

Автоматы и алгоритмы

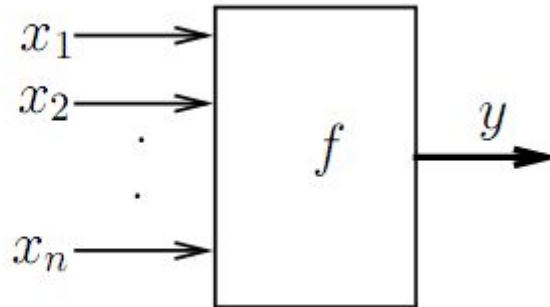
четвертый семестр

Лекция 1

Комбинационные схемы и конечные автоматы

§1. Комбинационные схемы.

$y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция от n переменных



полный функциональный элемент

Входные сигналы поступают в момент времени t ,
временем вычисления пренебрегают и получают y в тот же
момент t .

Комбинационная схема (КС) –это функциональная схема, комбинация сигналов на выходе которой однозначно определяется комбинацией сигналов на ее входе.

Такой способ обработки сигналов называют **комбинационным**.

На практике выходные сигналы зависят от сигналов, поступивших в предыдущие моменты времени.

Возникает необходимость хранить поступившие сигналы с специальным устройстве – блоке **памяти**.

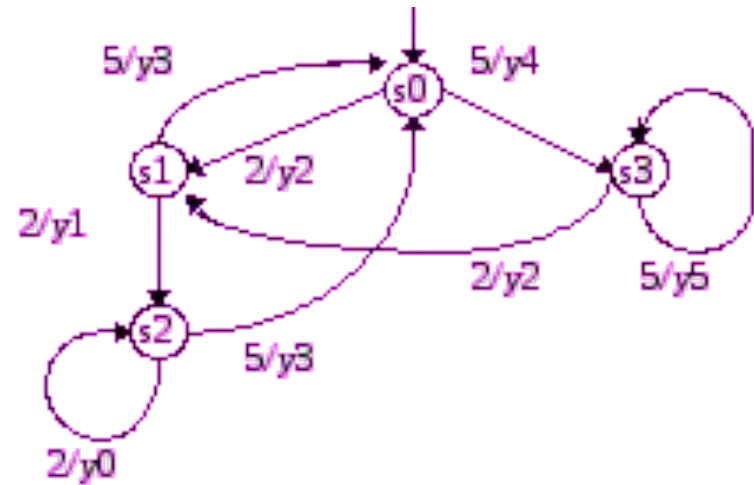
Автоматы с памятью

Опишем поведение родителя, отправившего сына в школу.
Сын приносит двойки и пятерки. Отец не хочет хвататься за ремень каждый раз, как только сын получит очередную двойку, и выбирает более тонкую тактику воспитания.



Автомат, моделирующий родителя, имеет четыре состояния $\{s_0, \dots, s_3\}$, и два входных сигнала - оценки, полученные сыном в школе: $\{2, 5\}$. Начиная с начального состояния s_0 (оно помечено входной стрелкой), автомат под воздействием входных сигналов переходит из одного состояния в другое и выдает выходные сигналы - реакции на входы.

Выходы автомата $\{y_0, \dots, y_5\}$ будем интерпретировать как действия родителя так:



- y_0 : - брать ремень;
- y_1 : - ругать сына;
- y_2 : - успокаивать сына;
- y_3 : - надеяться;
- y_4 : - радоваться;
- y_5 : - ликовать.

Сына, получившего одну и ту же оценку - двойку, ожидает дома совершенно различная реакция в зависимости от предыстории его учебы. Например, после третьей двойки в истории 2,2,2 сына встретят ремнем, а в истории 2,2,5,2 - будут успокаивать. Каждая предыстория определяет текущее состояние автомата. Таким образом, текущее состояние представляет все то, что автомат знает о прошлом с точки зрения его будущего поведения - реакций на последующие входы.

§2. Определение конечного автомата

Автомат (конечный) – дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ – пятерка объектов, где

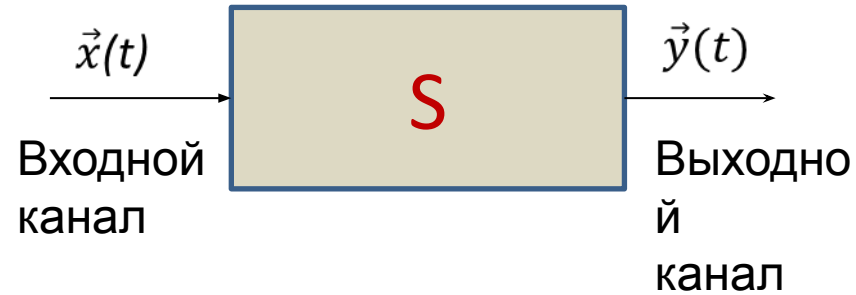
X -входной алфавит,

Y - выходной алфавит,

Q - множество внутренних состояний,

$\varphi: X \times Q \rightarrow Q$; φ - функция переходов,

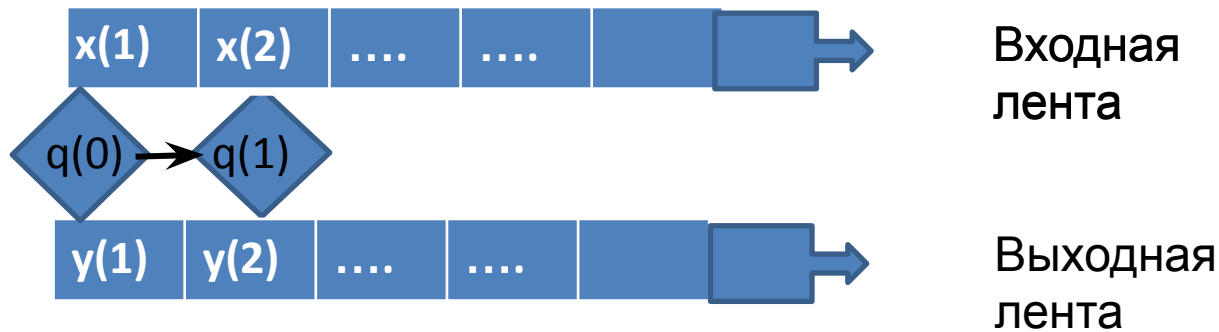
$\psi: X \times Q \rightarrow Y$; ψ – функция выходов.



$$|X| = n; |Y| = m; |Q| = k$$

Все множества конечны
 –
 Конечный автомат.

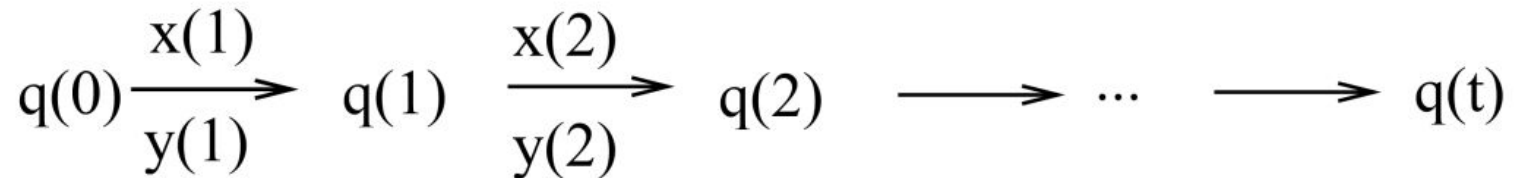
Описание работы автомата



Функции перехода и выхода:

$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

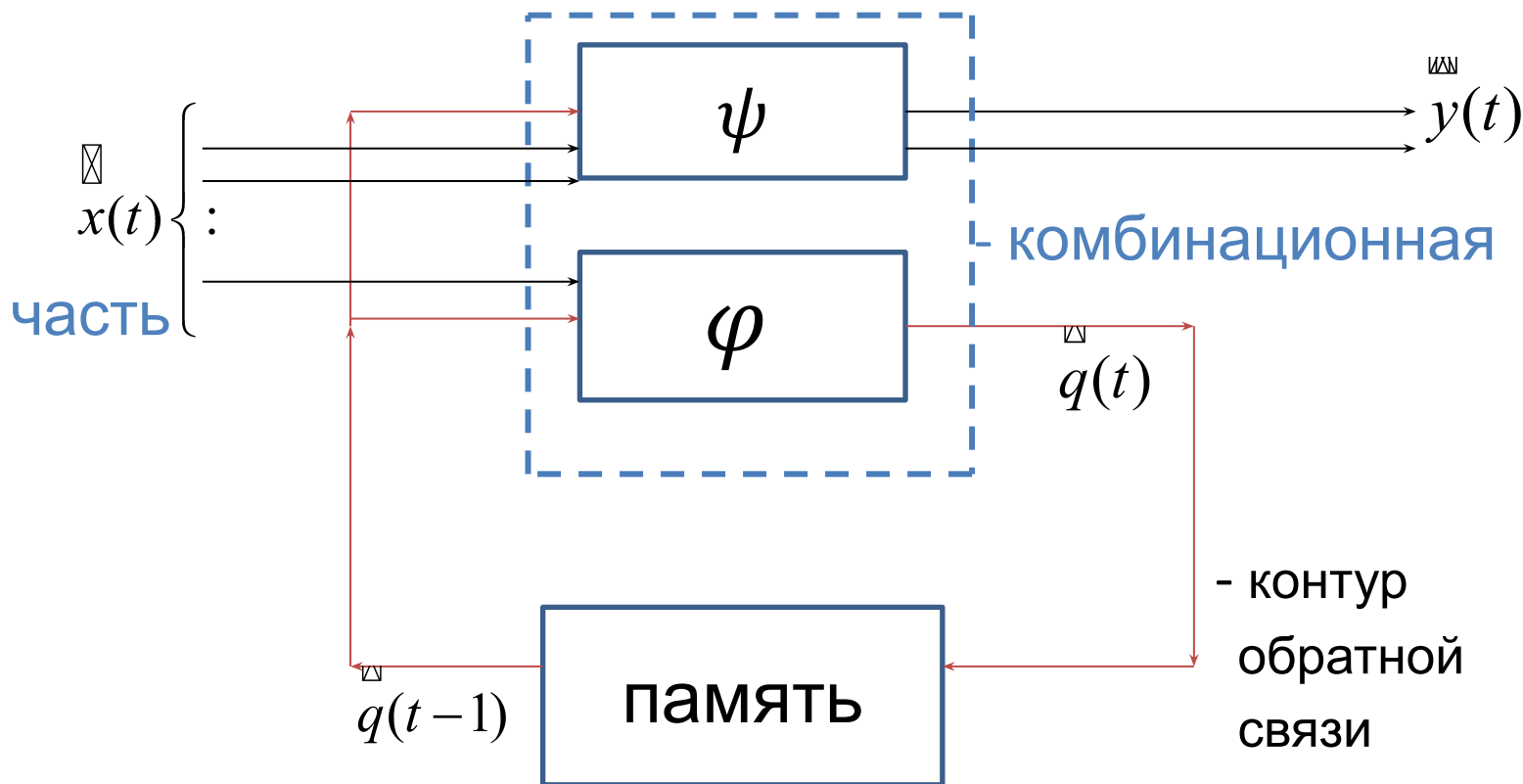
- **График работы автомата**



Если q_0 - начальное состояние, α – входное слово, ω – выходное слово, то преобразование $S(q_0, \alpha) = \omega$

называется **автоматным преобразованием**

Принципиальная модель структуры конечного автомата



$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

Способы задания автоматов. Логические автоматы.

§3. Способы задания автоматов.

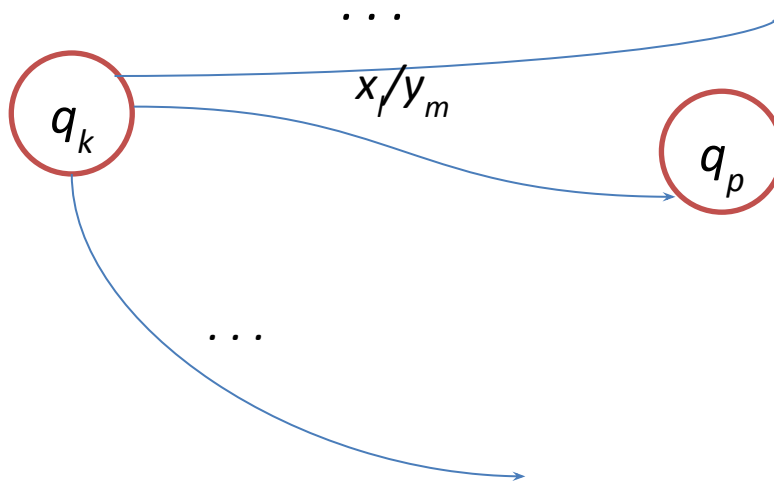
- 1. Табличный способ задания автомата (АТ).

$x(t) \backslash q(t-1)$	q_1	q_2	...	q_k	...	q_r
x_1						
...						
x_l				\backslash q_p		
...				y_m		
x_n						

$$\varphi(x_l, q_k) = q_p, \quad \psi((x_l, q_k) = y_m$$

2. Способ задания в виде диаграммы Мура (ДМ) .

- ДМ- это орграф, в котором каждая вершина помечена одним из состояний (количество вершин равно количеству состояний). Из каждой вершины выходит столько стрелок, сколько символов в алфавите X .

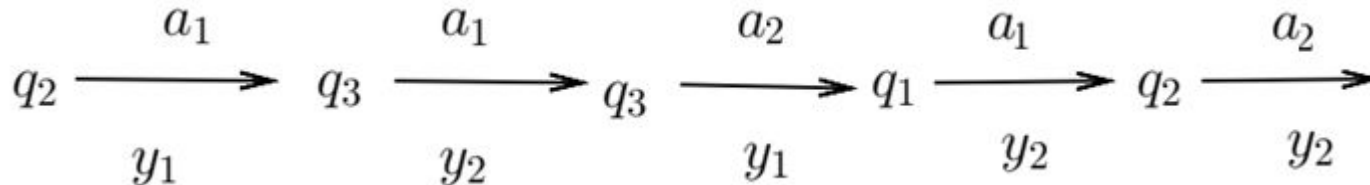


Пример. Автомат задан в виде АТ

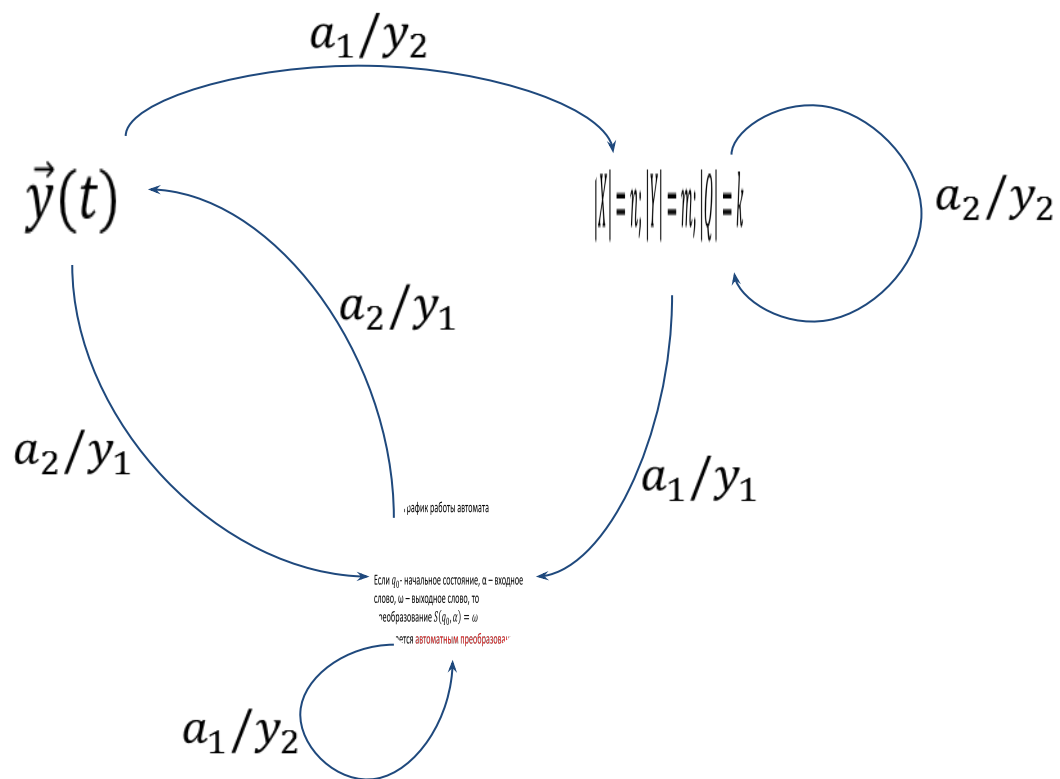
$q(t-1)$	$q1$	$q2$	$q3$
$x(t)$			

Автомат (конечный) – дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ – пятерка объектов, где
 X – входной алфавит,
 Y – выходной алфавит,
 Q – множество внутренних состояний,
 $\varphi: X$
 $\psi: X$



Зададим автомат с помощью ДМ:



3. Задание автомата с помощью системы канонических уравнений (СКУ)

X, Y, Q кодируются двоичными числами.

Имеем СКУ:

$$\begin{cases} \varphi(x(t), q(t-1)) = q(t) \\ \psi(x(t), q(t-1)) = y(t) \end{cases}$$

Функции φ и ψ становятся булевыми функциями.

Сам автомат становится **ЛОГИЧЕСКИМ**.

Продолжение примера (строим логический автомат): $X : a_1 \sim 0, a_2 \sim 1$

$$Y : y_1 \sim 0, y_2 \sim 1$$

$$Q : q_1 \sim 00, q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; q(t) \sim z_1(t)z_2(t)$$

АТ для
логического
Автомата

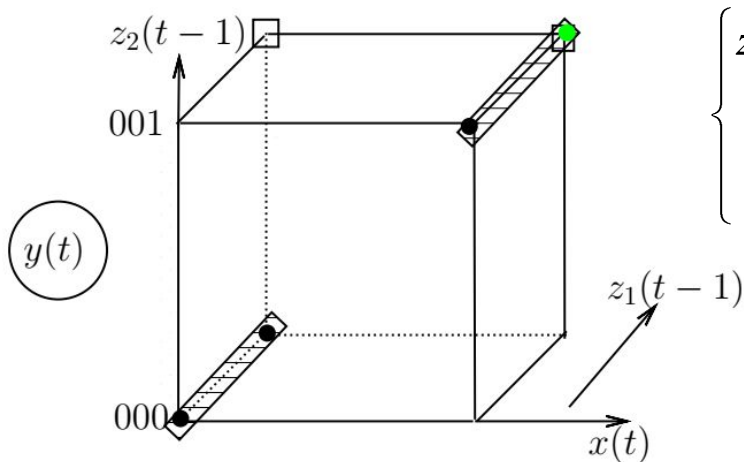
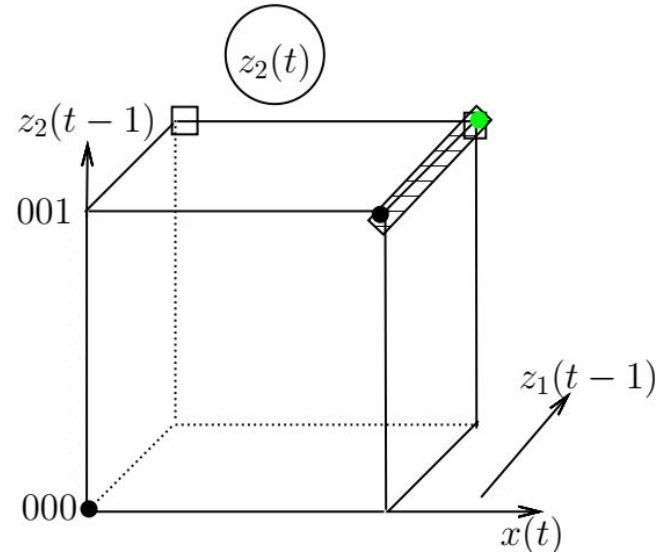
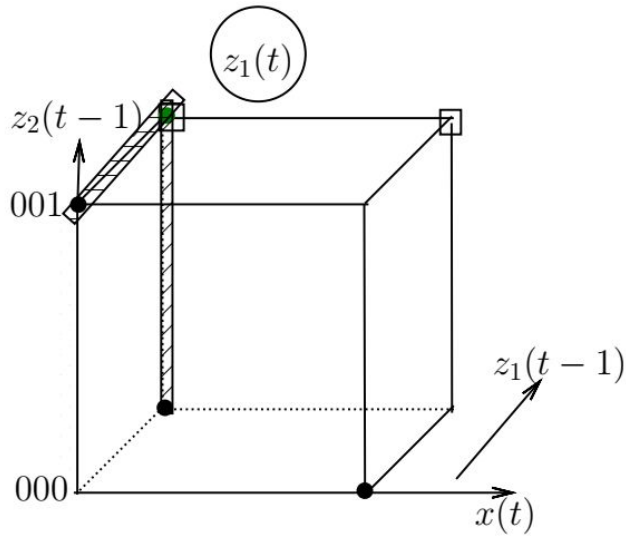
$X: a_1 \sim 0, a_2 \sim 1$
 $Y: y_1 \sim 0, y_2 \sim 1$
 $Q: q_1 \sim 00, q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; q(t) \sim z_1(t)z_2(t)$

$X \backslash z_1 z_2$	00	01	10	11
0	01 1	10 0	10 1	10 0
1	10 0	01 1	00 0	01 1

$x(t)$					$y(t)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Таблица
ИСТИННОСТ
И
↙

АТ дополняем резервными состояниями так, чтобы функции $z_1(t)$, $z_2(t)$, $y_1(t)$ имели минимальные ДНФ



$$\begin{cases} z_1(t) = \bar{x}(t) \cdot z_2(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot z_1(t-1) \vee x(t) \cdot z_1(t-1) \cdot z_2(t-1) \\ z_2(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{z}_1(t-1) \cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t) \cdot z_2(t-1) \\ y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t) \cdot z_2(t-1) \end{cases}$$

§2. Определение логического автомата.

- Конечный автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ называется **логическим**, если все его алфавиты являются булевыми кубами, а именно $X = B^n, Y = B^k, Q = B^r$.
- В этом случае функции переходов и выходов (φ и ψ) становятся булевыми векторными функциями от $n + r$ аргументов и мы имеем систему из $r + k$ канонических уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{q}(t) \\ \psi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{y}(t) \end{cases}$$

При этом могут возникнуть *фиктивные* или *резервные* состояния.

§3. Примеры автоматов

- 1. Элемент единичной задержки (З).

$$X=\{0,1\}=Y=Q$$



Q	0	1
x	0	1
0	0	1
1	0	1

$$\begin{cases} q(t) = x(t) \\ y(t) = q(t-1) \end{cases}$$

- 2. Последовательный арифметический сумматор.

a и b – двоичные $-n$ - разрядные двоичные числа.

$$a+b=y?$$

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

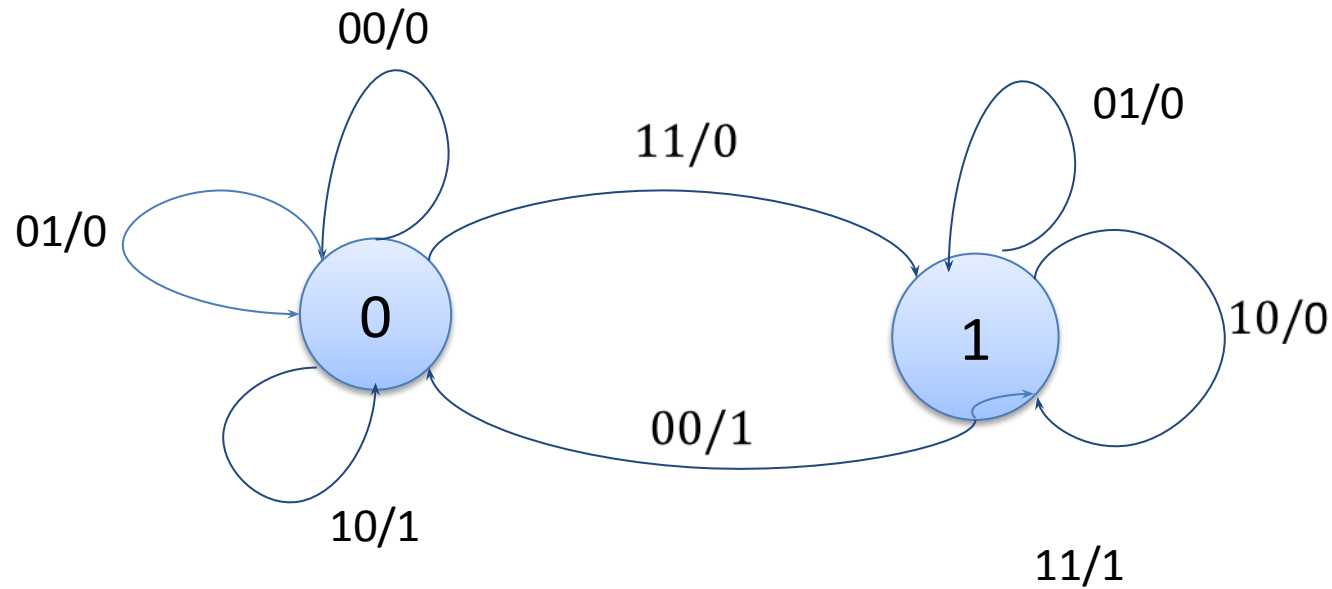
+

$$b = b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

$$X=\{00,01,10,11\}; Y=Q=\{0,1\}$$

$$y = y_{n+1} y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0$$

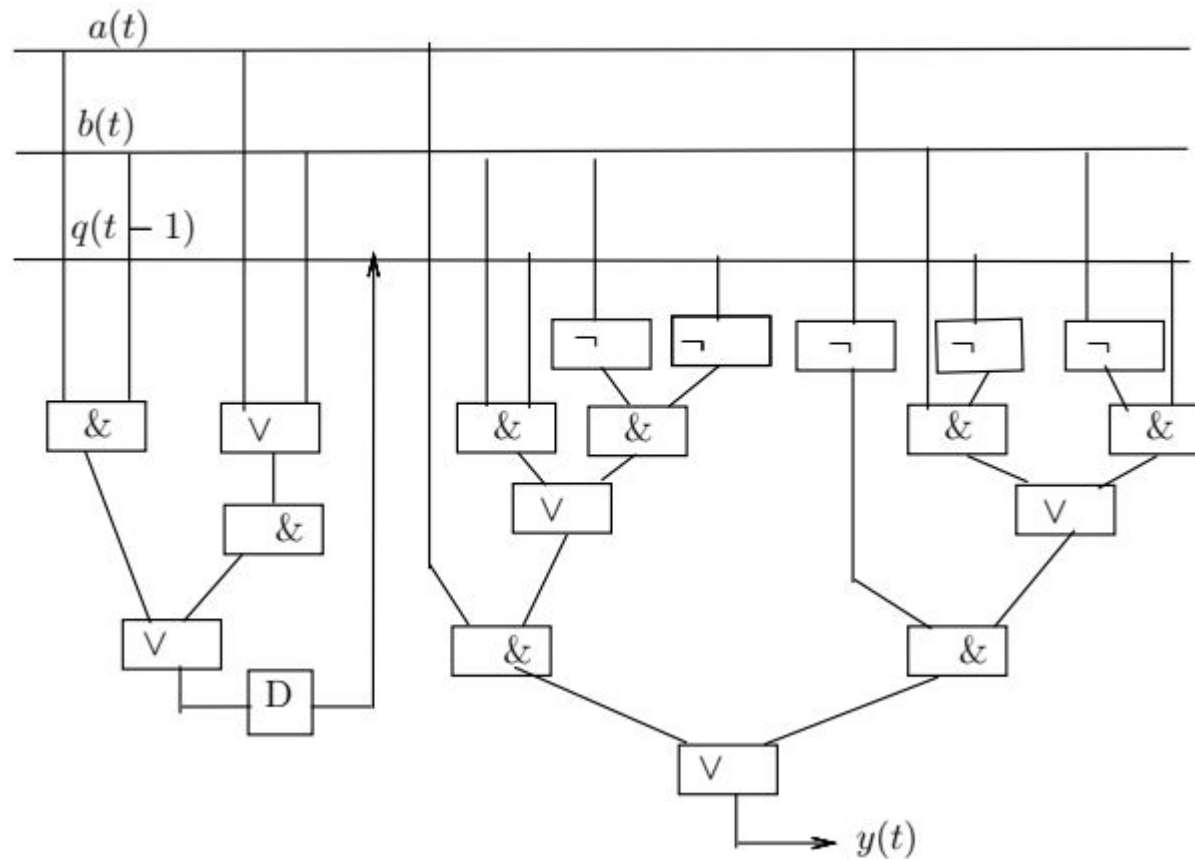
X Q	0	1
00	0 0	1 0
01	1 0	0 1
10	1 0	0 1
11	0 1	1 1



После минимизации ДНФ получим СКУ:

$$\begin{cases} q(t) = a(t) \cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t)) \cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(b(t) \cdot q(t-1) \vee \bar{b}(t) \cdot \bar{q}(t-1)) \vee \bar{a}(t) \cdot (b(t)\bar{q}(t-1) \vee \bar{b}(t)q(t-1)) \end{cases}$$

Реализуем автомат в виде СЛС



4 яруса,
Сложность схемы равна

14

$$\begin{cases} q(t) = a(t) \cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t)) \cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(b(t) \cdot q(t-1) \vee \bar{b}(t) \cdot \bar{q}(t-1)) \vee \bar{a}(t) \cdot (b(t)q(t-1) \vee \bar{b}(t)q(t-1)) \end{cases}$$