Векторный анализ -теория поля.

Типы векторных полей

- Соленоидальное поле
- Потенциальное поле
- Гармоническое поле

5. Типы векторных полей

а) соленоидальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***соленоидальным*** (трубчатым), *если* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное $\Leftrightarrow$ в нем нет источников и стоков.

СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *является ротором некоторого векторного поля* (т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{b}}(M) = [\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{b}}]$), *то оно является соленоидальным* .

Вектор $\bar{\mathbf{b}}(M)$ называют ***векторным потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность* (S) *равен нулю*.

б) потенциальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* **потенциальным** *если* $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *потенциальное* $\Leftrightarrow$ *оно является градиентом некоторого скалярного поля*, т.е.

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\, u(M) = \bar{\nabla} u$$

Функцию $u(M)$ называют **потенциалом** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии* (ℓ) *равен нулю*.

3) *Векторные линии потенциального поля незамкнуты*.

4) *В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала*

в) гармоническое

Векторное поле **ā**(*М*) *называется* ***гармоническим*** *если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно.*

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1) *Поле* **ā**(*М*) *гармоническое* $\Leftrightarrow$ rot**ā**(*М*) ≡ $\bar{\mathbf{0}}$ *и* div**ā**(*М*) ≡ 0.

2) *Если векторное поле* **ā**(*М*) *гармоническое, то* $\exists$ *u*(*М*) *такая, что* **ā**(*М*) = grad u(*М*)

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют ***уравнением Лапласа***.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$*, не являющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.*

ТЕОРЕМА (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ – поле общего вида, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ – непрерывно дифференцируемы.

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ может быть представлено в виде $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M)$,

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ – потенциальное поле,

$\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ – соленоидальное поле.