Тригонометрические уравнения

Преподаватель: Левченко Н.Г.

Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса:

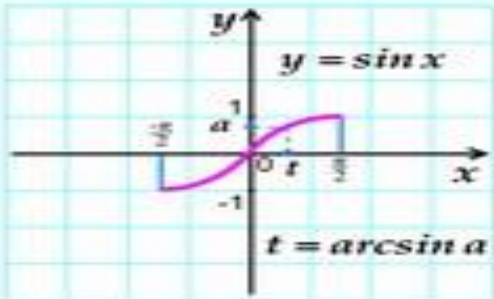
Арксинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен a.

Арккосинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $t \in [0, \pi]$, косинус которого равен a.

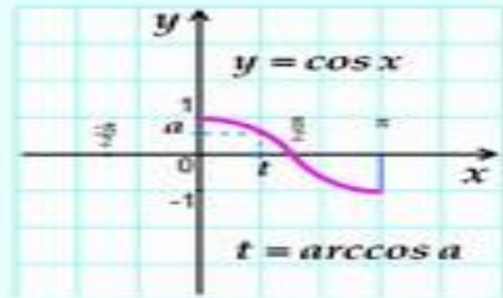
Арктангенсом числа $a \in (-\infty, +\infty)$ называется такое число $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен a.

Арккотангенсом числа $a \in (-\infty, +\infty)$ называется такое число $t \in (0, \pi)$, котангенс которого равен a.

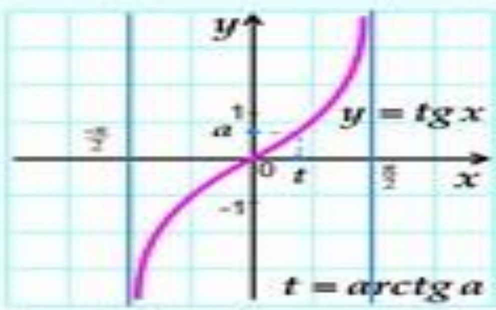
АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС



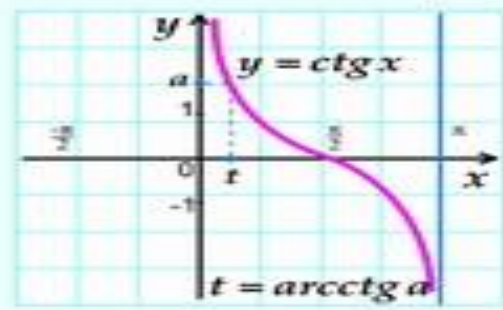
Арксинусом числа a называется такое число $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, что $\sin t = a$



Арккосинусом числа a называется такое число $t \in [0; \pi]$, что $\cos t = a$



Арктангенсом числа a называется такое число $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что $tg\, t = a$



Арккотангенсом числа a называется такое число $t \in (0; \pi)$, что $ctg\, t = a$

спектр

Для записи арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса приняты следующие обозначения: ***arcsin***, ***arccos***, ***arctg*** и ***arcctg***.

То есть, арксинус числа a можно записать как $arcsin\ a$, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа a запишутся соответственно как

$arccos\ a$, $arctg\ a$ и $arcctg\ a$.

Таблица:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{4}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Примеры:

$\operatorname{arcsin} \frac{1}{2} = \frac{П}{6}$

$\operatorname{arcsin} (-\frac{1}{2}) = -\frac{П}{6}$

$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{П}{4}$

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{П}{4}$

$\operatorname{arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{П}{6}$

$\operatorname{arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5П}{6}$

$\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{П}{3}$

$\operatorname{arcctg} (-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2П}{3}$

Выполнить задания:

1) Вычислите: а) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\operatorname{arctg} 0$.

2) Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 1 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $2 \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $18 \arccos\frac{1}{2} - 2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

3) Сравните числа: $\operatorname{arcctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответы:

Ответы:

1. а) $\frac{2\Pi}{3}$ б) $\frac{5\Pi}{6}$ в) $\frac{\Pi}{6}$ г) 0.

2. а) $\frac{\Pi}{2} - (-\frac{\Pi}{6}) = \frac{2\Pi}{3}$

   б) $2 \cdot \frac{\Pi}{4} + (-\frac{\Pi}{6}) = \frac{\Pi}{3}$

   в) $18 \cdot \frac{\Pi}{3} + 2 \cdot \frac{\Pi}{6} - \frac{\Pi}{3} = 6\Pi$

3. $\operatorname{arcctg}(-1) > \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\frac{3\Pi}{4} > -\frac{\Pi}{3}$.

Простейшие тригонометрические уравнения.

Простейшие тригонометрические уравнения:

$$\cos x = a \quad (-1 \le a \le 1)$$

$$x = \pm \arccos a + 2\Pi n,\ n \in Z \ (0 \le \arccos a \le \Pi) \qquad (1)$$

$$\sin x = a \quad (-1 \le a \le 1)$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \Pi n,\ n \in Z \ \left(-\frac{\Pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\Pi}{2}\right) \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \Pi n,\ n \in Z \ \left(-\frac{\Pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\Pi}{2}\right) \qquad (3)$$

Уравнение cosx = a.

1) Уравнение cos x = a.

При |a| > 1 уравнение cosx = a решений не имеет.

При |a| ≤ 1 общее решение уравнения cosx = a записывается в виде:

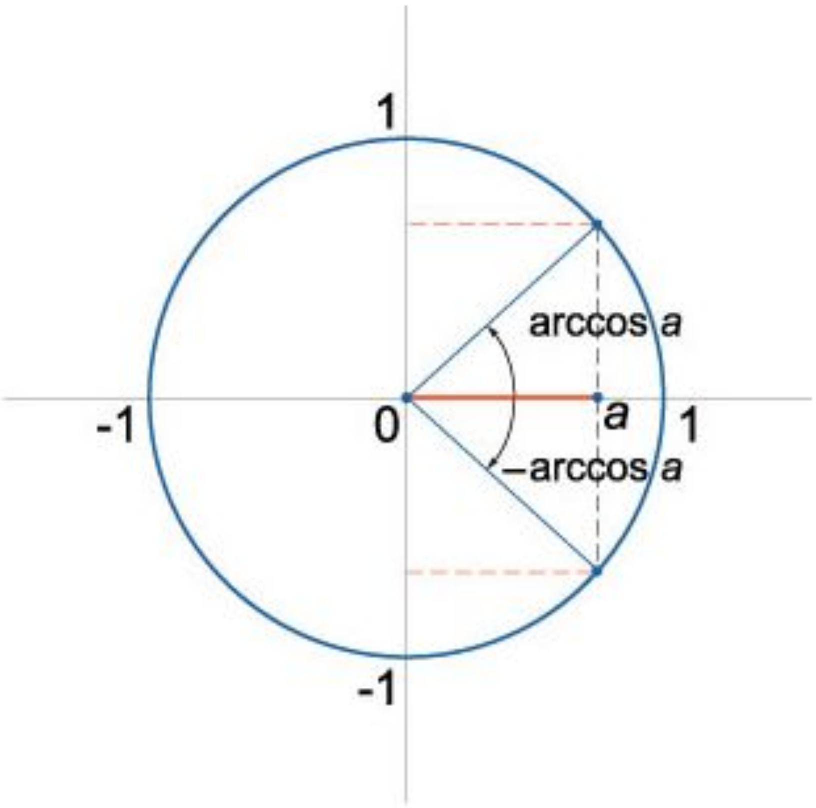
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$$

Данная формула включает два множества решений:

$x_1 = \arccos a + 2\pi n$, $x_2 = -\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$

(Z – множество целых чисел).

Графическое обоснование:



Пример 1:

Пример: Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

По формуле (1) $x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\Pi n, n \in Z,$

$$x = \pm \frac{\Pi}{4} + 2\Pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pm \frac{\Pi}{4} + 2\Pi n, n \in Z$

Пример 2:

Пример: Решить уравнение $2\cos x + 1 = 0$.

Перенесем свободный член в правую часть, поменяв знак:

$$2\cos x = -1.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (1) $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\Pi n,\ n \in Z,$

$$x = \pm \frac{2\Pi}{3} + 2\Pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $x = \pm \frac{2\Pi}{3} + 2\Pi n,\ n \in Z$

Пример 3:

Пример: Решить уравнение $\cos 7x = 1$

По формуле (1) $7x = \pm \arccos 1 + 2\Pi n,\ n \in Z,$

т. е. $7x = 0 + 2\Pi n,\ n \in Z$, откуда

$$x = \frac{2\Pi n}{7},\ n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{2\Pi n}{7},\ n \in Z.$

Уравнение sinx = a.

2) Уравнение sin x = a

При |a| > 1 уравнение sinx = a не имеет решений.

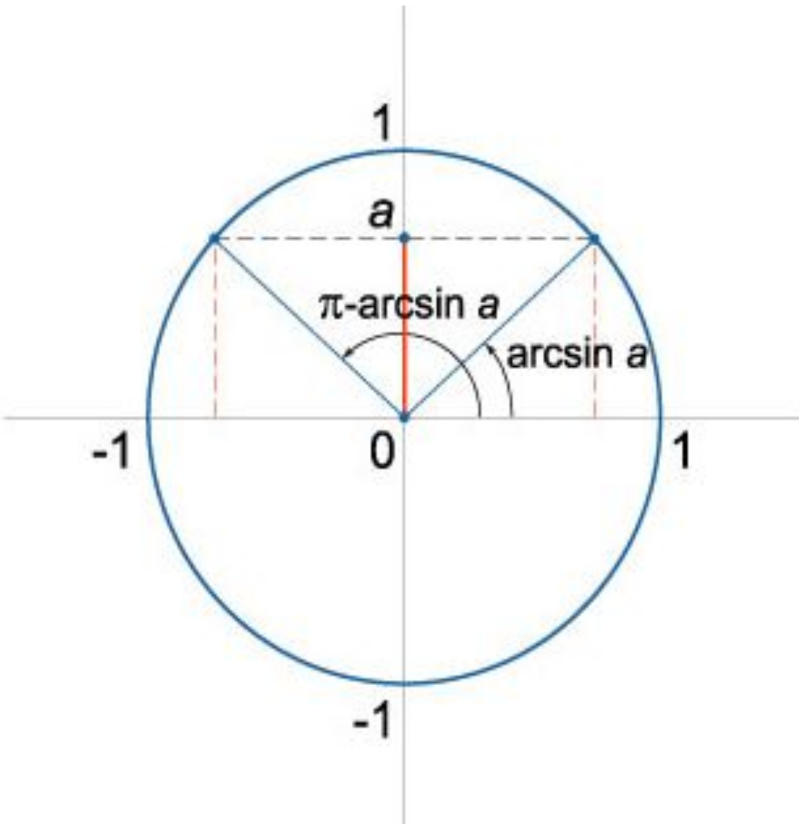
При |a| ≤ 1 общее решение уравнения sinx = a записывается в виде:

$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

Данная формула содержит две ветви решений:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\quad x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Графическое обоснование:



Пример 1:

Пример: Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

По формуле (2)

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \Pi n,\ n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{6} + \Pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{6} + \Pi n,\ n \in Z.$

Пример 2:

Пример: Решить уравнение $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

Перенесем свободный член в правую часть, поменяв знак:

$$2\sin x = \sqrt{3}.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (2)

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \Pi n,\ n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{3} + \Pi n,\ n \in Z.$$

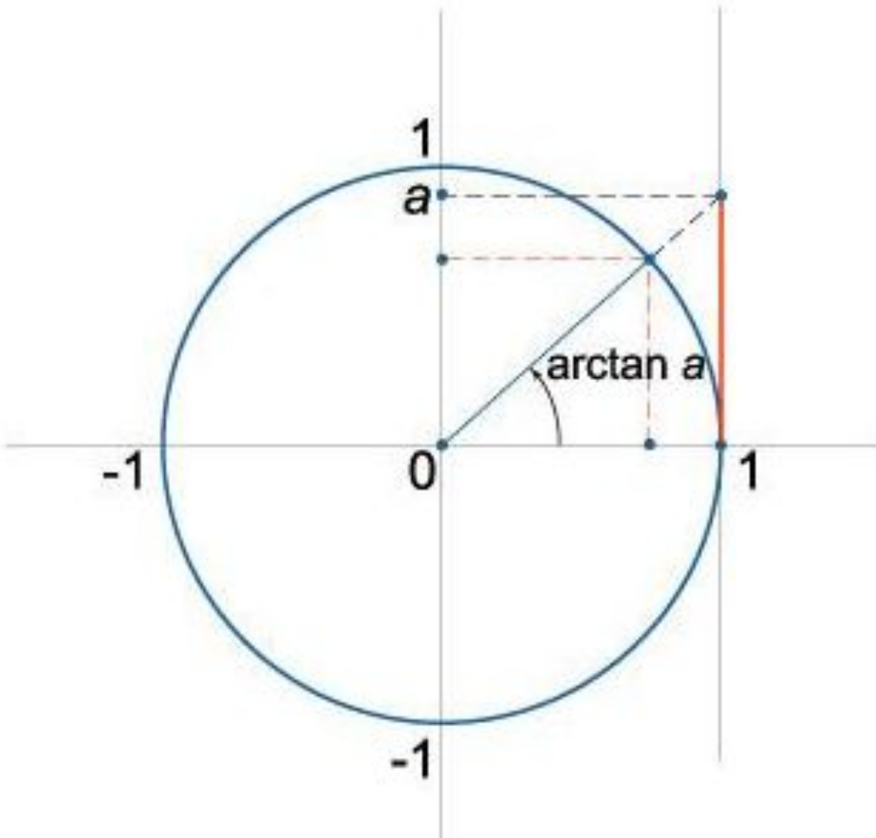
Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\Pi}{3} + \Pi n,\ n \in Z.$

Уравнение tgx = a.

При произвольном значении a общее решение уравнения tgx = a имеет вид:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Графическое обоснование:



Пример: Решить уравнение $3\text{tg}x - \sqrt{3} = 0.$

Перенесем свободный член в левую часть, поменяв знак:

$$3\text{tg}x = \sqrt{3}.$$

Разделим обе части уравнения на 3:

$\text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

По формуле (3) $x = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \Pi n,\ n \in Z,$

$x = \frac{\Pi}{6} + \Pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\Pi}{6} + \Pi n,\ n \in Z.$