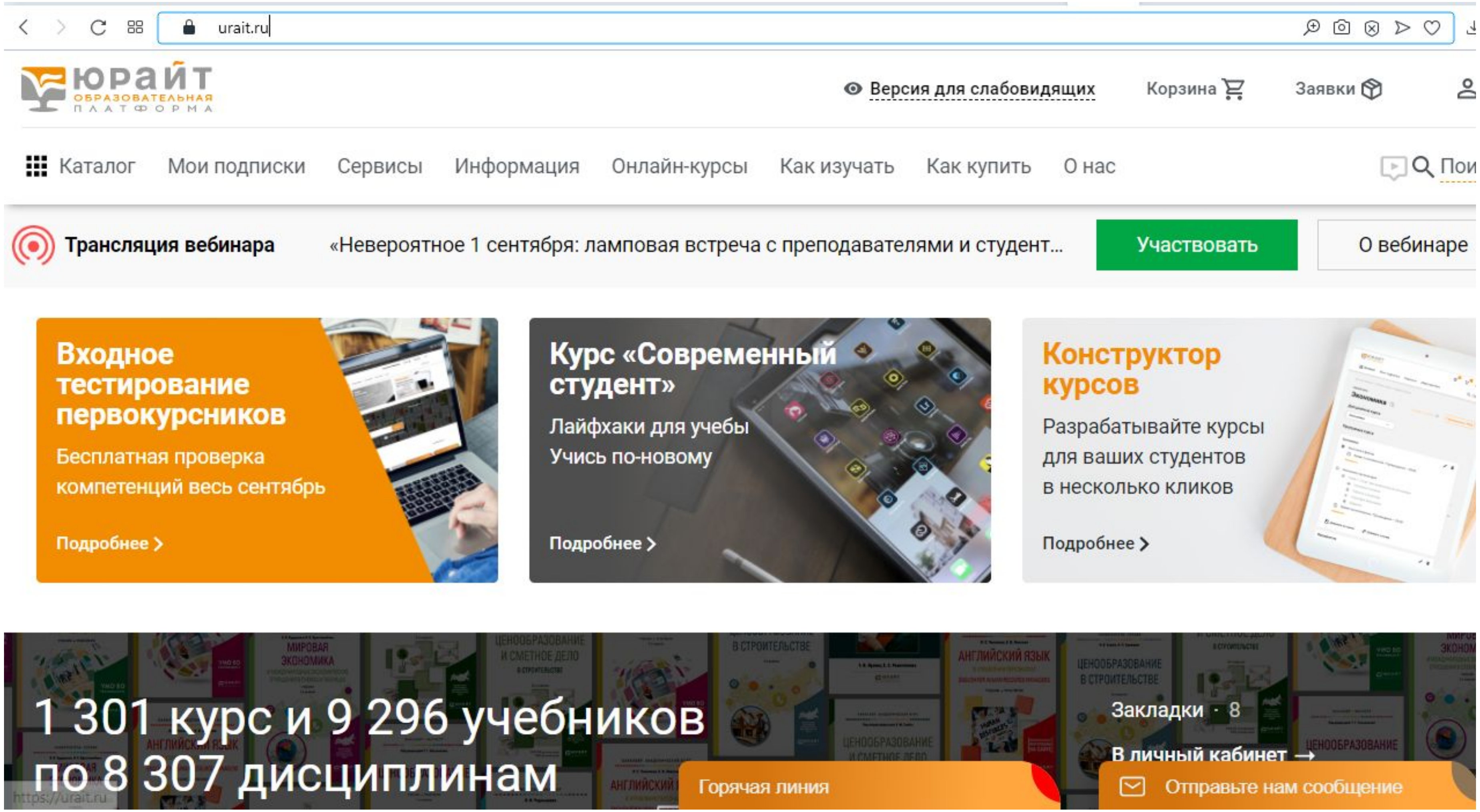
- 1. Посещаемость занятий
- 2. Успеваемость (лекционные конспекты, выполнение практических заданий в указанный срок)
- 3. Отработка пропущенных занятий: конспекты, защита реферата (4 ч. пропуска = 1 реферат)
- 4. Бонусы: участие в конференциях, подготовка статей к публикации

СТУДЕНЧЕСКИЙ КРУЖОК «СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ»



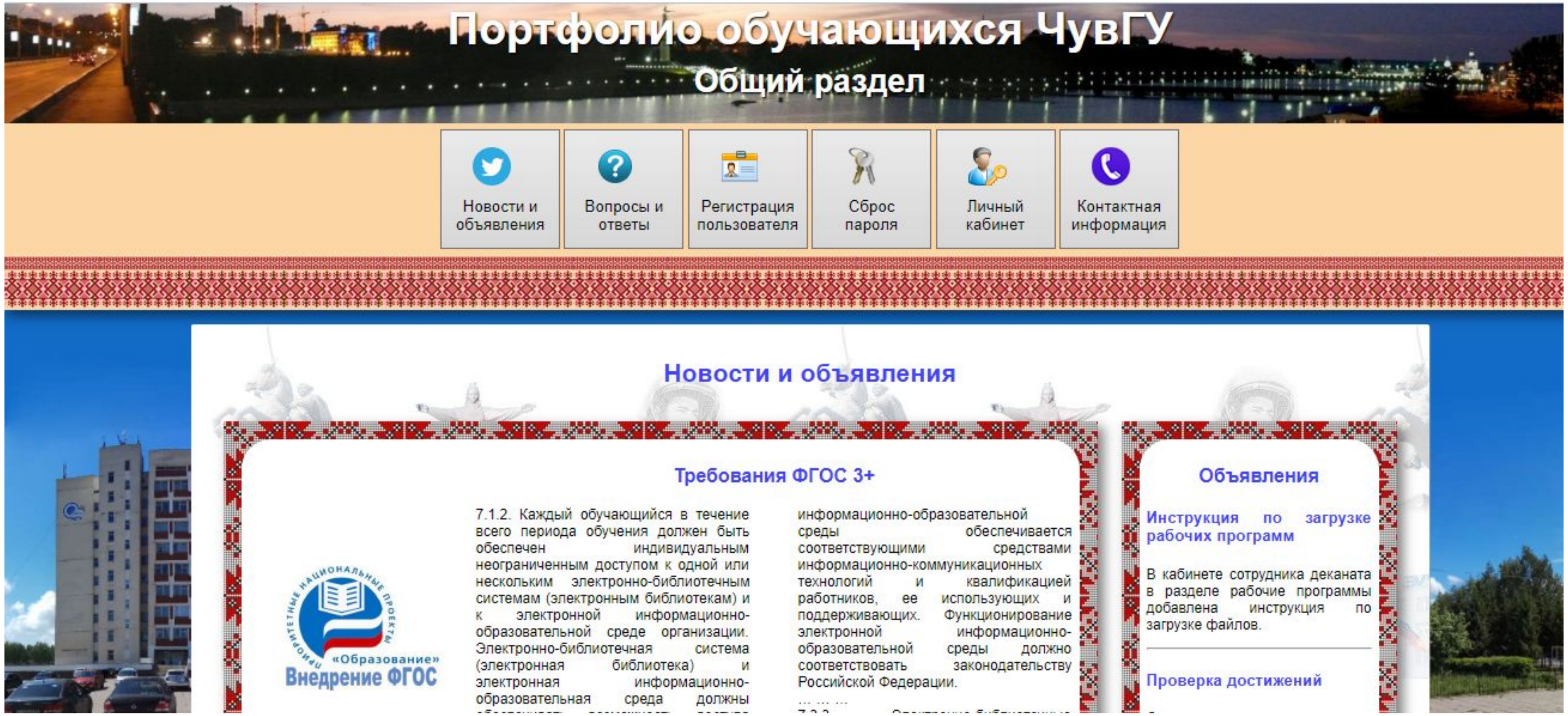
СТУДЕНЧЕСКИЙ КРУЖОК «СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ»

HTTPS://URAIT.RU

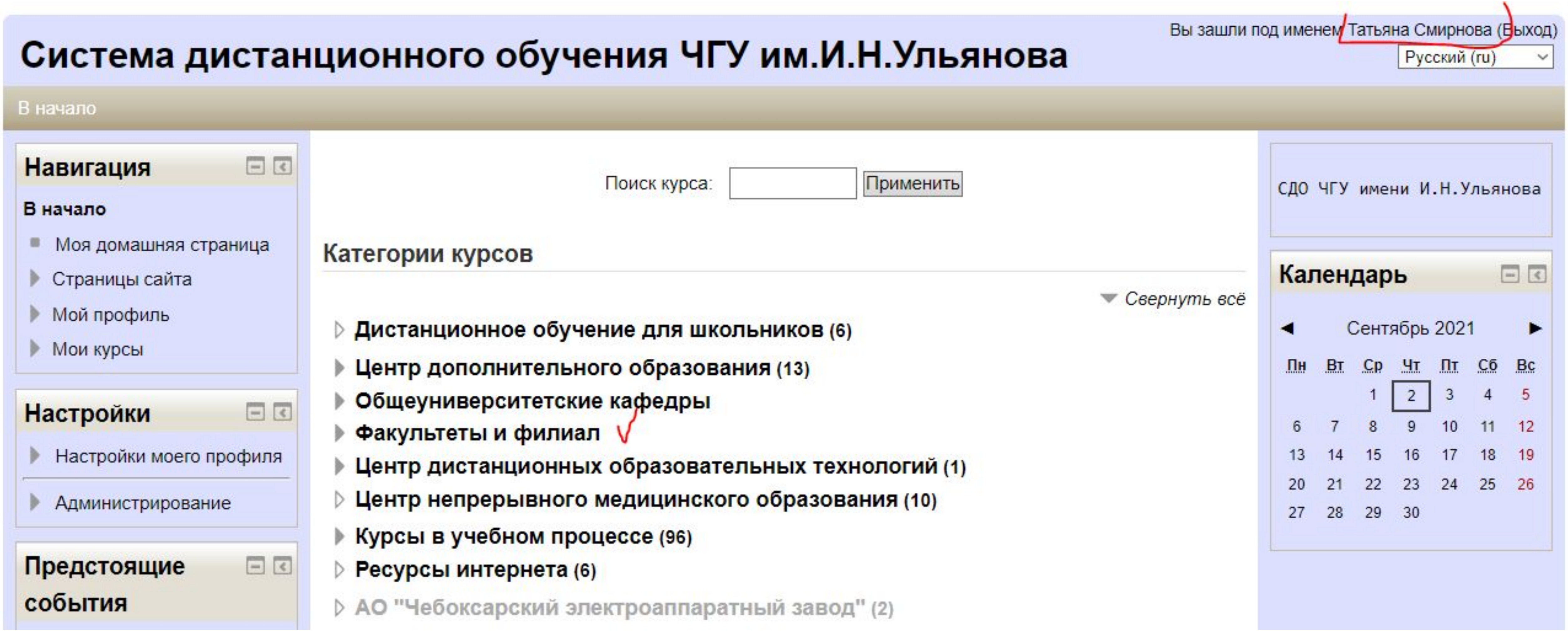


ЗАРЕГИСТРИРОВАТЬСЯ В СИСТЕМАХ

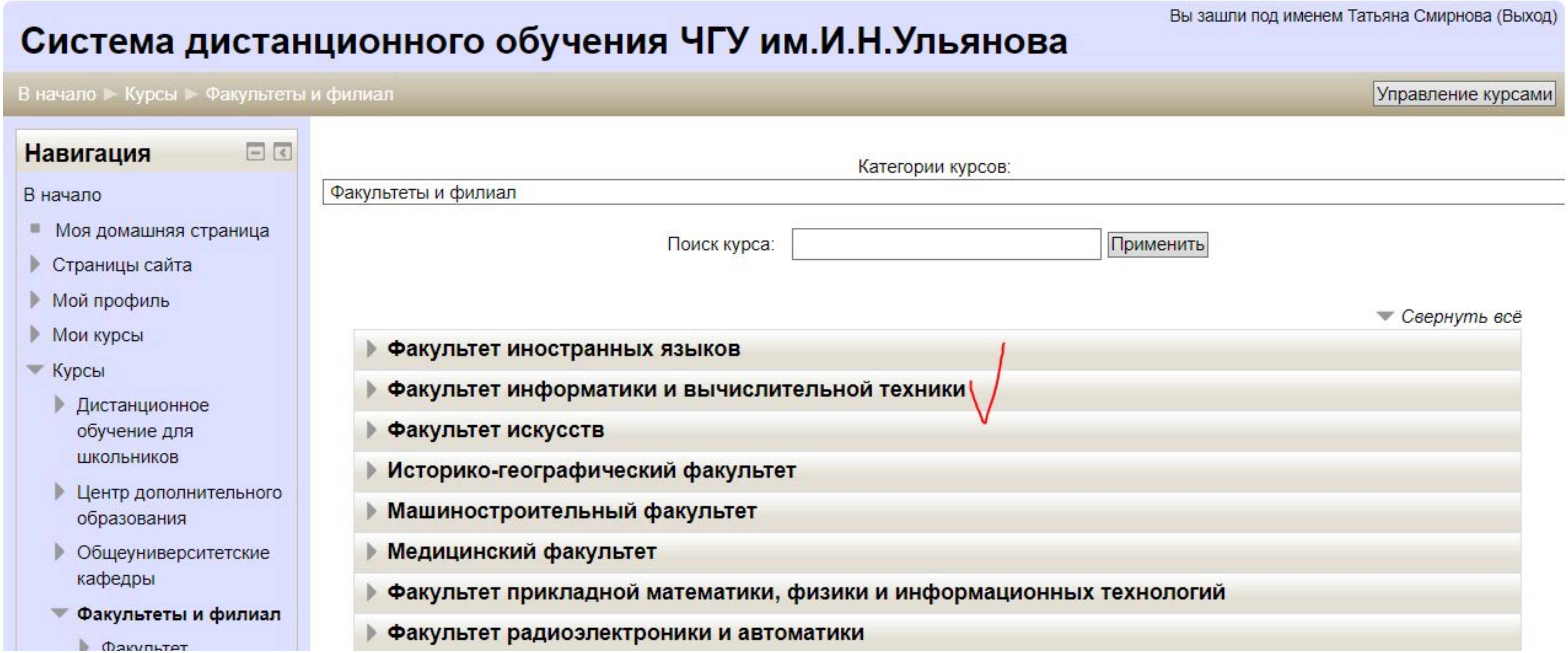
- https://lk.chuvsu.ru



- https://moodle.chuvsu.ru



- https://moodle.chuvsu.ru



Пароль dm

- (магистратура)
- Информационная безопасность (бакалавриат, специалист)
- Защита персональных данных
- Алгебра и геометрия
- ДМ_КТ
- Информатика дист
- ОФП
- Матан_4сем_ЗКТ4
- ЗКТ_МА
- ТВМСиСП
- АиГ
- ИБ
- ДМ_ИВТ
- МИЗ
- ЭВМ и ПУ (семестр 4)

Информационная безопасность

Рассматриваются вопросы информационной безопасности и уровни ее обеспечения, компьютерные вирусы и защита от них, механизмы обеспечения информационной безопасности.
Курс может быть рекомендован преподавателям, научным работникам, студентам, магистрантам, аспирантам, занимающимся проблемой обеспечения информационной безопасности.

ДискретнаяМатематикаИВТ

Курс "Дискретная математика" предназначен для обучающихся направлений подготовки:

09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профили "Вычислительные машины, комплексы, системы и сети", "Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем", "Программное обеспечение автоматизированных систем электроэнергетики",

10.03.01 Информационная безопасность, профиль "Информационно-аналитические системы финансового мониторинга",

10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем, Специализация № 4 "Безопасность открытых информационных систем"

очной формы обучения.

Разработчик: к.ф.-м.н., доц. Смирнова Т.Н., доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем.

ДискретнаяМатематикаИВТ

В начало ▶ Мои курсы ▶ Факультеты и филиал ▶ Факультет информатики и вычислительной техники ▶ ДМ_ИВТ

Навигация

- В начало
  - Моя домашняя страница
  - Страницы сайта
  - Мой профиль
  - Текущий курс
    - ДМ_ИВТ
      - Участники
      - Значки
      - Общее
      - 1. Элементы теории множеств
      - 2. Комбинаторика
      - 3. Алгебраические структуры
      - 4. Элементы теории графов
      - 5. Сетевые задачи дискретной математики
      - Информационные ресурсы
      - Оценочные материалы
  - Мои курсы

Настройки

Новостной форум

Итоговое тестирование

1. Элементы теории множеств

Видеолекция

1.1. Конспект лекции документ PDF, 2.2Мбайт

1.2. Тест по лекции

Выполнить расчетно-графические работы 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4 по книге Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах

2. Комбинаторика

2.1. Конспект лекции документ PDF, 2Мбайт

2.2. Тест по лекции

Выполнить расчетно-графические работы 5.1 и 5.2 по книге Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах

3. Алгебраические структуры

3.1. Конспект лекции Презентация PowerPoint, 203.5Кбайт

3.2. Тест по лекции

ВВЕДЕНИЕ

- **Дискретная математика** (дискретный анализ) – совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных (прерывных) объектов.
- *Для сравнения, объектом изучения в классической математике выступают непрерывные объекты*

НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ, СПОСОБСТВУЮЩИЕ РАЗВИТИЮ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ:

- Теоретическая кибернетика,
- Теория кодирования,
- Теория графов,
- Математическая логика
- Теория автоматов и т.д.

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ПЛАН

- 1. Основные понятия.
- 2. Операции над множествами.
- 3. Соответствия между множествами.
- 4. Классификация множеств. Мощность множества
- 5. Кортежи. Декартовы произведения
- 6. Отношения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Пак, В. Г. Дискретная математика: теория множеств и комбинаторный анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / В. Г. Пак. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 235 с. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/453113.
- Вороненко А. А. Дискретная математика: задачи и упражнения с решениями : учебно-методическое пособие / Вороненко А. А., Федорова В. С. - Москва: Инфра-М, 2014. – 104 с.

- 3. Палий, И. А. Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие для вузов / И. А. Палий. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 370 с. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/447489.
- **4. Тишин В. В.** Дискретная математика в примерах и задачах: [учебное пособие] / Тишин В. В. - СПб: БХВ-Петербург, 2017. – 335 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Множество**, **элементы множества** - первичные базисные неопределяемые понятия теории множеств.
- Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**.

- **Например**, множество книг в библиотеке, множество студентов в группе, множество натуральных чисел N, множество букв русского алфавита, множество делителей числа 100 и т.д.
- *Приведите примеры множеств.*

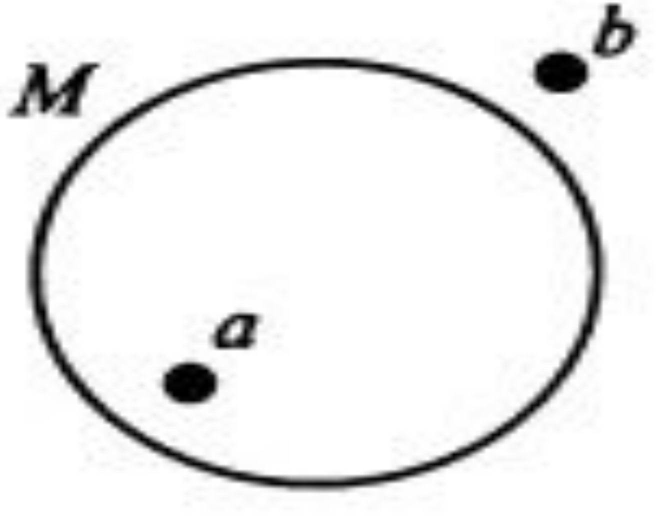


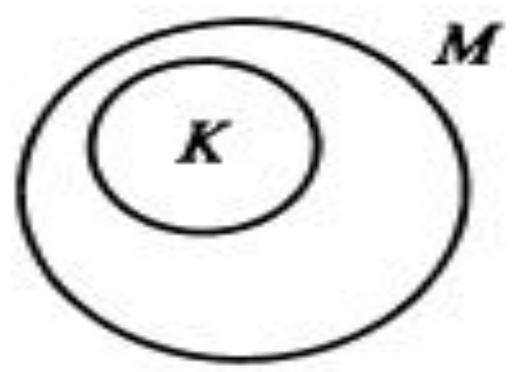
Иллюстрация кругами Эйлера ($a \in M$, $b \notin M$)

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА

- 1) перечисление всех элементов, например,
- A={2, 4 , 7, 8, 11}, B={0, 1};
- 2) указание свойств, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству, например, A={x| x-10>20}.

- Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим признаком, то оно называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$. Например, множество целых решений неравенства $5 < x < 6$ является пустым:
- $A=\{x \mid x \in Z, 5 < x < 6\} = \varnothing$.
- Множество, не являющееся пустым, называется ***непустым***.

- Множество К, все элементы которого обладают таким же признаком, что и элементы множества М, называют **подмножеством** множества М и обозначают К $\subset$ М .



- Иллюстрация кругами Эйлера (К$\subset$М)

- Например, множество целых чисел **Z** является **подмножеством** множества рациональных чисел Q.

- Для числовых множеств справедливо соотношение: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, где N – множество, натуральных чисел, Q – рациональных, R – действительных, C – комплексных чисел.

- Для любого непустого множества М справедливо:
- $M \subset M$,
- $\varnothing \subset M$

- ***Универсальным*** называют множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

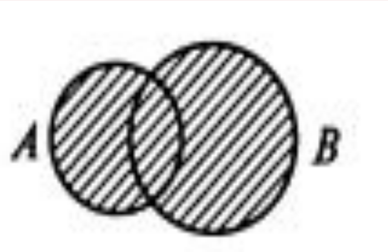
- Например, множество планет Солнечной системы:
- U = {Земля, Марс, Венера, Юпитер, Сатурн, Уран, Меркурий, Нептун}.
- *Понятие универсального множества четко не определено, т.е. некорректно.*

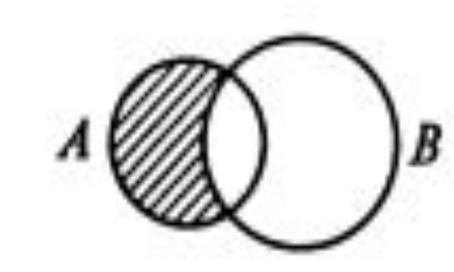
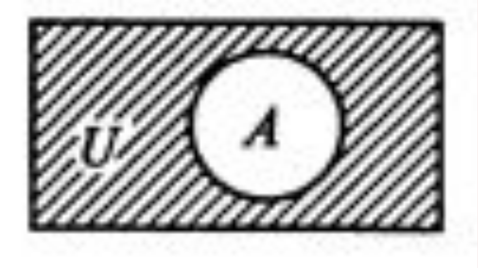
- ***Равными*** называют два множества A и B, состоящие из одинаковых элементов. Обозначение: $A = B$.
- $A=\{x \mid 4x-8 = 0\}$, $B=\{x \mid \log_x 4=2\}$, $A=B$
- Равны множества букв, из которых составлены слова «навес» и «весна».

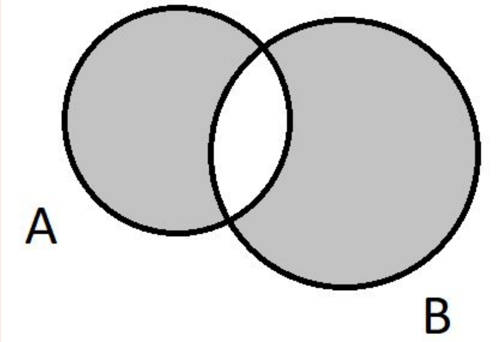
- Количество элементов множества А называется ***мощностью множества (кардинальным числом)*** и обозначается |А| или n(А).

- Например
- A – множество букв русского алфавита.
- $|A| = 33$

2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Название операции	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
1. Пересечение множеств $A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одновременно A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ **и** $x \in B\}$
2. Объединение множеств $A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ **или** $x \in B\}$

Название операции	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
3. Разность множеств A\B		Те и только те элементы множества A, которые не принадлежат B	A\B={x | x∈A, x∉B}
4. Дополнение к множеству A (Ā, A', ¬A)		Те и только те элементы, которые не принадлежат множеству A (дополняют его до унив. U)	Ā={x| x∉A}=U\A

Название операции	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
5. Симметрическая разность (кольцевая сумма) A Δ B (A⊕B)		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: либо А, либо В, но не обоим одновременно	$A \Delta B =$ $= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$ $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

- 1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ — **переместительный** закон (**коммутативность**) для операций объединения и пересечения.
- 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - **сочетательный** закон (**ассоциативность**) для операций объединения и пересечения.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

- 3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ — **распределительный** закон (**дистрибутивность**) пересечения относительно объединения множеств.
- 4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — **распределительный** закон объединения относительно пересечения множеств.

- 5. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \subset (A \cup B)$ — законы **поглощения**.
- 6. $U = \varnothing'$ и $\varnothing = U'$, т.е. универсальное и пустое множества являются **дополнениями** друг друга.

- 7. Если обозначить через A_i все подмножества A_1, A_2, A_3, …, A_n множества A, то будут справедливы равенства:

$$A = \bigcup_i A_i \qquad\qquad A \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i \left(A \setminus A_i \right)$$

- 8. Для любого множества $X \subset U$ справедливо $(X')' = X$.
- 9. Для любых двух множеств X и Y справедливо: если $X \subset U$, $Y \subset U$, то $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ или $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$.

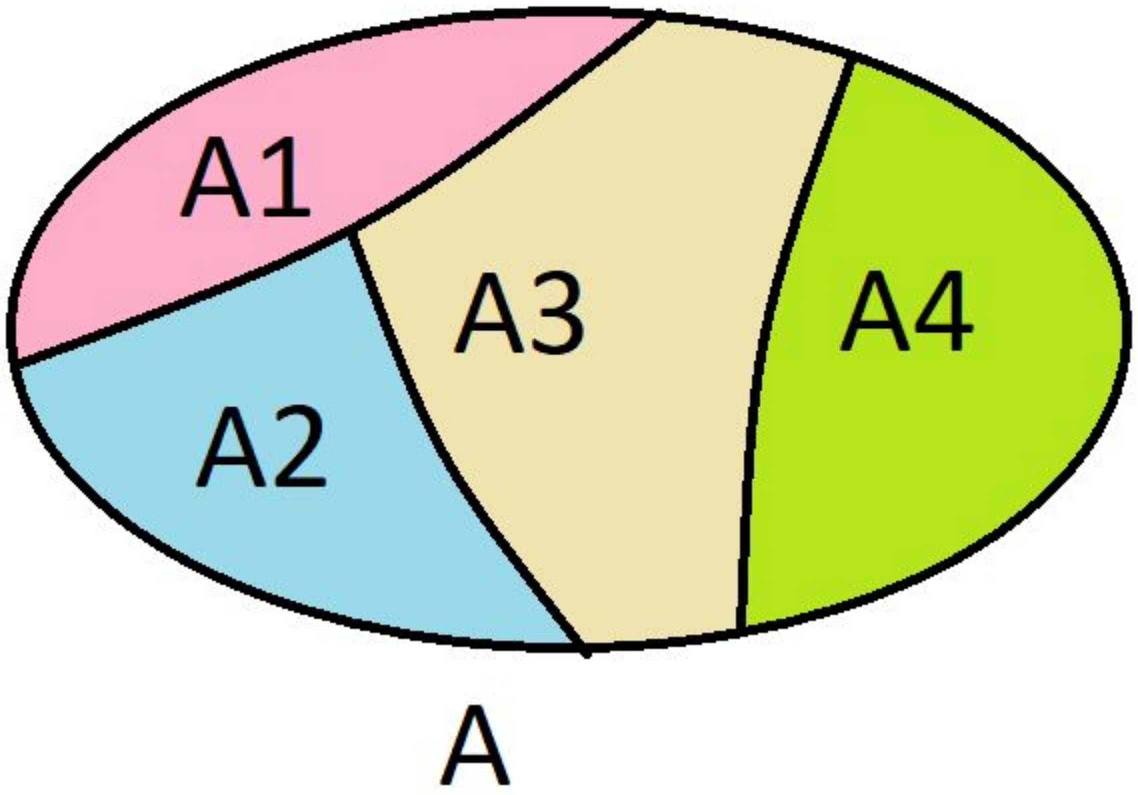
- 10. Множество A можно разбить на классы непересекающихся подмножеств A_i, если:

• объединение всех подмножеств совпадает с множеством A:

$$A = \bigcup_i A_i$$

• пересечение любых двух различных подмножеств пусто, т.е. $\forall\ i \neq j$ выполняется

$$A_i \cap A_j = \varnothing.$$



$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,$$
$$A_1 \cap A_3 = \varnothing,$$
$$A_1 \cap A_4 = \varnothing,$$
$$A_2 \cap A_3 = \varnothing,$$
$$A_2 \cap A_4 = \varnothing,$$
$$A_3 \cap A_4 = \varnothing.$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$$

3. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

- Пусть даны два множества $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2 \ldots\}$.
- Тогда пары (a_i, b_j) задают ***соответствие*** между множествами A и B, если указано правило R, по которому для элемента a_i из множества A выбирается элемент b_j из множества B.

- Например, русско-английский словарь устанавливает соответствие значений и написаний слов русского и английского языков.

- Пусть задано соответствие R между множествами A и B, т. е. R: (a; b),
- $a \in A$, $b \in B$.
- Для некоторого элемента **a** множества **A** поставлен в соответствие некоторый элемент **b** из множества **B**, который называется ***образом элемента*** **a:**
- $b = R(a)$.
- Тогда $a = R^{-1}(b)$ – *прообраз* элемента $b \in B$,
- Каждому прообразу соответствует единственный образ.

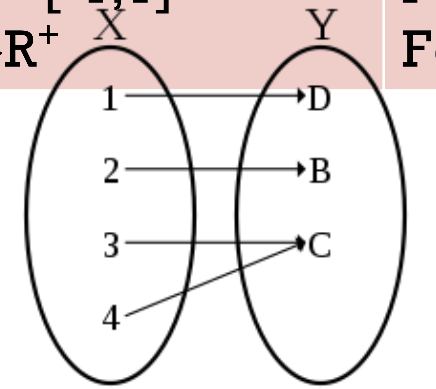
- Образ множества A при соответствии R называется ***множеством значений*** этого соответствия и обозначается R(A), если R(A) состоит из образов всех элементов множества A:
- $R(A) = \{b \mid \forall\ a \in A, b = R(a)\}$.

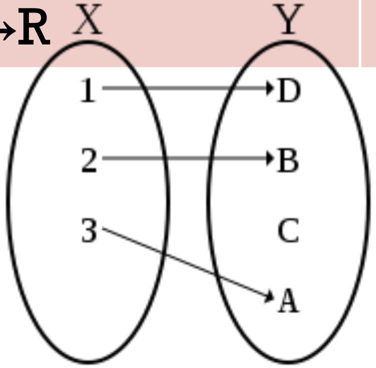
- Прообраз множества B при некотором соответствии R называют ***областью определения*** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(B)$, т.е.
- $R^{-1}(B) = \{a \mid \forall b \in B, \exists a \in A: R(a) = b\}$,
- здесь R^{-1} является обратным соответствием для R.

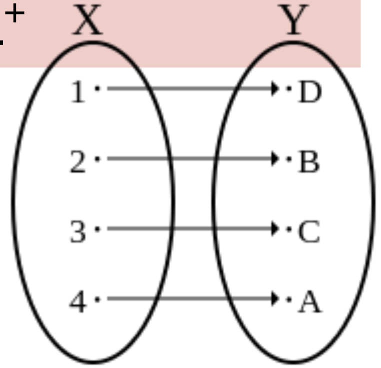
- Для описания соответствий между множествами используют понятие отображения (функции) одного множества на другое.
- **Для задания отображения необходимо указать**:
- • область определения данного отображения D(f);
- • множество значений этого отображения E(f);
- • закон, или, соответствие f между этими множествами.
- Обозначение f: A → B

Виды отображений (по мощности)

Сюръекция (отображение множества X **на** множество Y)	*Инъекция* («вложение», отображение множества X **во** множество Y)	*Биекция (взаимно-однозначное соответствие)*
каждому элементу множества X указан **единственный** элемент множества Y, а каждому элементу множества Y можно указать **хотя бы один** элемент множества X	каждому элементу множества X соответствует **единственный** элемент множества Y, а каждому элементу Y соответствует **не более** одного прообраза из X	каждому элементу множества X соответствует **единственный** элемент множества Y,каждому элементу множества Y соответствует **единственный** элемент множества X
$F(x)=\sin x$; $R\to[-1;1]$ $F(x)=x^2$; $R \to R^+$	$F(x)=x^2$; $R^+\to R$ $F(x)=\ln x$; $R^+\to R$	$F(x)=x^3$; $R\to R$ $F(x)=e^x$; $R\to R^+$







- Пусть G – график соответствия R: $X \to Y$, т.е. множество пар вида (x,y), $x \in X$, $y \in Y$:

$G=\{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Область определения соответствия R обозначим $пр_1G$,

область значений соответствия R обозначим $пр_2G$.

Соответствие R называется **всюду определенным**, если $пр_1G=X$.

Соответствие R называется **сюръективным**, если $пр_2G=Y$.

Соответствие R называется **функциональным** (**функцией**), если его график не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

Соответствие R называется **инъективным**, если его график не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Соответствие называется **взаимно-однозначным**, если оно функционально и инъективно.

Соответствие называется **биекцией**, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример

Даны множества X={a, b, c, d},

Y = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {a, b), B = {3, 4} и

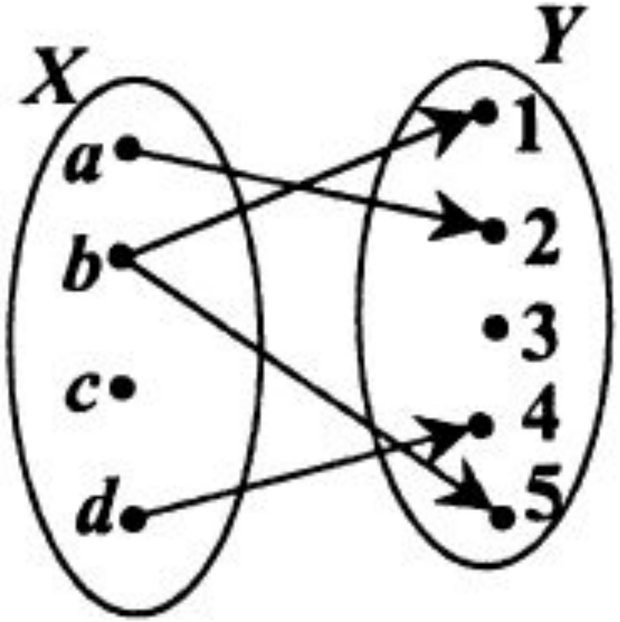
график соответствия G = {(a, 2),(b, 1), (b, 5), (d, 4)}.

1. Определить, является ли соответствие всюду определённым, сюръективным, функциональным, инъективным.
2. Найти образ R(A) и прообраз R^{-1}(B).

Решение:

Построим соответствующий граф

G = {(a, 2), (b, 1), (b, 5), (d, 4)}



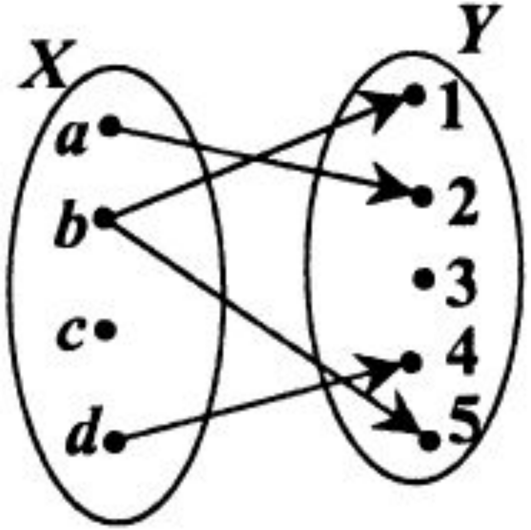
1. Соответствие **не всюду определено**, так как $пр_1 G=\{a, b, d\} \neq X$.

Соответствие **не сюръективно**, так как $пр_2 G = \{1, 2, 4, 5\} \neq Y$.

Соответствие **не функционально**, так как его график содержит две пары (b, 1) и

(b, 5) с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами (из точки b выходят две стрелки).

Соответствие **инъективно**, так как его график G не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами (ни в одну точку множества Y не вхо… …лки).

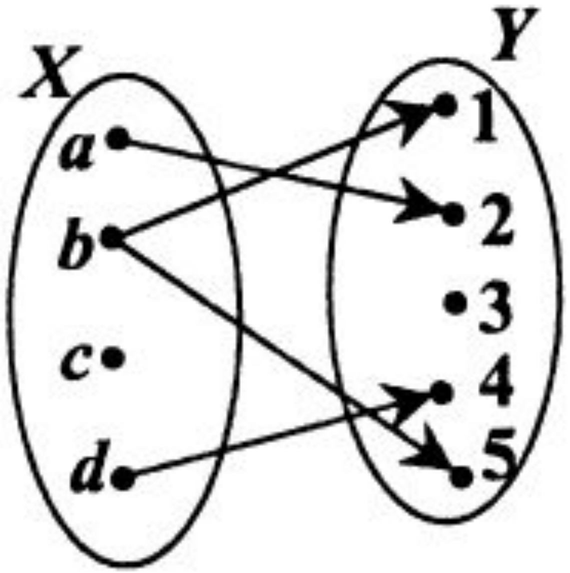


2. Найдём образ R(A) и прообраз $R^{-1}(B)$.

$R(A) = \{1, 2, 5\}$, так как

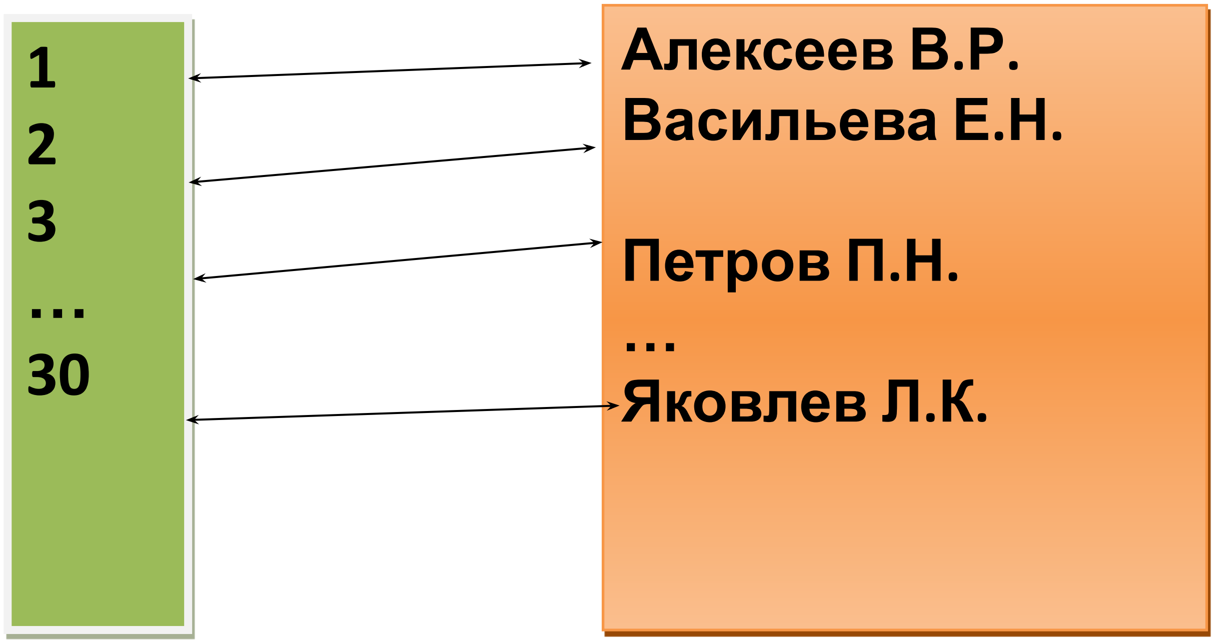
$A = \{a, b\}$ и $\{(a, 2), (b, 1), (b, 5)\} \subset G$.

$R^{-1}(B) = \{d\}$, так как $B = \{3, 4\}$ и только $(d, 4) \in G$.



- Если между элементами множеств А и В установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов.
- В таком случае говорят, что множеств А и В ***равносильны***, ***равномощны***, ***или эквивалентны***.

- **Пример**: А- множество студентов группы, В – множество номеров в списке



- Отображение e: A → A называется ***тождественным*** (***единичным***), если каждому аргументу оно ставит в соответствие себя. *Отображение, обратное единичному, также является единичным.*
- **Примеры тождественных отображений:**

1. $\sqrt{x^2} = x = \left(\sqrt{x}\right)^2, \; x \in [0, +\infty].$
2. $x = \ln(e^x) = e^{\ln x}, \; x \in [0, +\infty].$
3. $\arcsin(\sin x) = \sin(\arcsin x) = x, \; x \in [-\pi/2, \pi/2]$

4. КЛАССИФИКАЦИЯ МНОЖЕСТВ. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

- Количество элементов, содержащихся во множестве А, называется ***мощностью*** множества А (или кардинальным числом) и обозначается |А|.
- Если мощность множества может быть выражена вполне определенным числом, то множество называется ***конечным***, в противном случае - ***бесконечным***

- Если множества конечны, то сравнивают их мощности.
- Обозначим через A, B, C, D соответственно множества букв слов «крот», «корт», «кран» и «рот». Тогда $|A| = |B| = |C| = 4$, $|D| = 3$.
- Следовательно, A, B и C имеют равные мощности, а мощность D меньше, чем, например, мощность A: $|D| < |A|$, так как $3 < 4$.
- Множества A, B и C равномощны.
- Обозначение: $A \sim B$, $A \sim C$
- ***Понятие «равномощные множества» не означает, что они обязательно равны.***

- ***Булеаном*** множества М называется множество всех его подмножеств, которое обозначается 2^M,
- т.е. $2^M = \{A \mid A \subset M\}$.

- Для конечного множества М мощность булеана равна $|2^M| = 2^{|M|}$.

- В частности, множество всех подмножеств любого конечного множества, состоящего из n элементов, является конечным множеством, состоящим из 2^n элементов.

- **Пример**:
- Дано множество $A = \{a, b, c\}$,
- Его мощность $n = |A| = 3$
- Булеан множества A:

$2^A=\{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \{a,b,c\}\}$

- Мощность булеана равна $|2^A|=2^{|A|}=2^3=8$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

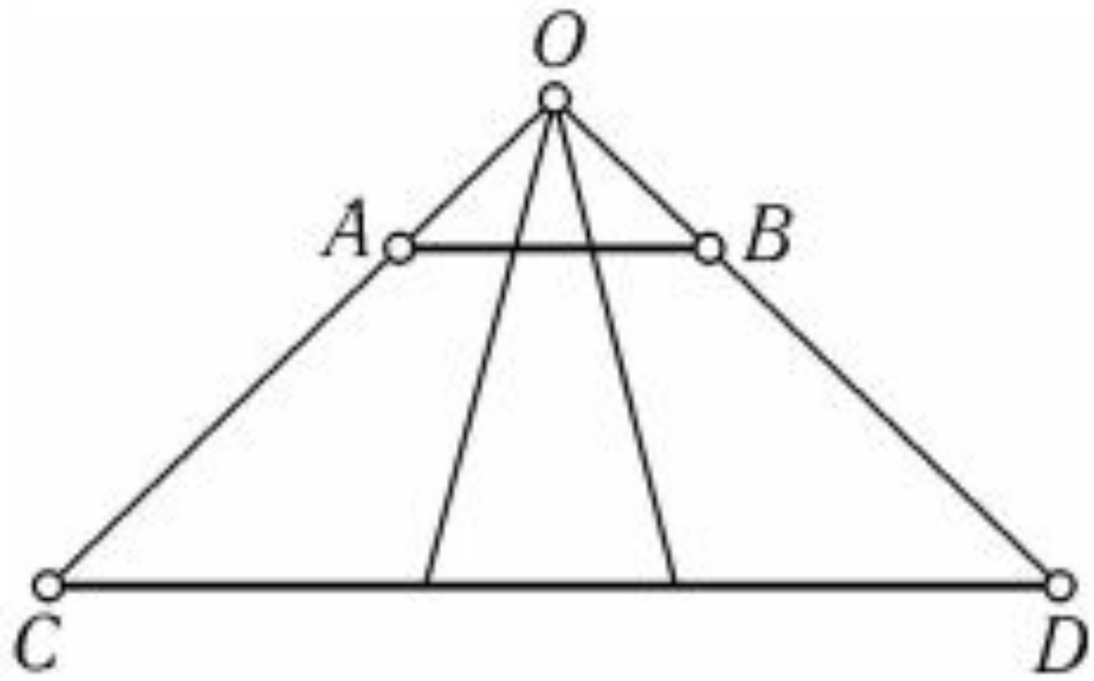
- Любое конечное множество не эквивалентно никакому его собственному подмножеству, кроме самого себя.
- *Следствие*. Всякое непустое конечное множество эквивалентно одному и только одному отрезку натурального ряда чисел (1, ..., n).

- Эталоном для сравнения бесконечных множеств служит натуральный ряд чисел N.
- Бесконечное множество, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется ***счетным***. Говорят, что все элементы счетного множества можно пронумеровать. В противном случае бесконечное множество будет ***несчетным***.

- Г. Кантор в 1878 году доказал, что **несчетно** множество точек, расположенных на отрезке [0; 1].
- По определению Б. Больцано (1837) и Р. Дедекинда (1887) множество называется ***бесконечным***, если оно равномощно одному из своих собственных подмножеств.

ИНТЕРЕСНЫЕ ВОПРОСЫ

- Равна ли часть целому? Часть меньше целого?
- Каких чисел больше: натуральных N или рациональных Q? рациональных Q или действительных R?
- Где больше точек: на отрезке или на всей прямой? на прямой или в квадрате?
- Где больше точек, на отрезке длиной в 1 мм или на отрезке длиной в 1 м?

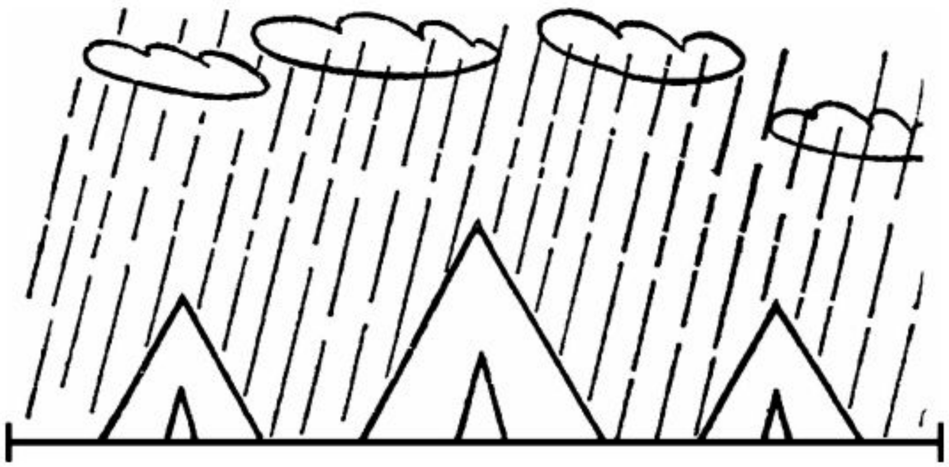


- на очень коротком и очень длинном отрезках точек **поровну**, поскольку всегда можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) между точками этих отрезков

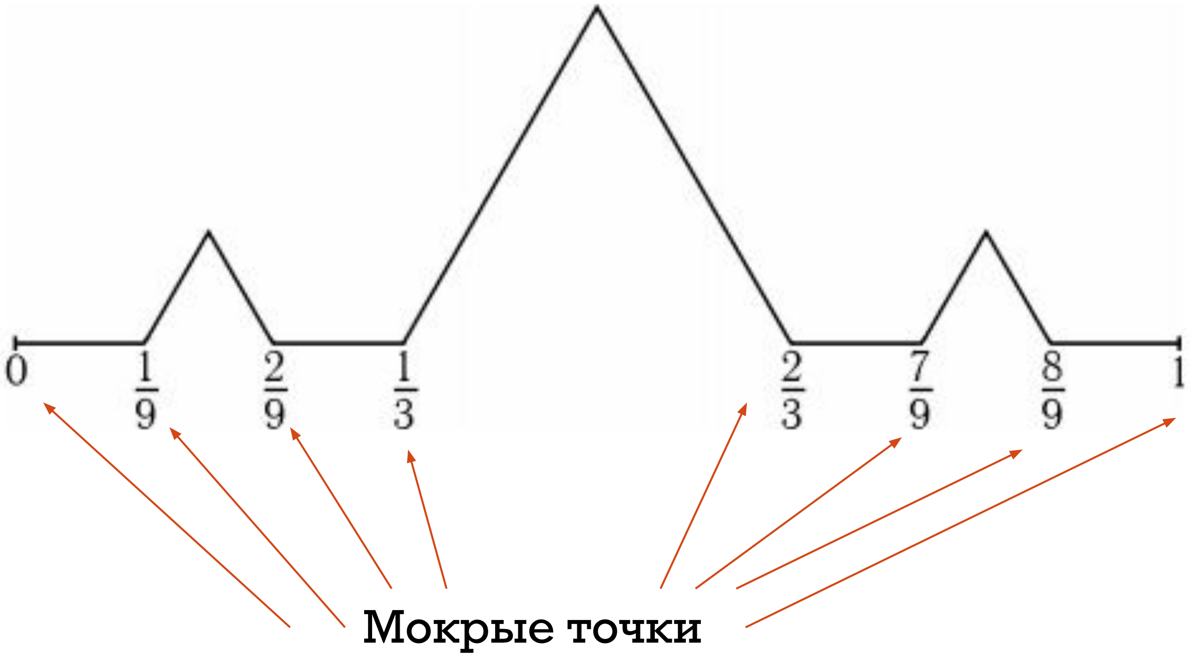
- Поскольку для бесконечных множеств нельзя указать число, которое является его мощностью, принято их сравнивать по эквивалентным им основным множествам N и R.

- Всякое бесконечное множество, равносильное множеству действительных чисел, называется ***множеством мощности континуума*** (от лат. continuum — непрерывный). Условное обозначение: $|R|$.
- Так, множество A точек прямой несчетно и имеет мощность континуума: $|A| = |R|$.

МНОЖЕСТВО «МОКРЫХ ТОЧЕК» ИМЕЕТ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА



Дождь идет



ТЕОРЕМЫ О БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

- 1. Мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счетного множества.
  2. Мощность несчетного множества не меняется от удаления из него счетного множества.

АРИФМЕТИКА БЕСКОНЕЧНОГО: ОПЕРАЦИИ НАД МОЩНОСТЯМИ

- Обозначим $\aleph_0$ - мощность счетного множества (читается: *алеф нуль*),
- $\mathfrak{c}$ - мощность континуума, $\mathbf{f}$ - мощность множества всех функций, заданных на действительной оси

1) $n + \aleph_0 = \aleph_0,$

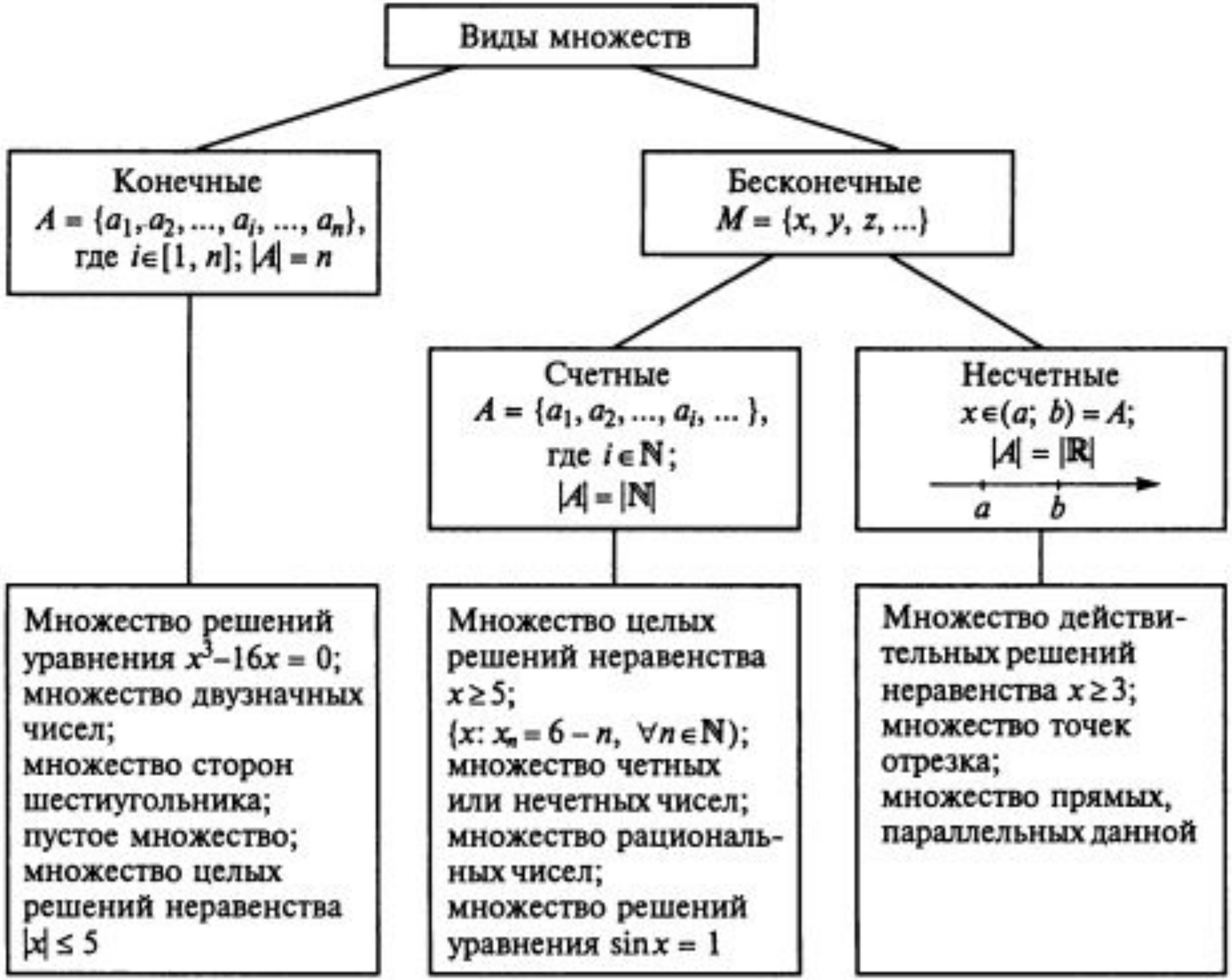
2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$

3) $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$

4) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$

5) $\mathfrak{c} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}.$

- 1) сумма конечного и счетного множеств является счетным множеством
- 2) сумма двух счетных множеств есть счетное множество
- 3) прибавление счетного множества к множеству мощности континуума дает множество мощности континуума
- 4) и 5) описать самостоятельно


Виды множеств
Конечные
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$,
где $i \in [1, n]$; $|A| = n$
Бесконечные
$M = \{x, y, z, \ldots\}$
Счетные
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$,
где $i \in \mathbb{N}$;
$|A| = |\mathbb{N}|$
Несчетные
$x \in (a; b) = A$;
$|A| = |\mathbb{R}|$
a
b
Множество решений уравнения $x^3 - 16x = 0$; множество двузначных чисел; множество сторон шестиугольника; пустое множество; множество целых решений неравенства $|x| \leq 5$
Множество целых решений неравенства $x \geq 5$; $\{x: x_n = 6 - n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$; множество четных или нечетных чисел; множество рациональных чисел; множество решений уравнения $\sin x = 1$
Множество действительных решений неравенства $x \geq 3$; множество точек отрезка; множество прямых, параллельных данной

ТЕОРЕМЫ О МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВ

- 1. Если $A \subset B$ то $|A| < |B|$.
- 2. Если $A \sim C \subset B$, $B \sim D \subset A$, то $|A| = |B|$.
- 3. Если $K \subset M$ и K несчетно ($|K|=|R|$), то M тоже несчетно ($|M|=|R|$).

5. КОРТЕЖИ. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

- Пусть A — конечное множество ($|A|=n$),
- $F: A \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ –правило, по которому нумеруются элементы множества A
- ***Кортежем* длины n** называется последовательность

$\langle a_1, a_2, .., a_n \rangle$, упорядоченная по правилу F.

- *Для задания кортежа важен порядок.*

- Кортежи $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$ и $<b_1, b_2, \ldots, b_n>$ называются ***равными***, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают.

- Например, равны кортежи $<2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5>$ и $<2, 4, 8, 16, 32>$, так как оба кортежа имеют длину 5 и равны все соответствующие пары:

$2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16; 2^5 = 32.$

- Из двух данных кортежей $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$ длины k и $<b_1, b_2, \ldots, b_m>$ длины m можно составить два новых кортежа

$<a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m>$

и $<b_1, b_2, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_k>$ длины $k+m$.

- Эта операция называется ***соединением кортежей***.

- Например, даны кортежи <2, 5, 9> и <a, b>
- Варианты соединения кортежей:
- <2, 5, 9, a, b> и <a, b, 2, 5, 9>

Пусть заданы множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Декартовым **(прямым)** ***произведением*** этих множеств называется множество

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, состоящее из всех кортежей

$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ длины k, в которых $a_к \in A_к$, где $1 \leq k \leq n$.

Поскольку для задания кортежа важен порядок, то порядок множителей важен и в декартовом произведении.

Свое название декартово произведение получило в честь выдающегося французского математика и философа Рене Декарта (1596-1650).

- **Пример**: декартовым произведением множеств $A = \{0, 1\}$ и

$B = \{X, Y, Z\}$ является множество пар

$A \times B = <(0; X), (0; Y), (0; Z), (1; X), (1; Y), (1; Z)>.$

Или в виде таблицы

A \ B	X	Y	Z
0	(0; X)	(0; Y)	(0; Z)
1	(1; X)	(1; Y)	(1; Z)

- Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то пишут

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

и называют ***n-й декартовой степенью множества А***.

- Например, плоскость (в геометрии) является декартовым квадратом двух прямых и обозначается $\mathbf{R}^2$, пространство (в геометрии) является декартовым квадратом трех прямых и обозначается $\mathbf{R}^3$

- В физике пространственно-временной континуум есть декартово произведение R^3 х Т,

где R^3 — трехмерное пространство,

а Т— числовая ось времени.

- **Проекцией вектора** $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ на ось i называется координата a_i.
- **Графиком P** называется подмножество декартова произведения двух множеств.

- **Инверсией графика** называется график

$$P^{-1}=\{(a, b) \mid (b, a) \in P\}.$$

Композицией графиков P и Q называется график

$$P \circ Q=\{(a, b) \mid \exists x \ ((a, x) \in P \text{ и } (x, b) \in Q)\}.$$

Пример

Даны графики $P=\{(1;1), (1;2), (2;3), (2;2)\}$ и $Q=\{(1;5), (1;6), (3;6)\}$.

Найти: а) P^{-1}; б) $P \circ Q$; в) $пр_1 P$; г) $пр_2 Q$.

Решение:

$P=\{(1;1), (1;2), (2;3), (2;2)\}$,

А) $P^{-1}=\{(1;1), (2;1), (3;2), (2;2)\}$ – инверсия графика P

$P=\{(1;1), (1;2), (2;3), (2;2)\}$,

$Q=\{(1;5), (1;6), (3;6)\}$.

Б) $P^\circ Q=\{(1;5), (1;6), (2;6)\}$ – композиция графиков P и Q

$P=\{(1;1), (1;2), (2;3), (2;2)\}$,

$Q=\{(1;5), (1;6), (3;6)\}$.

В) $пр_1 P=\{1; 2\}$ – первая проекция графика P,

Г) $пр_2 Q=\{5; 6\}$ – вторая проекция графика Q.

Ответ: а) $\{(1;1), (2;1), (3;2), (2;2)\}$; б) $\{(1;5), (1;6), (2;6)\}$; в) $\{1; 2\}$; г) $\{5; 6\}$.

СВОЙСТВА ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $A \times B \neq B \times A$
- Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то $|A^n| = |A|^n$

АРИФМЕТИКА БЕСКОНЕЧНОГО: СВОЙСТВА ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ

- 1) $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$
- 2) $\aleph_0 \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- 3) $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

- 1) декартово произведение счетных множеств счетно (или сумма счетного множества счетных множеств является счетным множеством)
- 2) декартово произведение счетного множества и множества мощности континуума есть множество мощности континуума
- 3) число точек на отрезке и в квадрате совпадает

6. ОТНОШЕНИЯ

- Соответствие между равными множествами А = В называется **отношением** на данном множестве (А).
- Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами: «быть равным», «быть больше», «быть не меньше», «быть делителем» и т.д.

- Отношения во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами: «быть параллельными», «пересекаться», «касаться» и т.д.
- Отношения являются частным случаем отображения, когда область определения и множество значений совпадают

- Назовем **n-местным отношением** ϕ на непустом множестве A подмножество R $\subset$ A^n.
- При n=2 отношение ϕ называется **бинарным**.
- *Или:*
- ***Бинарным отношением*** на множестве *A* называется пара $\Phi = (A, G)$, где *A - область задания отношения*, *G - график отношения*, причём $G \subset A$.

$\overline{x\varphi y}$

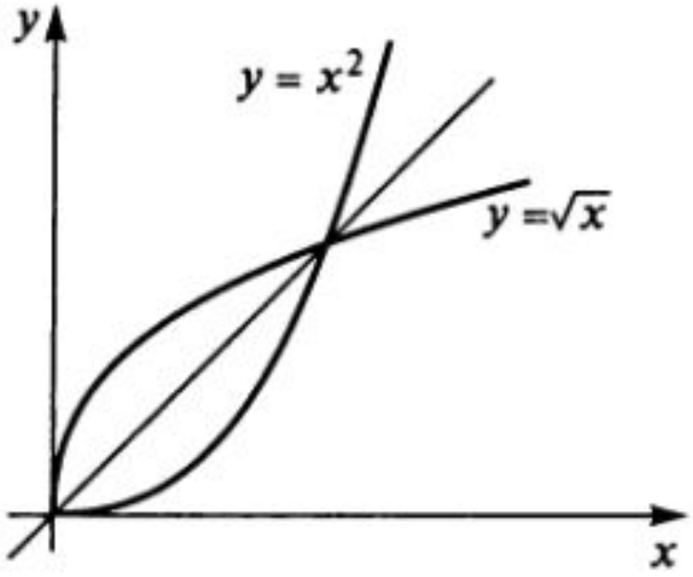
- Если $(x, y) \in G$, то вводят обозначение $x\phi y$ и говорят, что x и y вступают в отношение ϕ (находятся в отношении ϕ).
- Если x и y не вступают в отношение ϕ, обозначают $\overline{x\varphi y}$
- **Диагональю множества A^2** называется график

$$\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A)$$

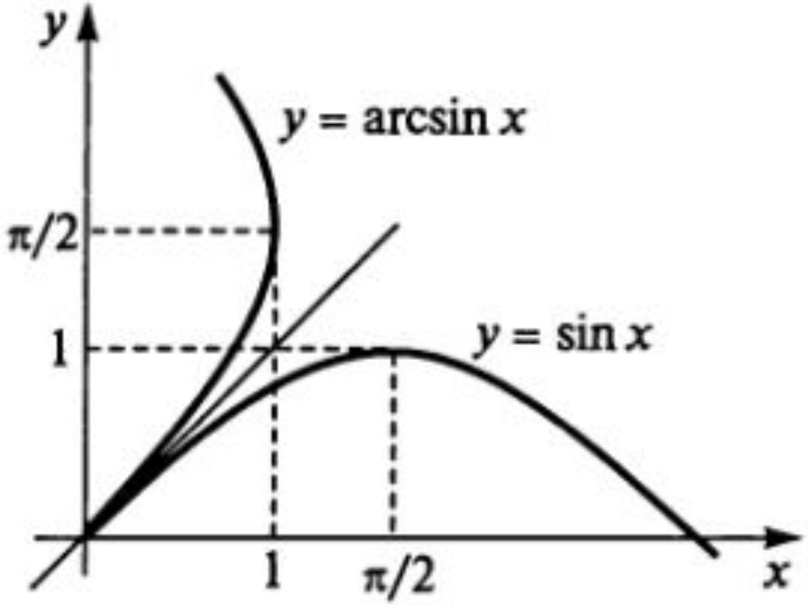
- Например,
- $a \parallel b$ (параллельные прямые),
- $a \leq b$ (действительные числа),
- $a = \log_c b$
- $y=\sin x$
- $x \neq y$
- $y=\mathrm{tg}x$ и т.д.

- Графики прямых и обратных бинарных отношений, определенных на множестве действительных чисел, **симметричны** относительно биссектрисы I и III квадрантов.
- Это свойство обратных бинарных отношений используют при построении графиков обратных функций. Построение однозначной обратной функции возможно лишь для монотонных функций.

- Например: $y = \log_2 x$ и $y=2^x$;
- $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ (рис. а)
- $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, $0 < x < \pi/2$ (рис. б).



а



б

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ:

1. Рефлексивность (рефлективность): $\forall\ x \in A\ (x \phi x)$

С помощью графиков отношений можно записать: $\Delta_A \subseteq G$
Например, «быть не больше» на R.

2. Антирефлексивность: $\forall\ x \in A \left(\overline{x \varphi y}\right)$.

$\Delta_A \cap G = \varnothing$

Имеет место, когда отношение ϕ не обладает свойством рефлективности для любых x, **например** «быть больше», «быть младше» и др.

3. Симметричность: $\forall\ x \in A,\ \forall\ y \in A\ (x\phi y \rightarrow y\phi x)$

$G = G^{-1}$

Или, одновременно выполняются $x\phi y$ и $y\phi x$

Например, симметрична параллельность прямых, так как если a || b, то b || a. Симметрично отношение «быть равным» на любом множестве или «быть взаимно-простым» на N.

4. Антисимметричность. Если для несовпадающих элементов $x \neq y$, верно отношение $x\phi y$, то ложно $y\phi x$ ($\forall$ x, y $\in$ A)

Например: отношения «быть больше», «не меньше» на R, «быть делителем» на N и др.

$G \cap G^{-1} \subseteq \Delta_A$

5. Транзитивность. Если $x\phi y$ и $y\phi z$, то $x\phi z$, $\forall x, y, z \in A$.

$G \circ G \subseteq G$

Например: отношения «быть больше», «быть параллельным», «быть равным» и др.

6. Антитранзитивность. Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.

Например, «быть перпендикулярным» на множестве прямых плоскости ($a \perp b$, $b \perp c$, но неверно $a \perp c$).

7. Асимметричность. Ни для одной пары x и y ($\forall x, y \in A$) не выполняется одновременно $x\phi y$ и $y\phi x$.

8. Связность. Для любых $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ выполняется $x\phi y$ или $y\phi x$.

$A^2 \setminus \Delta_A \subseteq G \cup G^{-1}$

Заметим, что каждое конкретное отношение может обладать или не обладать некоторыми из указанных свойств.

Свойства бинарных отношений

Множества	Отношение	Рефлективность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Антитранзитивность
Любые	$A \subset B$	+	–	–	+	+	–
Любые непустые	$A \cap B \neq \varnothing$	+	+	–	–	–	–
Любые	$B = A'$	–	+	–	–	–	–
Любые	$a = b$	+	+	–	–	+	–
Любое	$a \neq b$	–	+	–	–	–	+
$\mathbb{N}$	$a \vdots b,\ a = bq$	+	–	–	+	+	–
$\mathbb{R}$	$a > b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \geq b$	+	–	–	+	+	+
$\mathbb{R}$	$a < b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \leq b$	+	–	–	+	+	+
Прямые плоскости	$a \parallel b$	+	+	–	–	+	–
Прямые плоскости	$a \perp b$	–	+	–	–	–	–
Векторы $\forall a,\ \forall b$	Коллинеарность $a = \lambda b$	+	+	–	–	+	–
Окружности	Касание	+	+	–	–	–	–
Окружности	Концентричность	+	+	–	–	+	–
$\mathbb{N}$	Взаимная простота	–	+	–	–	–	–
$\mathbb{N}$	$a = b \pmod m$ (сравнение по модулю m)	+	+	–	–	+	–

Если даны два отношения: $\Phi = (A, G)$ и $\Psi = (A, F)$, то операции над этими отношениями сводятся к операциям над их графиками:

$\Phi \cup \Psi = (A, G \cup F)$, *объединение*

$\Phi \cap \Psi = (A, G \cap F)$, *пересечение*

$\Phi \setminus \Psi = (A, G \setminus F)$, *разность*

$\Phi \,\Delta\, \Psi = (A, G \,\Delta\, F)$, *симметрическая разность*

$\overline{\Phi} = (A, A^2 \setminus G)$, дополнение

ВИДЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

1. Отношение ϕ называется отношением ***эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно

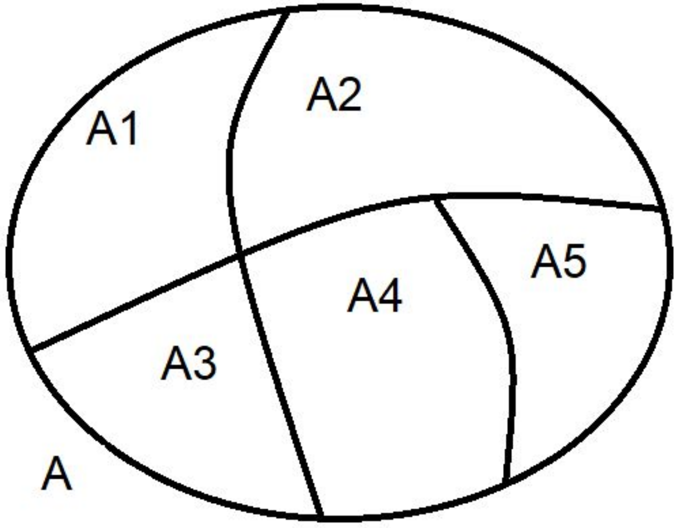
$\forall x, y, z \in A$

- $x \phi x$ (рефлексивность);
- если $x \phi y$, то $y \phi x$ (симметричность);
- если $x \phi y$, $y \phi z$, то $x \phi z$ (транзитивность).

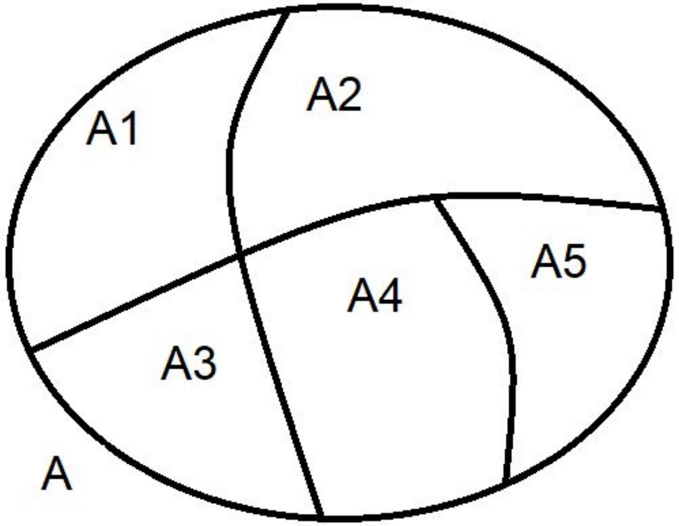
Обозначение: a Q b или a ~ b,

Например, «быть равным на множестве чисел», быть подобным на множестве геометрических фигур.

- Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество A отношением эквивалентности ϕ, называются **классами эквивалентности**.



- Множество всех различных классов эквивалентности называется **фактор-множеством множества А по отношению эквивалентности ϕ** (обозначается A / ϕ).
- Мощность фактор-множества A / ϕ называется **индексом разбиен… порождённого отношением ϕ**



Например, множество всех рациональных чисел Q можно разбить на классы эквивалентности, для которых a/b — рациональная дробь,

где $a \in Z$; $b \in N$.

Любая дробь **c/b** будет отнесена к тому же классу тогда и только тогда, когда **ad = bc**, т.е. **a/b** и **c/d** эквивалентны, если **ad = bc**

(например, -2/4 ~ -3/6).

ПРОВЕРИМ ВЫПОЛНИМОСТЬ СВОЙСТВ ДЛЯ ТАКОГО ОТНОШЕНИЯ:

-рефлексивность

Для любой дроби **a/b** выполняется равенство

ab = ba, значит

a/b Q a/b, или **a/b ~ a/b**

-симметричность

если **a/b ~ c/d**, то **ad = be**, но **be = ad**, значит **c/d ~ a/b**

- транзитивность

Пусть что $a/b \sim c/d$, $c/d \sim m/n$.

Докажем, что $a/b \sim m/n$, т.е. $an = bm$.

Действительно, так как $a/b \sim c/d$, то $ad = bc$ (*),

аналогично, $c/d \sim m/n$, то $cn = md$ (**).

Умножим равенство (*) на n, а (**) на b,

тогда имеем $adn = bcn$ и $bcn = mdb$.

По свойству транзитивности $adn = mdb$ или $an = mb$. **Чтд**.

Такие дроби классифицируются по элементу, порождающему класс эквивалентности, которым в этом примере является несократимая дробь (например, для $2/4 \sim 3/6 \sim 4/8$ таковой будет $1/2$).

2. Отношение φ на множестве А называется отношением **толерантности**, если оно *рефлексивно* и *симметрично*.

Предыдущее отношение эквивалентности есть частный случай толерантности, когда к двум перечисленным свойствам добавляется транзитивность.

Например, отношение **«быть другом»** рефлексивно, симметрично, но не транзитивно.

Толерантность является более слабой мерой сходства, чем эквивалентность, но тем не менее помогает выявлять различия в схожих вещах. Дает интуитивное представление о сходстве объектов.

3. Отношение ϕ называется **отношением порядка** на множестве A, если оно антисимметрично и транзитивно.

Обозначение: $x \preceq y$ (x предшествует y).

Множество A, которое обладает отношением порядка, называется **упорядоченным**.

Отношение называется отношением *частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение называется отношением *линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и связно.

Отношение называется отношением *строгого порядка*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение называется отношением *строгого линейного порядка*, если оно - связное отношение строгого порядка.

Рефлективное отношение порядка называют **отношением нестрогого порядка** и обозначают знаком $\leq$.

Антирефлективное отношение порядка называют **отношением строгого порядка** и обозначают знаком $<$.

На множестве А задано **отношение полного порядка**, если сравнимы все элементы этого множества. Такое множество называется **вполне упорядоченным**.

На множестве А задано **отношение частичного порядка**, если сравнимы не все элементы этого множества. Такое множество называется **частично упорядоченным**.

Отношение порядка дает возможность сравнивать между собой различные элементы множества А.

Пусть А — упорядоченное множество с отношением строгого порядка **<**. Об упорядоченной паре **x < y** говорят, что элемент **x** **предшествует элементу y**.

Пусть А — вполне упорядоченное множество. Тогда, если для элемента x не нашлось предшествующего, то он называется **минимальным**.

Т.е. не существует элементов **y**, «меньших», чем **x**.

Символическая запись:

$$\nexists y \in A, \quad y < x \text{ и } y \neq x$$

На множестве N натуральных чисел выполняются лишь свойства антисимметричности и транзитивности.

Поэтому на нем установлено отношение **полного порядка**: для любой пары натуральных чисел **единица** является предшествующим числом, т.е. **минимальным**.

Можно доказать, что конечное вполне упорядоченное множество содержит единственный минимальный элемент.

Например, на множествах чисел Z, Q, R отношения $\leq$ и $\geq$ есть отношения **нестрогого полного порядка**, а отношения $<$ и $>$ есть отношения **строгого полного порядка**.

Отношение $\subset$ есть отношение нестрогого частичного порядка на множестве 2^A (булеан).

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть доведен до полного.

То есть существует такое отношение полного порядка, для которого заданное отношение частичного порядка является подмножеством.