

Векторный анализ - теория поля.

Типы векторных полей

- Соленоидальное поле
- Потенциальное поле
- Гармоническое поле

5. Типы векторных полей

а) соленоидальное

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется **соленоидальным** (трубчатым), если $\operatorname{div}\vec{a}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное \Leftrightarrow в нем нет источников и стоков.

СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) Если векторное поле $\vec{a}(M)$ является ротором некоторого векторного поля (т.е. $\vec{a}(M) = \operatorname{rot} \vec{b}(M) = [\vec{\nabla}, \vec{b}]$), то оно является соленоидальным.

Вектор $\vec{b}(M)$ называют **векторным потенциалом** векторного поля $\vec{a}(M)$.

2) Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность (S) равен нулю.

б) потенциальное

Векторное поле $\bar{a}(M)$ называется **потенциальным** если

$$\text{rot}\bar{a}(M) \equiv \bar{0}$$

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) Векторное поле $\bar{a}(M)$ потенциальное \Leftrightarrow оно является градиентом некоторого скалярного поля, т.е.

$$\bar{a}(M) = \text{grad } u(M) = \nabla u$$

Функцию $u(M)$ называют **потенциалом** векторного поля $\bar{a}(M)$.

2) Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии (ℓ) равен нулю.

3) Векторные линии потенциального поля незамкнуты.

4) В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала

в) гармоническое

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ называется **гармоническим** если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно.

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1) Поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ гармоническое $\Leftrightarrow \text{rot}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \mathbf{0}$ и $\text{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

2) Если векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ гармоническое, то $\exists u(M)$ такая, что $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{grad } u(M)$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют **уравнением Лапласа**.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется **гармонической**.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$, не являющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.

ТЕОРЕМА (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ – поле общего вида, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ – непрерывно дифференцируемы.

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ может быть представлено в виде
$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M),$$

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ – потенциальное поле,
 $\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ – соленоидальное поле.