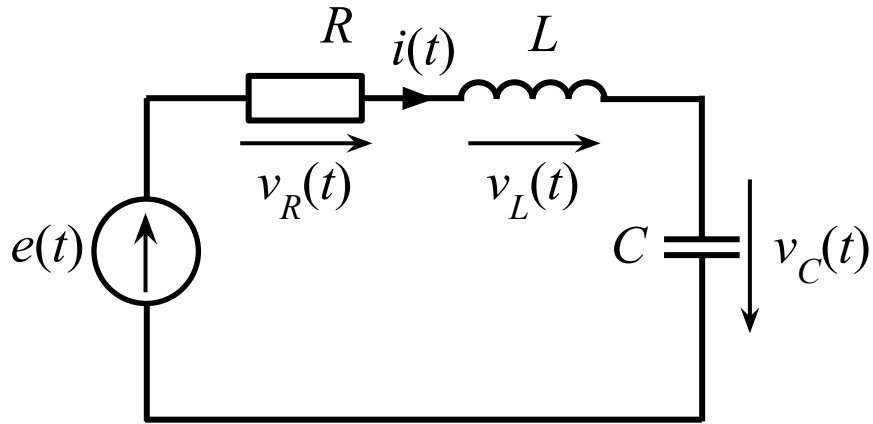
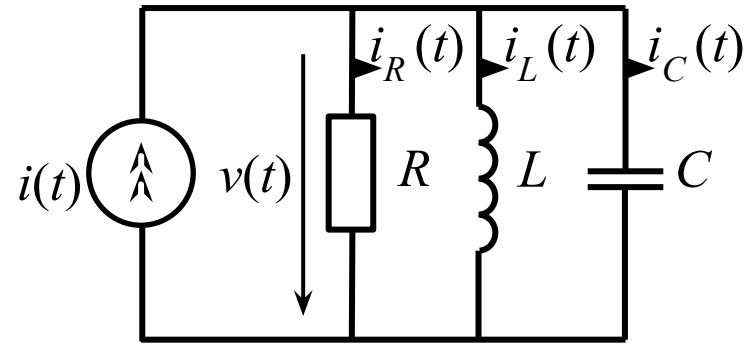


# КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Последовательный



Параллельный



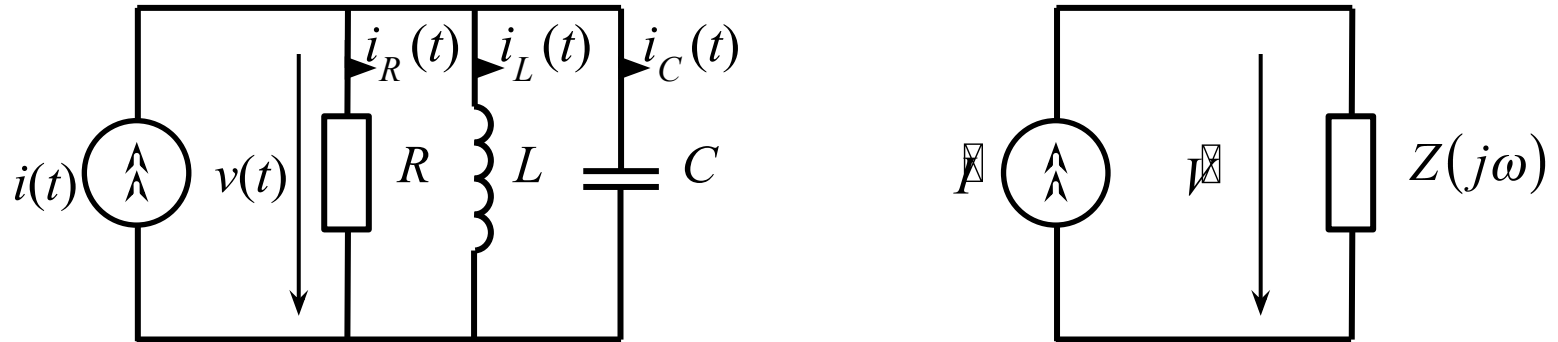
Резонанс

Напряжений

Токов

# КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Пример



Определить эквивалентное сопротивление контура  $Z(j\omega)$

$$\frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$\frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{j\omega L + R + j^2\omega^2 LCR}{R j\omega L}$$

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\frac{\omega L}{R}}$$

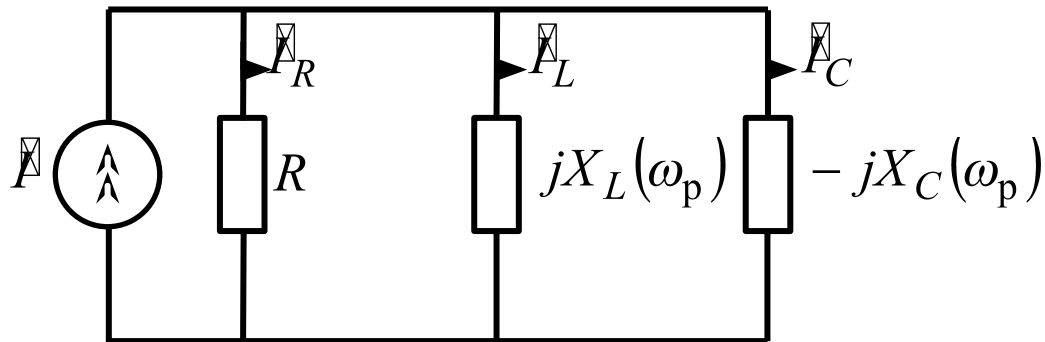
# РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА

$$1 - \omega^2 LC > 0, \Rightarrow 1 > \omega^2 LC$$

$$1 - \omega^2 LC < 0, \Rightarrow 1 < \omega^2 LC$$

$$1 - \omega^2 LC = 0, \Rightarrow 1 = \omega^2 LC$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \rightarrow Z(j\omega) = R$$



$$X_L(\omega_p) = \omega_p L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

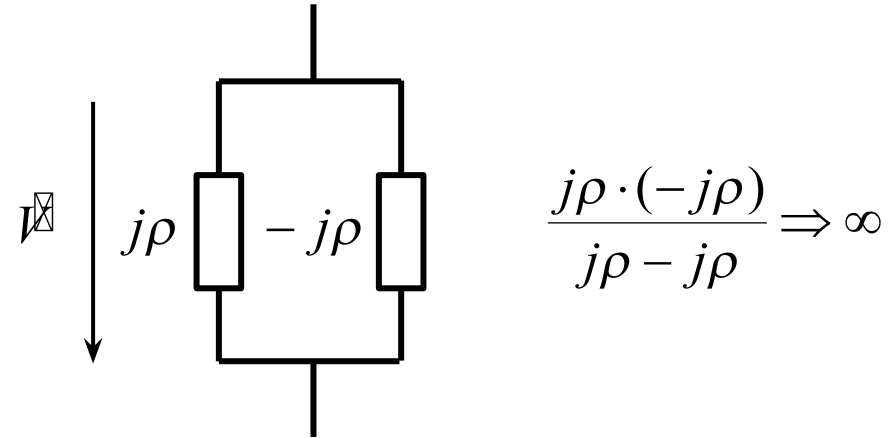
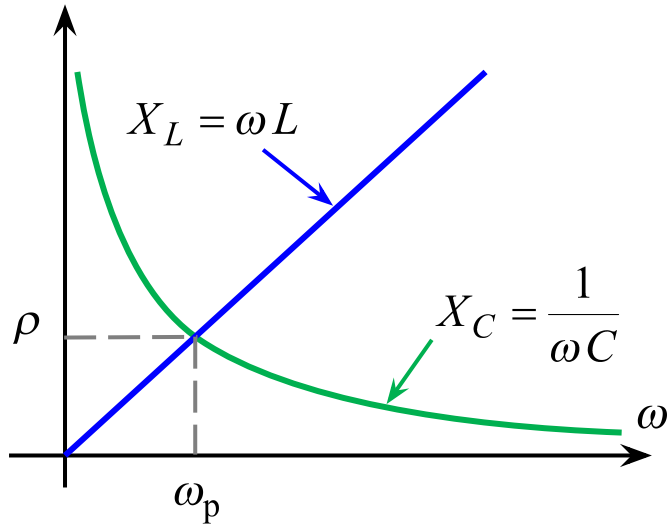
$$X_C(\omega_p) = \frac{1}{\omega_p C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Характеристическое сопротивление

$$X_L(\omega_p) = X_C(\omega_p) = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

# ТОКИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Реактивное сопротивление контура на резонансной частоте



$$I_C = \frac{I}{-jX_C(\omega_P)} = \frac{I}{-j\rho}, \quad I_L = \frac{I}{jX_L(\omega_P)} = \frac{I}{j\rho}, \quad I_C = -I_L$$

По закону Кирхгофа для токов

$$I = I_C + I_L + I_R = 0 + I_R \Rightarrow I = I_R$$

# ДОБРОТНОСТЬ

$$\omega = \omega_p$$

$$\vec{I}_C = I_{C0} \cdot e^{j\varphi_C}, \quad \vec{I}_L = I_{L0} \cdot e^{j\varphi_L}, \quad \vec{I}_R = \vec{I} = I_0 \cdot e^{j\varphi_0}$$

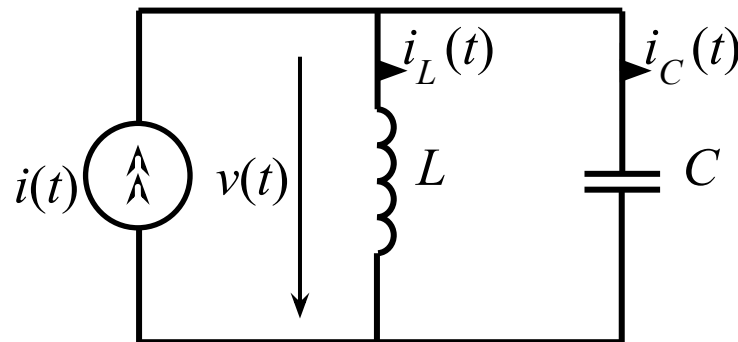
$$I_{C0} = I_{L0}, \quad \varphi_L = -\varphi_C$$

$$\frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{VR}{\rho V} = \frac{R}{\rho} = Q$$

- ✓ Добротность определяет увеличение амплитуды токов, протекающих через реактивные элементы колебательного контура при резонансе.

## Идеальный колебательный контур

$$R = \infty$$



$$Q = \infty$$

# МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Мощность и энергия в емкости на резонансной частоте

$$P_{C \text{ ср}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\vec{U} \vec{I}_C^*}{2} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\vec{I} R \vec{I}^* R}{j\rho} \right\} = 0$$

$$W_{C \text{ ср}} = \frac{C V_0^2}{4} = \frac{C R^2 I_0^2}{4}$$

Мощность и энергия в сопротивлении на резонансной частоте

$$W_{R \text{ ср}} = T_0 P_{R \text{ ср}} = \frac{\vec{I} I^*}{2} T_0 = \frac{I_0^2 R}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$\frac{W_C}{T_0 P_{R \text{ ср}}} = \frac{W_L}{T_0 P_{R \text{ ср}}} = \frac{C R^2 I_0^2 2\omega_p}{4 I_0^2 R 2\pi} = \frac{C R}{4\pi \sqrt{LC}} = \frac{R}{2\pi \rho}$$

$$\boxed{\frac{W_{C \text{ ср}}}{W_{R \text{ ср}}} = \frac{Q}{2\pi}}$$

# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура

$$Z(j\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{j\omega L}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right] + j\frac{\omega L}{R}} = \frac{j\omega\omega_p\rho}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_p\omega}{Q}} = \frac{j\omega\omega_p\rho}{(\omega_p - \omega) \cdot (\omega_p + \omega) + j\frac{\omega_p\omega}{Q}}$$

1) Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура на резонансной частоте

$$\omega = \omega_p, \quad Z(\omega_p) = \rho Q = R$$

2) Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура на частоте вблизи резонанса

$$\omega \approx \omega_p, \quad \begin{cases} \omega_p - \omega = \Delta\omega \\ \omega_p + \omega = 2\omega_p - \Delta\omega \end{cases}$$

# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$Z(j\Delta\omega) = \frac{j\omega_p^2 \rho}{\Delta\omega \cdot 2\omega_p + j\frac{\omega_p^2}{Q}} = \frac{\rho Q}{1 - j2\frac{\Delta\omega}{\omega_p} Q} = \frac{R}{1 - j2\frac{\Delta\omega}{\omega_p} Q}$$

$$Z(j\Delta\omega) = \frac{R}{1 - j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_p}}$$

$$2Q\frac{\Delta\omega_{\text{гр}}}{\omega_p} = 1$$
$$2\Delta\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_p}{Q} = \Delta\omega_{\text{к}}$$

$\Delta\omega_{\text{к}}$  – полоса пропускания контура



# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

3) Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура вблизи нулевой частоты

$$\omega \rightarrow 0$$

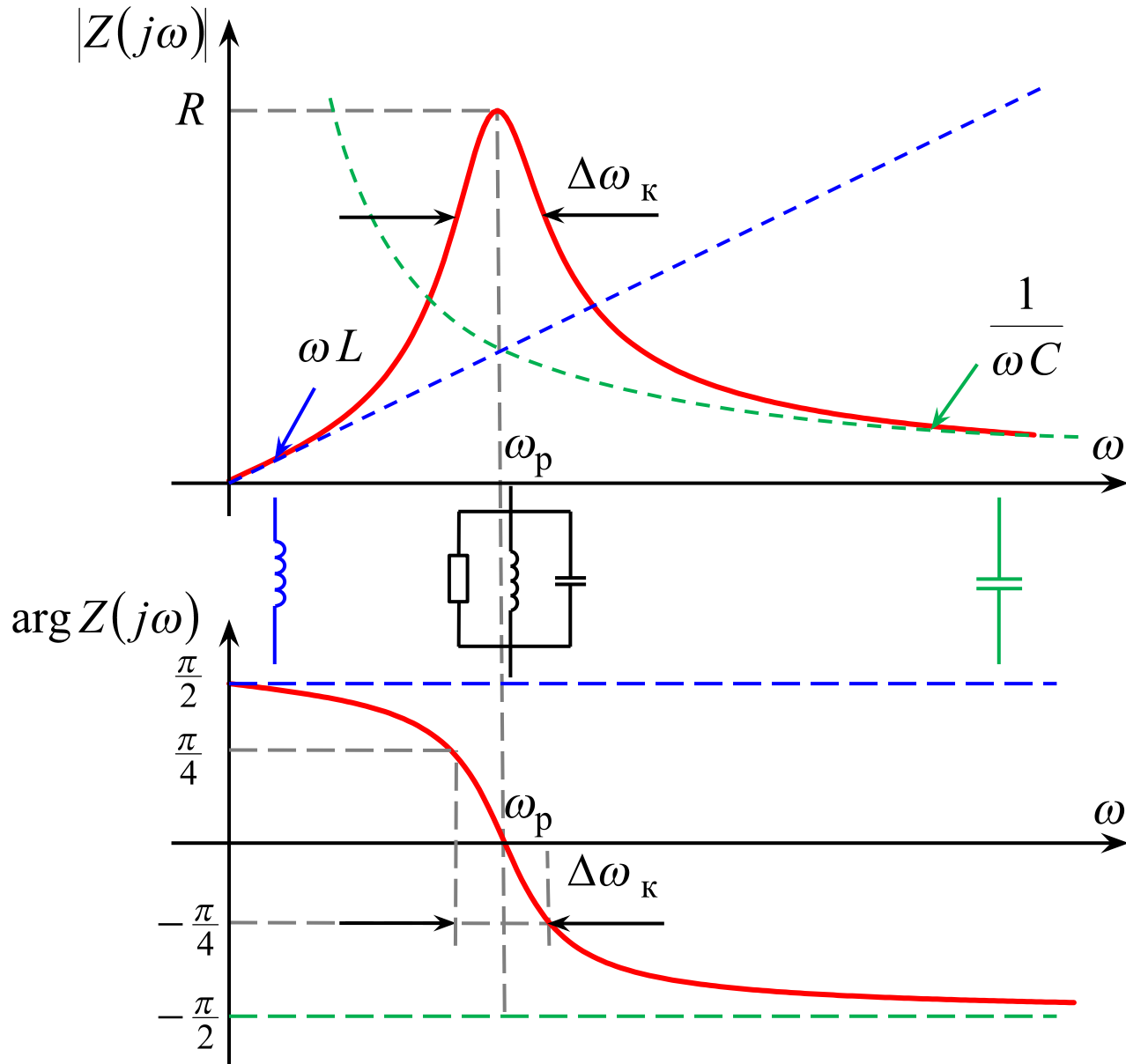
$$Z(j\omega) = \frac{j\omega\omega_p\rho}{\omega_p^2 + j\frac{\omega_p\omega}{Q}} \approx j\frac{\omega}{\omega_p}\rho = j\omega \cdot \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \boxed{j\omega L}$$

4) Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура на бесконечной частоте

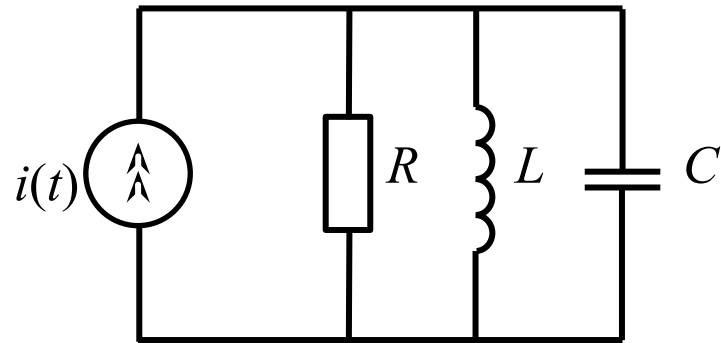
$$\omega \rightarrow \infty$$

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega\omega_p\rho}{-\omega^2 + j\frac{\omega_p\omega}{Q}} \approx j\frac{\omega_p}{-\omega}\rho = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \boxed{\frac{1}{j\omega C}}$$

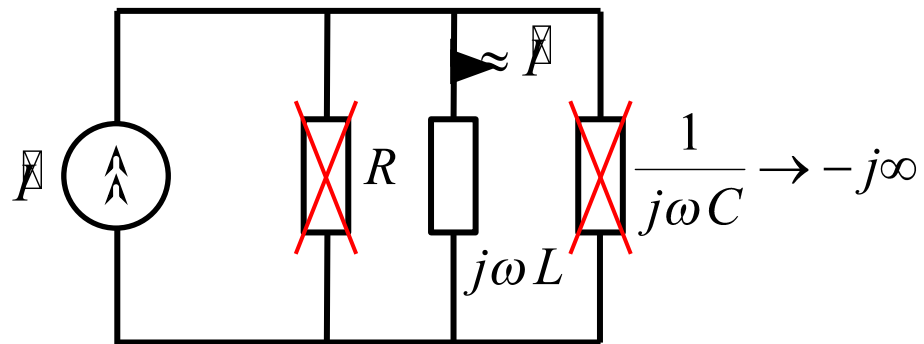
# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



$$\omega \rightarrow 0$$

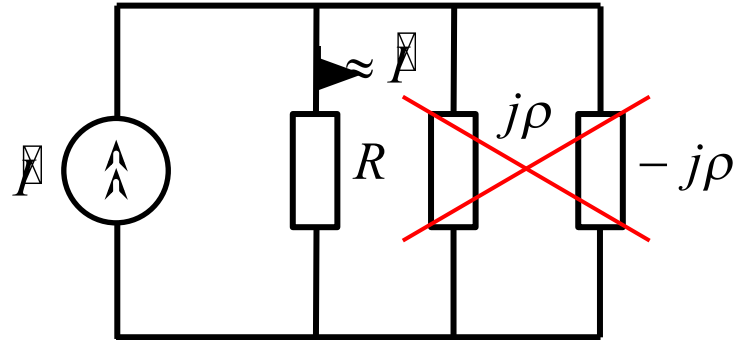


$$R \gg \omega L$$

$$Z \cong j\omega L$$

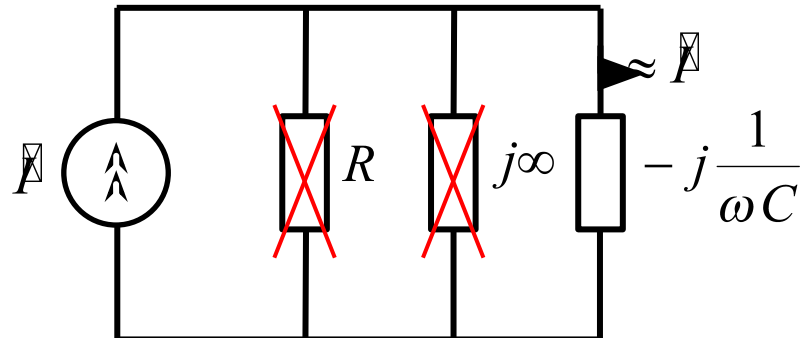
# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$\omega = \omega_p$$



$$Z = R$$

$$\omega \rightarrow \infty$$



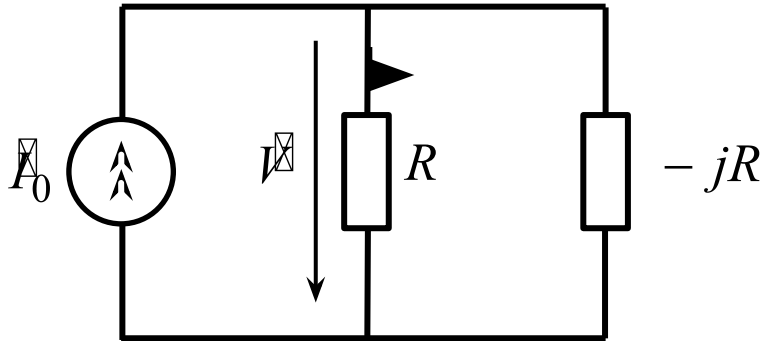
$$R \gg \frac{1}{\omega C} \quad Z \cong -j\frac{1}{\omega C}$$

# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

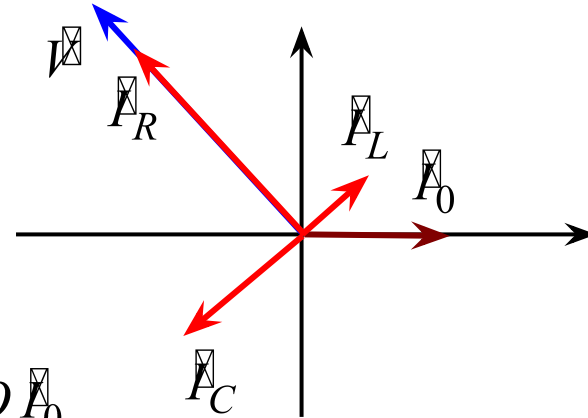
$$\omega = \omega_H$$

$$X_L > X_C$$

$$\dot{I} = \dot{I}_0 \cdot Z, \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{I}}{jX_L}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{I}}{-jX_C}$$



$$Z = \frac{jR^2}{R - jR} = \frac{jR}{1 - j}$$

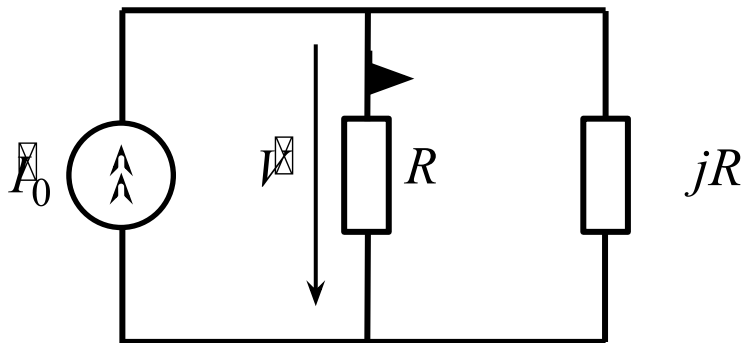


$$\dot{I}_L = \frac{Q \dot{I}_0}{1 - j}$$

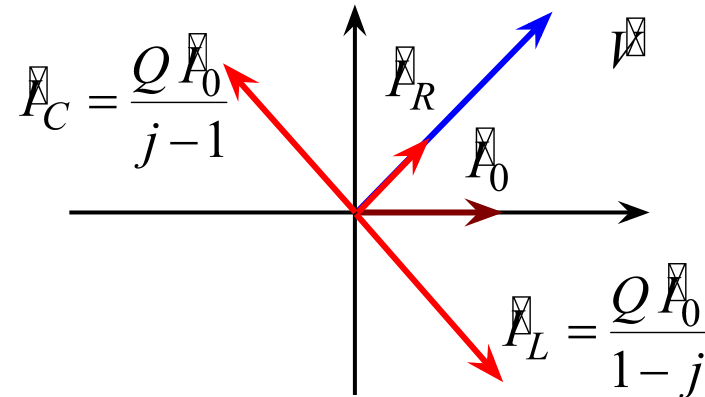
$$\omega = \omega_B$$

$$X_C > X_L$$

$$\dot{I} = -jX_C \cdot \dot{I}_C, \quad \dot{I}_R = \frac{\dot{I}}{R}, \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{I}}{jX_L}$$



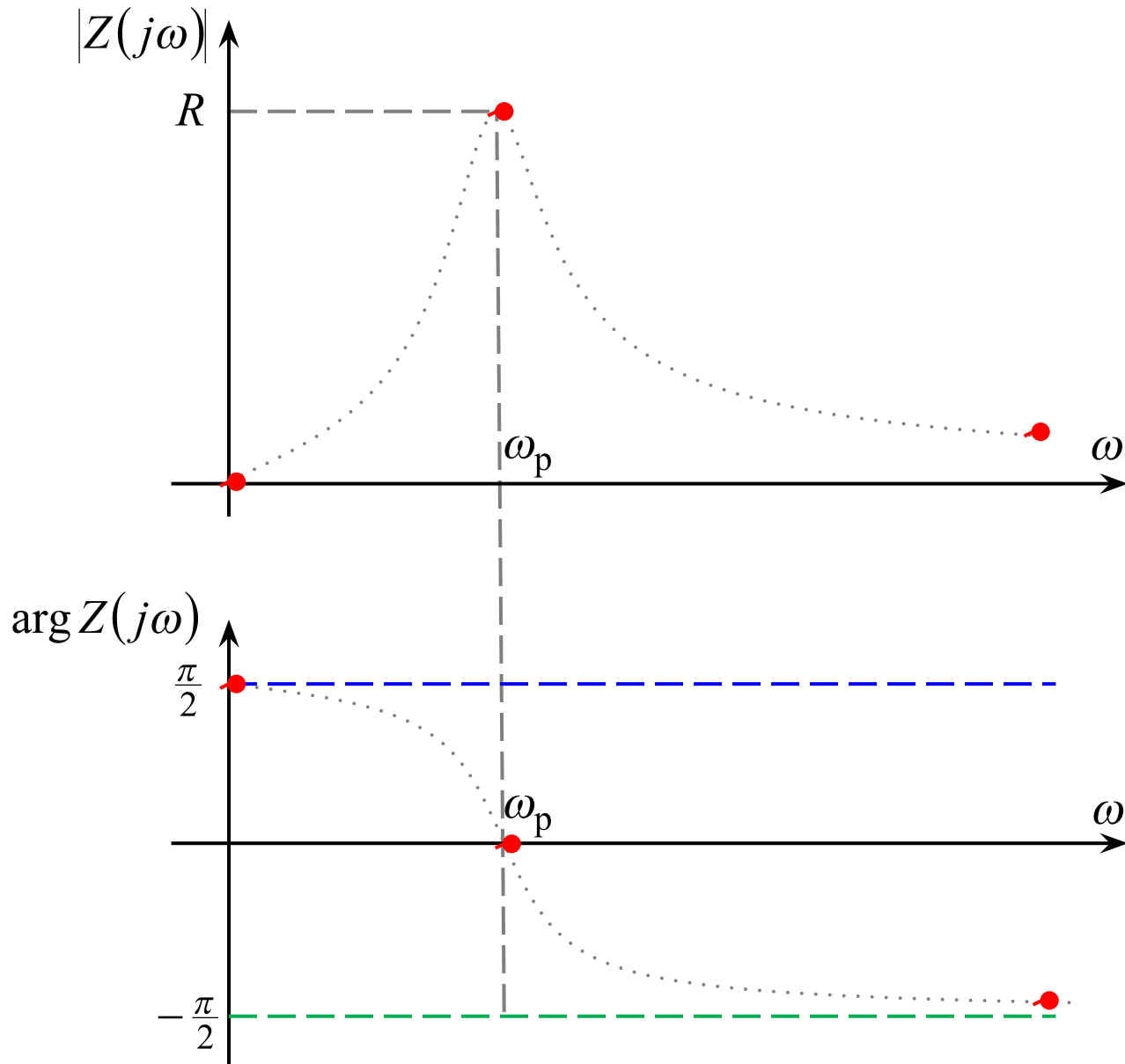
$$Z = \frac{jR^2}{R + jR} = \frac{jR}{1 + j}$$



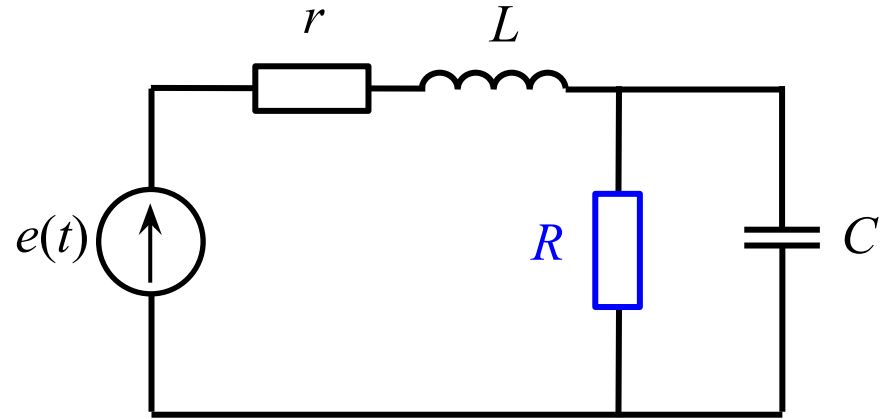
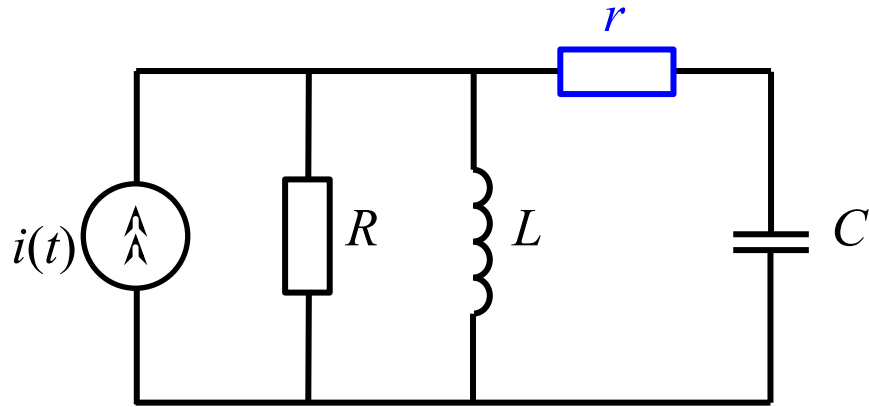
$$\dot{I}_C = \frac{Q \dot{I}_0}{j - 1}$$

$$\dot{I}_L = \frac{Q \dot{I}_0}{1 - j}$$

# КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



# КОНТУРЫ ОБЩЕГО ВИДА



$$Q_{\text{посл}} = \frac{\rho}{r_{\text{ЭКВ}}}, \quad Q_{\text{пар}} = \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{\rho}$$

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{Q_{\text{посл}}} + \frac{1}{Q_{\text{пар}}}} = \frac{1}{\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{R}} = \frac{R\rho}{Rr + \rho^2} = \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{R}} = \frac{\rho}{r_{\text{ЭКВ}}}$$

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{Q_{\text{посл}}} + \frac{1}{Q_{\text{пар}}}} = \frac{1}{\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{R}} = \frac{1}{\left(\frac{r}{\rho^2} + \frac{1}{R}\right) \cdot \rho} = \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{\rho}$$

# КОНТУРЫ ОБЩЕГО ВИДА ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Эквивалентное комплексное сопротивление колебательного контура  
на резонансной частоте

$$\omega = \omega_p, \quad Z_{\text{посл}}(j\omega_p) = r_{\text{экв}}, \quad Z_{\text{пар}}(j\omega_p) = R_{\text{экв}}$$

