

# Автоматы и алгоритмы

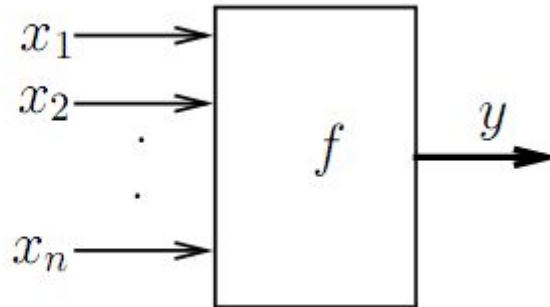
четвертый семестр

# Лекция 1

## Комбинационные схемы и конечные автоматы

### §1. Комбинационные схемы.

$y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – булева функция от  $n$  переменных



полный функциональный элемент

Входные сигналы поступают в момент времени  $t$ ,  
временем вычисления пренебрегают и получают  $y$  в тот же  
момент  $t$ .

**Комбинационная схема (КС)** –это функциональная схема, комбинация сигналов на выходе которой однозначно определяется комбинацией сигналов на ее входе.

Такой способ обработки сигналов называют **комбинационным**.

На практике выходные сигналы зависят от сигналов, поступивших в предыдущие моменты времени.

Возникает необходимость хранить поступившие сигналы с специальным устройстве – блоке **памяти**.

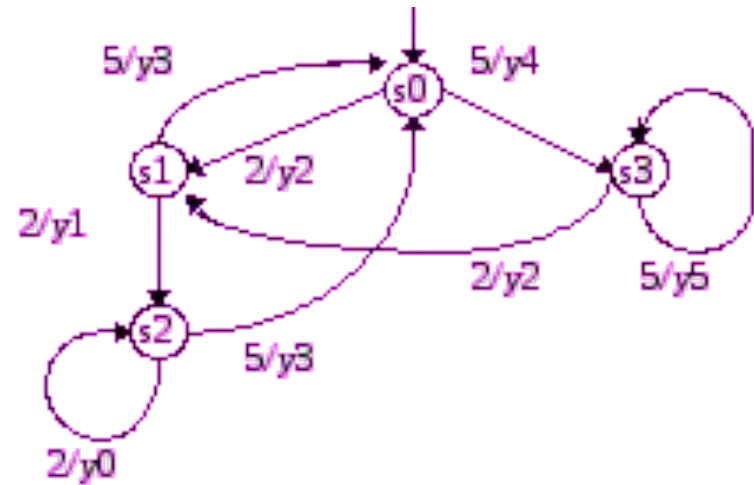
**Автоматы с памятью**

Опишем поведение родителя, отправившего сына в школу.  
Сын приносит двойки и пятерки. Отец не хочет хвататься за ремень каждый раз, как только сын получит очередную двойку, и выбирает более тонкую тактику воспитания.



Автомат, моделирующий родителя, имеет четыре состояния  $\{s_0, \dots, s_3\}$ , и два входных сигнала - оценки, полученные сыном в школе:  $\{2, 5\}$ . Начиная с начального состояния  $s_0$  (оно помечено входной стрелкой), автомат под воздействием входных сигналов переходит из одного состояния в другое и выдает выходные сигналы - реакции на входы.

Выходы автомата  $\{y_0, \dots, y_5\}$  будем интерпретировать как действия родителя так:



- $y_0$ : - брать ремень;
- $y_1$ : - ругать сына;
- $y_2$ : - успокаивать сына;
- $y_3$ : - надеяться;
- $y_4$ : - радоваться;
- $y_5$ : - ликовать.

Сына, получившего одну и ту же оценку - двойку, ожидает дома совершенно различная реакция в зависимости от предыстории его учебы. Например, после третьей двойки в истории 2,2,2 сына встретят ремнем, а в истории 2,2,5,2 - будут успокаивать. Каждая предыстория определяет текущее состояние автомата. Таким образом, текущее состояние представляет все то, что автомат знает о прошлом с точки зрения его будущего поведения - реакций на последующие входы.

## §2. Определение конечного автомата

**Автомат** (конечный) – дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат  $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$  – пятерка объектов, где

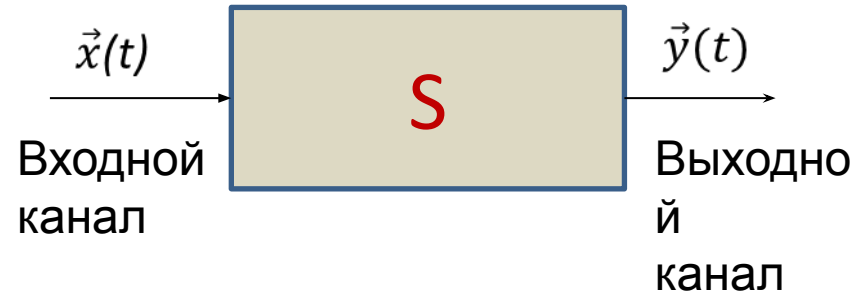
$X$ -входной алфавит,

$Y$ - выходной алфавит,

$Q$ - множество внутренних состояний,

$\varphi: X \times Q \rightarrow Q$ ;  $\varphi$ - функция переходов,

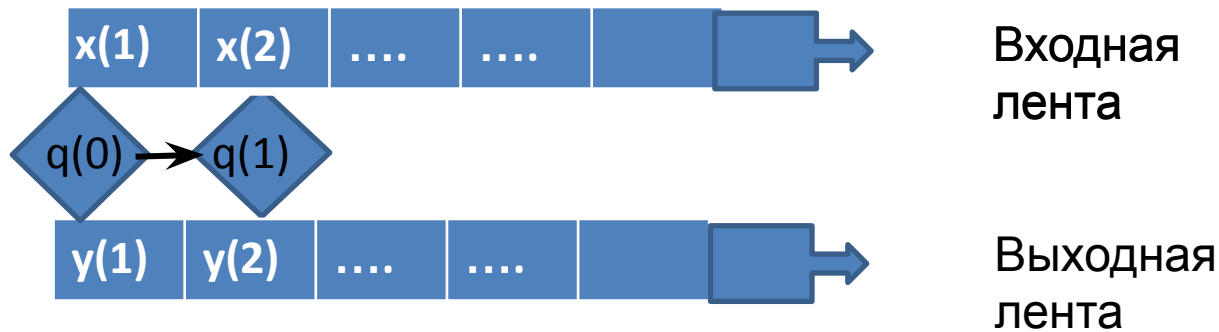
$\psi: X \times Q \rightarrow Y$ ;  $\psi$  – функция выходов.



$$|X| = n; |Y| = m; |Q| = k$$

Все множества конечны  
–  
Конечный автомат.

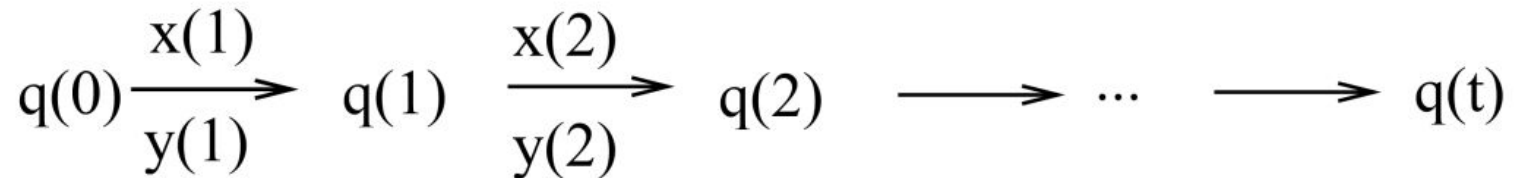
### Описание работы автомата



## Функции перехода и выхода:

$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

- **График работы автомата**

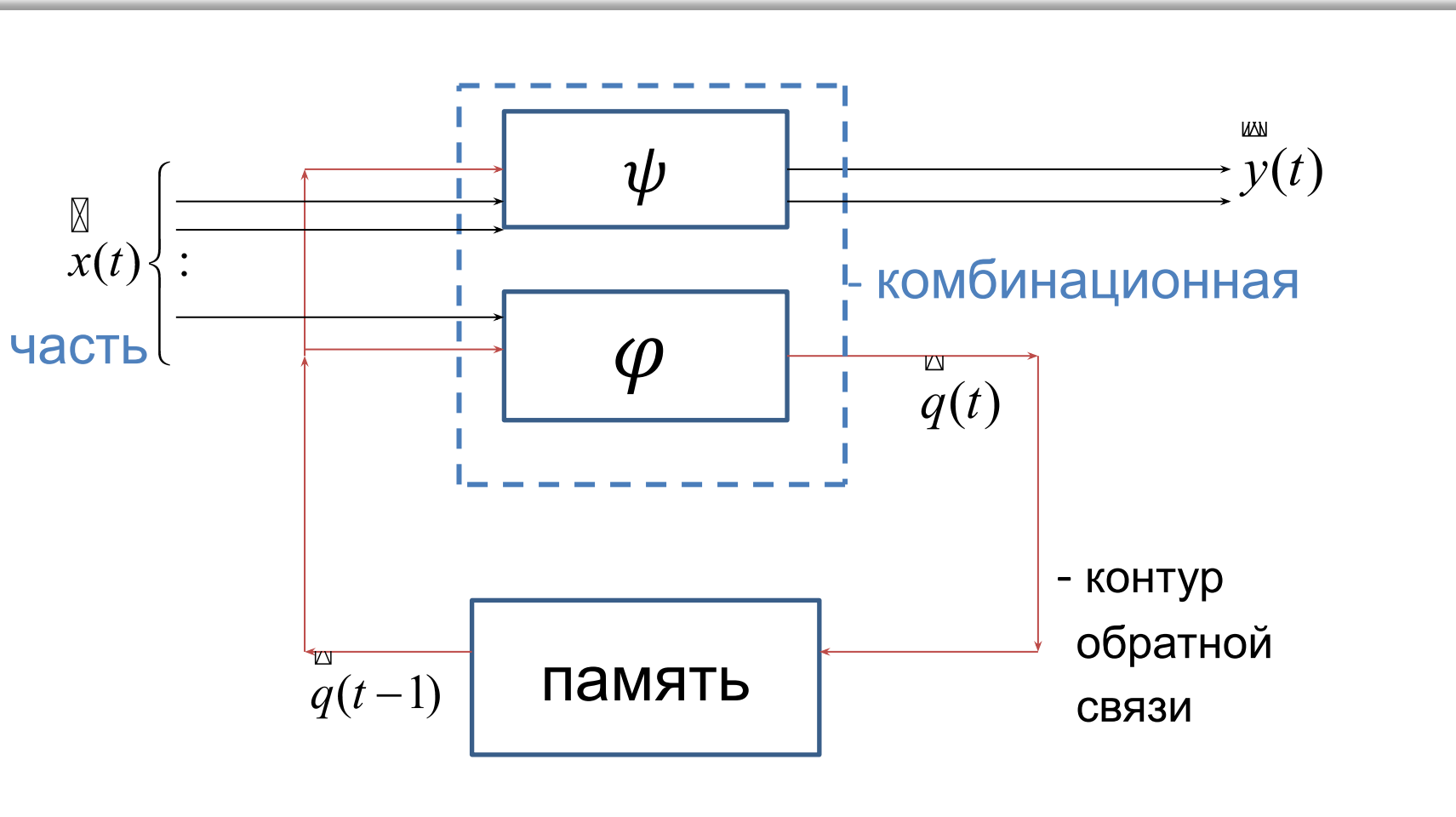


Если  $q_0$  - начальное состояние,  $\alpha$  – входное слово,  $\omega$  – выходное слово, то преобразование  $S(q_0, \alpha) = \omega$

называется **автоматным преобразованием**



# Принципиальная модель структуры конечного автомата



$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

# Способы задания автоматов. Логические автоматы.

## §3. Способы задания автоматов.

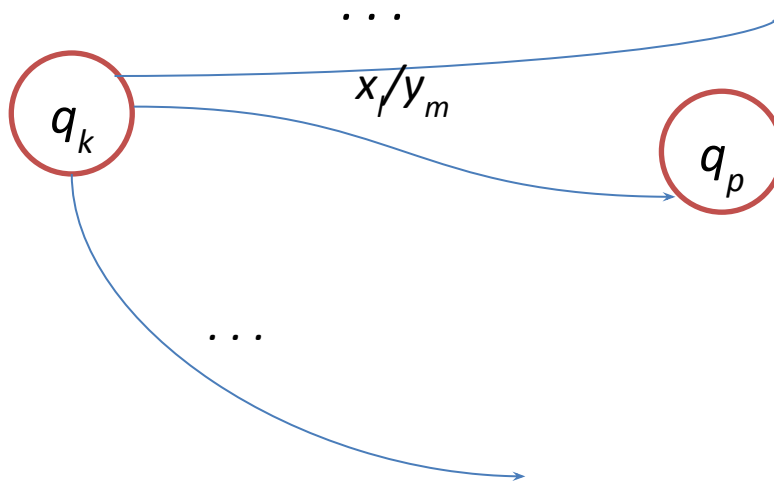
- 1. Табличный способ задания автомата (АТ).

$x(t) \backslash q(t-1)$	$q_1$	$q_2$	...	$q_k$	...	$q_r$
$x_1$						
...						
$x_l$				$\backslash$ $q_p$		
...				$y_m$		
$x_n$						

$$\varphi(x_l, q_k) = q_p, \quad \psi((x_l, q_k) = y_m$$

## 2. Способ задания в виде диаграммы Мура (ДМ) .

- ДМ- это орграф, в котором каждая вершина помечена одним из состояний (количество вершин равно количеству состояний). Из каждой вершины выходит столько стрелок, сколько символов в алфавите  $X$ .

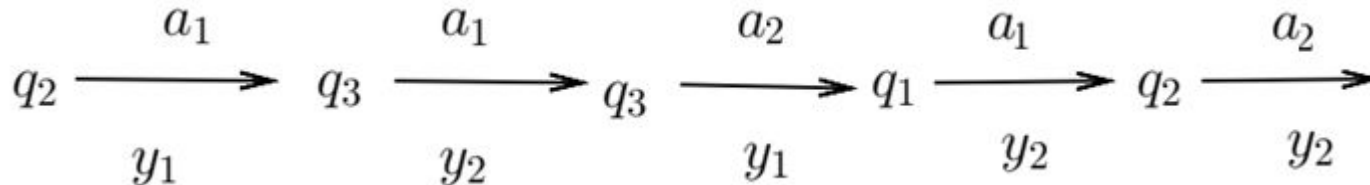


# Пример. Автомат задан в виде АТ

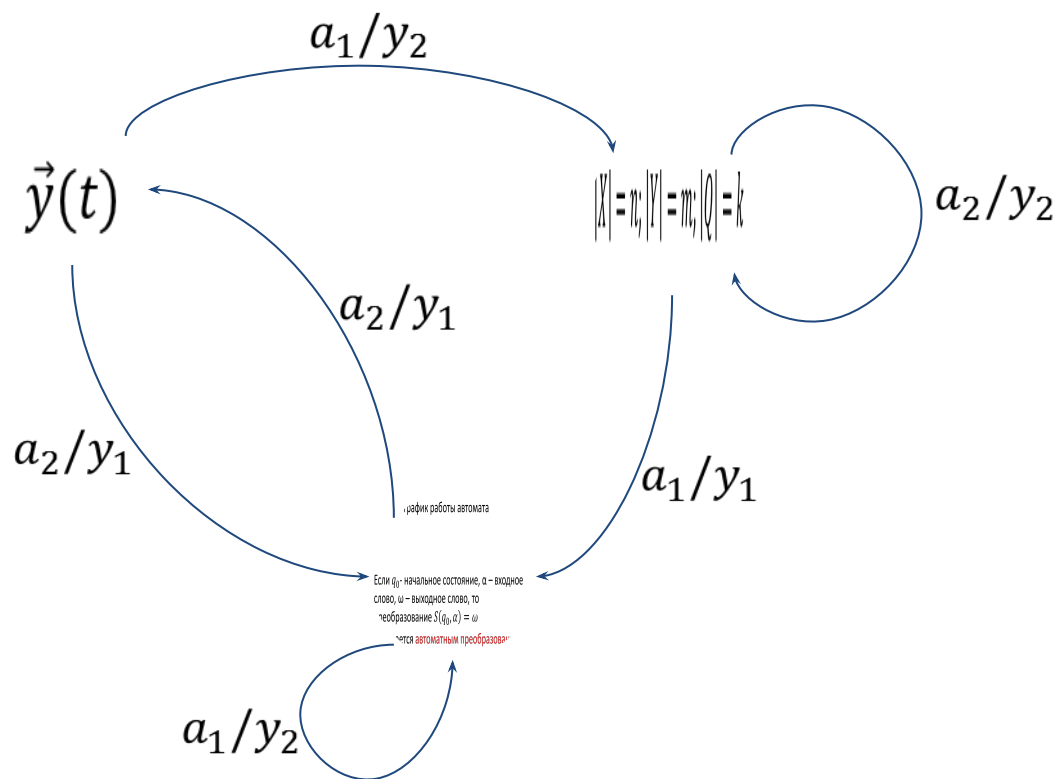
$q(t-1)$	$q1$	$q2$	$q3$
$x(t)$			

**Автомат** (конечный) – дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат  $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$  – пятерка объектов, где  
 $X$  – входной алфавит,  
 $Y$  – выходной алфавит,  
 $Q$  – множество внутренних состояний,  
 $\varphi: X$   
 $\psi: X$



# Зададим автомат с помощью ДМ:



### 3. Задание автомата с помощью системы канонических уравнений (СКУ)

$X, Y, Q$  кодируются двоичными числами.

Имеем СКУ:

$$\begin{cases} \varphi(\overset{\boxtimes}{x}(t), \overset{\boxtimes}{q}(t-1)) = \overset{\boxtimes}{q}(t) \\ \psi(\overset{\boxtimes}{x}(t), \overset{\boxtimes}{q}(t-1)) = \overset{\boxtimes}{y}(t) \end{cases}$$

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  становятся булевыми функциями.

Сам автомат становится **ЛОГИЧЕСКИМ**.

Продолжение примера (строим логический автомат):  $X : a_1 \sim 0, a_2 \sim 1$

$$Y : y_1 \sim 0, y_2 \sim 1$$

$$Q : q_1 \sim 00, q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; q(t) \sim z_1(t)z_2(t)$$

АТ для  
логического  
Автомата

$X: a_1 \sim 0, a_2 \sim 1$

$\rightsquigarrow$

$Y: y_1 \sim 0, y_2 \sim 1$

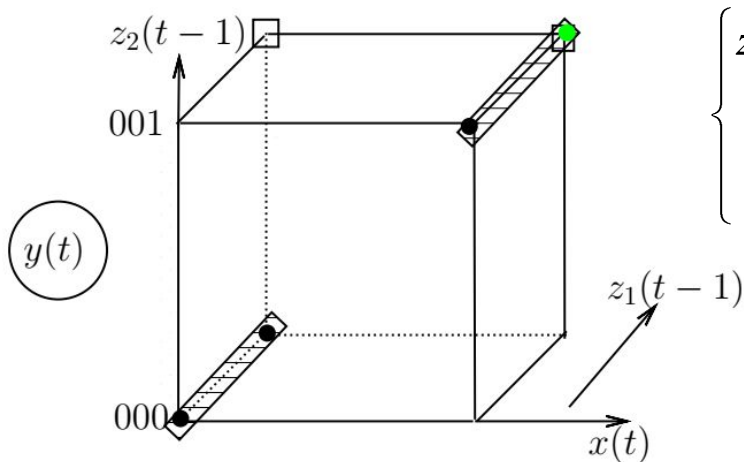
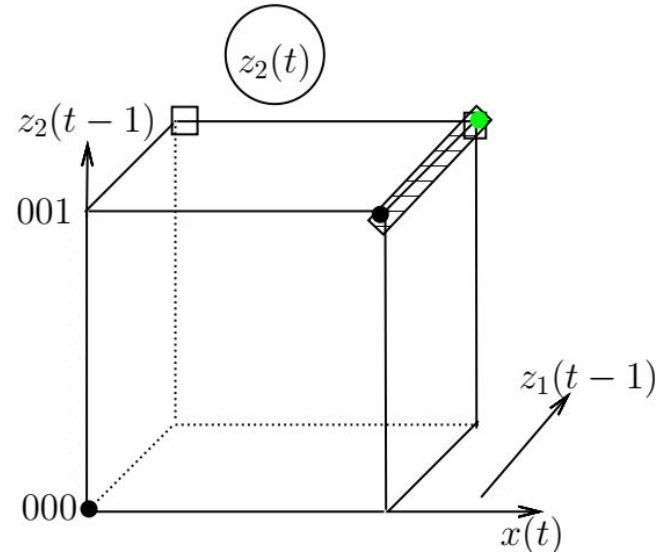
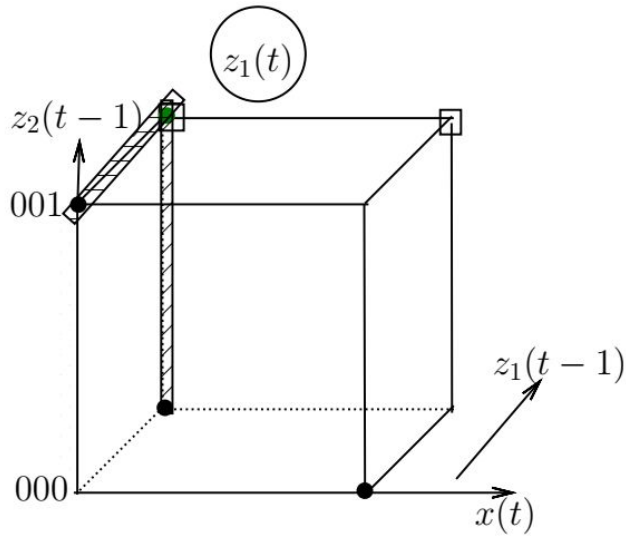
$Q: q_1 \sim 00, q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; q(t) \sim z_1(t)z_2(t)$

$X \backslash z_1 z_2$	00	01	10	11
0	01 1	10 0	10 1	10 0
1	10 0	01 1	00 0	01 1

$x(t)$					$y(t)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Таблица  
ИСТИННОСТ  
И  
↙

АТ дополняем резервными состояниями так, чтобы функции  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $y_1(t)$  имели минимальные ДНФ



$$\begin{cases} z_1(t) = \bar{x}(t) \cdot z_2(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot z_1(t-1) \vee x(t) \cdot z_1(t-1) \cdot z_2(t-1) \\ z_2(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{z}_1(t-1) \cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t) \cdot z_2(t-1) \\ y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t) \cdot z_2(t-1) \end{cases}$$



## §2. Определение логического автомата.

- Конечный автомат  $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$  называется **логическим**, если все его алфавиты являются булевыми кубами, а именно  $X = B^n, Y = B^k, Q = B^r$ .
- В этом случае функции переходов и выходов ( $\varphi$  и  $\psi$ ) становятся булевыми векторными функциями от  $n + r$  аргументов и мы имеем систему из  $r + k$  канонических уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{q}(t) \\ \psi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{y}(t) \end{cases}$$

При этом могут возникнуть *фиктивные* или *резервные* состояния.

## §3. Примеры автоматов

- 1. Элемент единичной задержки (З).

$$X=\{0,1\}=Y=Q$$



<b>x</b>	<b>Q</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	0	0	1
<b>1</b>	0	1	1

$$\begin{cases} q(t) = x(t) \\ y(t) = q(t-1) \end{cases}$$

- 2. Последовательный арифметический сумматор.

$a$  и  $b$  – двоичные  $-n$ - разрядные двоичные числа.

$$a+b=y?$$

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

+

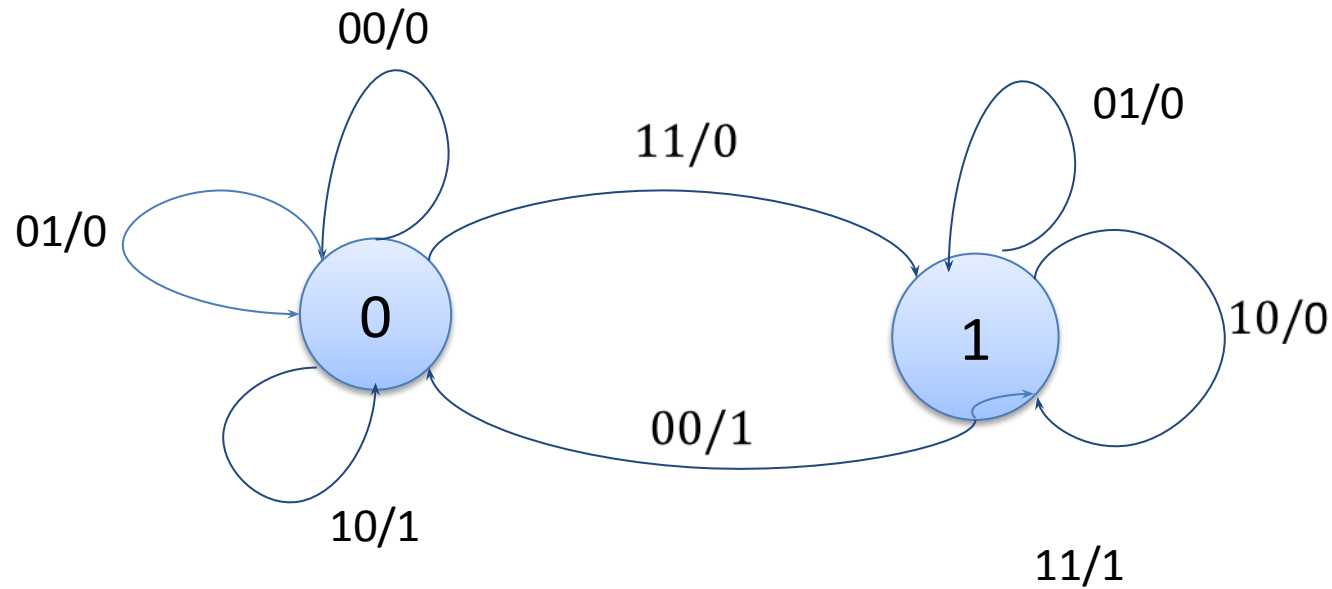
$$b = b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

$$X=\{00,01,10,11\}; Y=Q=\{0,1\}$$

---

$$y = y_{n+1} y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0$$

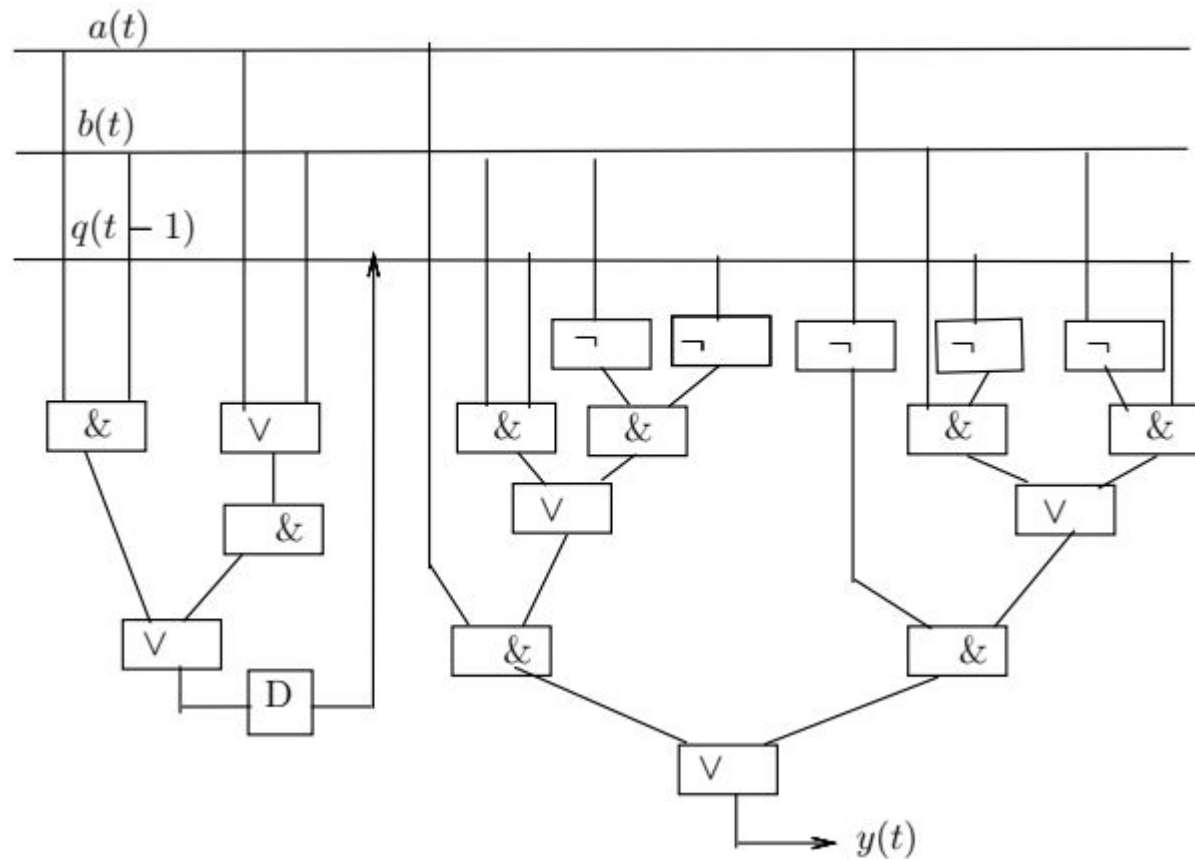
<b>X</b>	<b>Q</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
00	0	0	1
01	1	0	0
10	1	0	0
11	0	1	1



После минимизации ДНФ получим СКУ:

$$\begin{cases} q(t) = a(t) \cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t)) \cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(b(t) \cdot q(t-1) \vee \bar{b}(t) \cdot \bar{q}(t-1)) \vee \bar{a}(t) \cdot (b(t)\bar{q}(t-1) \vee \bar{b}(t)q(t-1)) \end{cases}$$

# Реализуем автомат в виде СЛС



4 яруса,  
Сложность схемы равна

14

$$\begin{cases} q(t) = a(t) \cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t)) \cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(b(t) \cdot q(t-1) \vee \bar{b}(t) \cdot \bar{q}(t-1)) \vee \bar{a}(t) \cdot (b(t)q(t-1) \vee \bar{b}(t)q(t-1)) \end{cases}$$