

Тригонометрические уравнения

Преподаватель: Левченко Н.Г.

Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса:

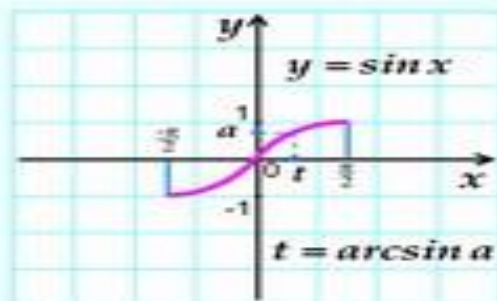
Арксинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен a .

Арккосинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $t \in [0, \pi]$, косинус которого равен a .

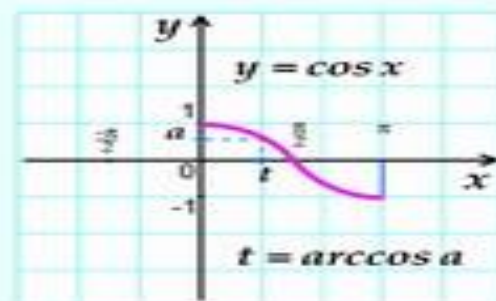
Арктангенсом числа $a \in (-\infty, +\infty)$ называется такое число $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен a .

Арккотангенсом числа $a \in (-\infty, +\infty)$ называется такое число $t \in (0, \pi)$, котангенс которого равен a .

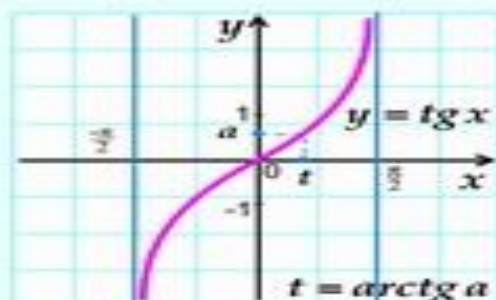
АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС



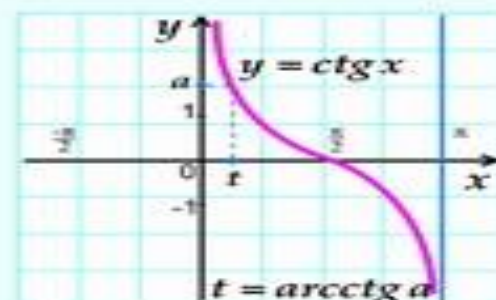
Арксинусом числа a называется такое число $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, что $\sin t = a$



Арккосинусом числа a называется такое число $t \in [0; \pi]$, что $\cos t = a$



Арктангенсом числа a называется такое число $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, что $\operatorname{tg} t = a$



Арккотангенсом числа a называется такое число $t \in (0; \pi)$, что $\operatorname{ctg} t = a$

Для записи арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса приняты следующие обозначения: *arcsin*, *arccos*, *arctg* и *arcctg*.

То есть, арксинус числа a можно записать как *arcsin a*, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа a запишутся соответственно как *arccos a*, *arctg a* и *arcctg a*.

Таблица:

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|-------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| sin x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| cos x | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| tg x | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| ctg x | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

Примеры:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Выполнить задания:

1) Вычислите: а) $\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
в) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\arctg 0$.

2) Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 1 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $2 \arctg 1 + \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
в) $18 \arccos\frac{1}{2} - 2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arctg\sqrt{3}$.

3) Сравните числа: $\arctg(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Отвeты:

Отвeты:

$$1. \text{ a) } \frac{2\pi}{3} \quad \text{б) } \frac{5\pi}{6} \quad \text{в) } \frac{\pi}{6} \quad \text{г) } 0.$$

$$2. \text{ a) } \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{б) } 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{в) } 18 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

$$3. \text{ arcctg}(-1) > \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\frac{3\pi}{4} > -\frac{\pi}{3}.$$

Простейшие тригонометрические уравнения.

Простейшие тригонометрические уравнения:

$$\begin{aligned} & \cos x = a \quad (-1 \leq a \leq 1) \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq \arccos a \leq \pi) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sin x = a \quad (-1 \leq a \leq 1) \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} x = a \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение $\cos x = a$.

1) Уравнение $\cos x = a$.

При $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ решений не имеет.

При $|a| \leq 1$ общее решение уравнения $\cos x = a$ записывается в виде:

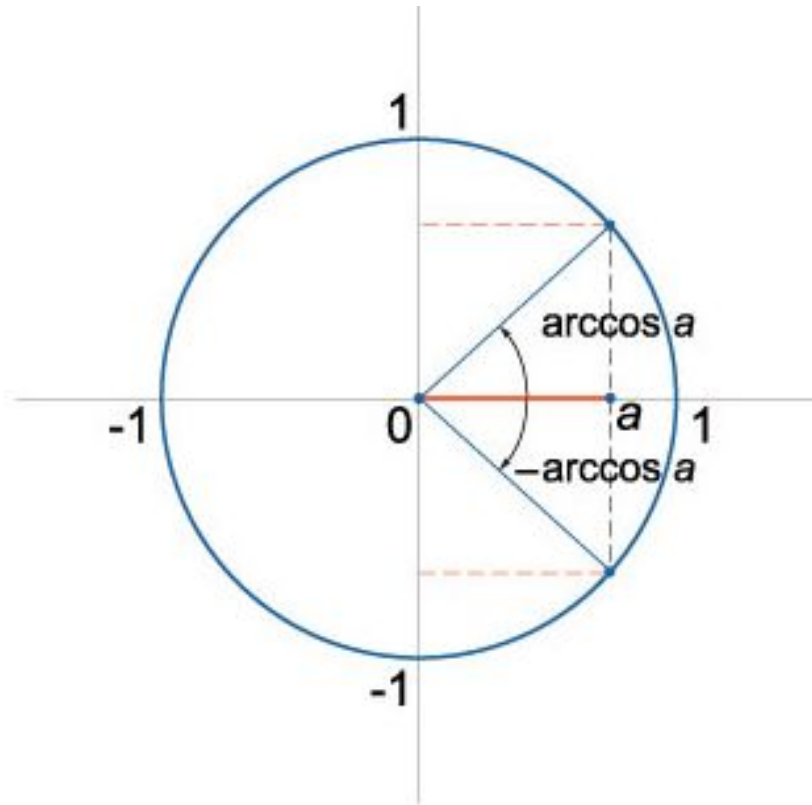
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Данная формула включает два множества решений:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(\mathbb{Z} – множество целых чисел).

Графическое обоснование:



Пример 1:

Пример: Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

По формуле (1) $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z,$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Пример 2:

Пример: Решить уравнение $2\cos x + 1 = 0$.

Перенесем свободный член в правую часть, поменяв знак:

$$2\cos x = -1.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (1) $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in Z,$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Пример 3:

Пример: Решить уравнение $\cos 7x = 1$

По формуле (1) $7x = \pm \arccos 1 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$

т. е. $7x = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ откуда

$$x = \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $\sin x = a$.

2) Уравнение $\sin x = a$

При $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.

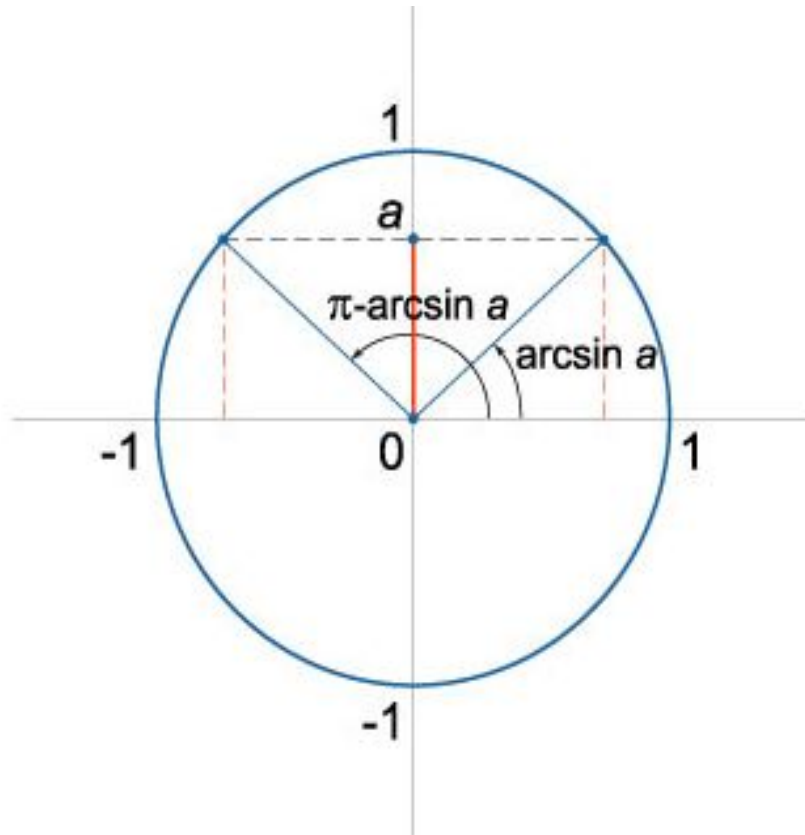
При $|a| \leq 1$ общее решение уравнения $\sin x = a$ записывается в виде:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Данная формула содержит две ветви решений:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Графическое обоснование:



Пример 1:

Пример: Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

По формуле (2)

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Пример 2:

Пример: Решить уравнение $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

Перенесем свободный член в правую часть, поменяв знак:

$$2\sin x = \sqrt{3}.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (2)

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \Pi n, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{3} + \Pi n, n \in Z.$$

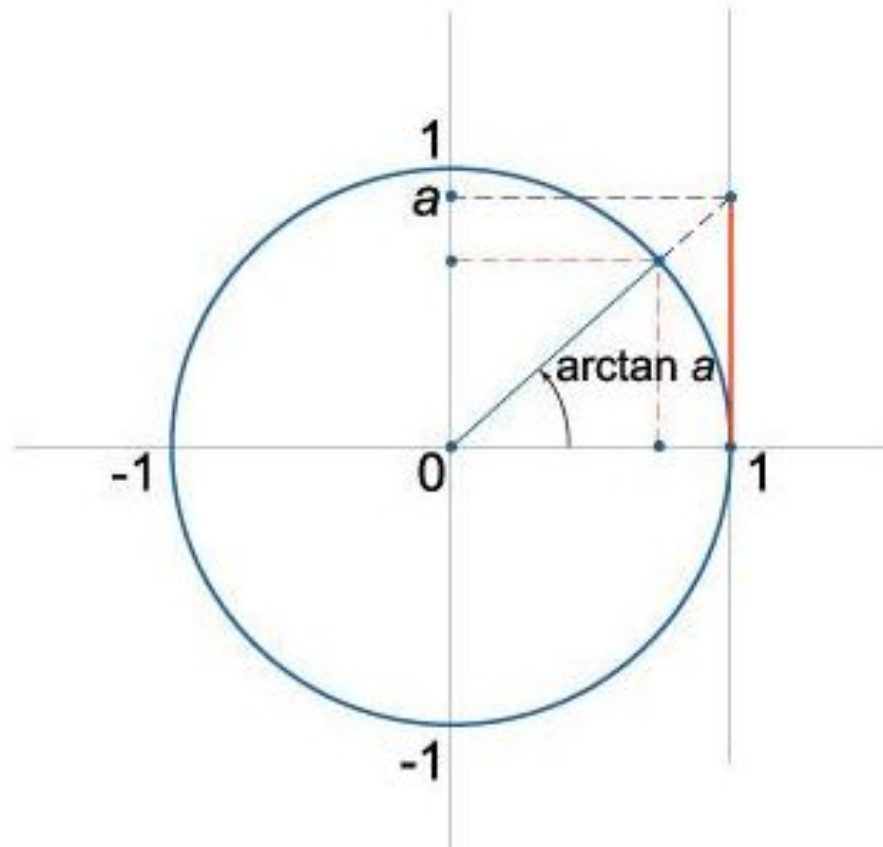
Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{3} + \Pi n, n \in Z$.

Уравнение $\operatorname{tg}x = a$.

При произвольном значении a общее решение уравнения $\operatorname{tg}x = a$ имеет вид:

$$x = \operatorname{arctg}a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Графическое обоснование:



Пример: Решить уравнение $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

Перенесем свободный член в левую часть, поменяв знак:

$$3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Разделим обе части уравнения на 3:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

По формуле (3)

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \Pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\Pi}{6} + \Pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\Pi}{6} + \Pi n, n \in Z$.