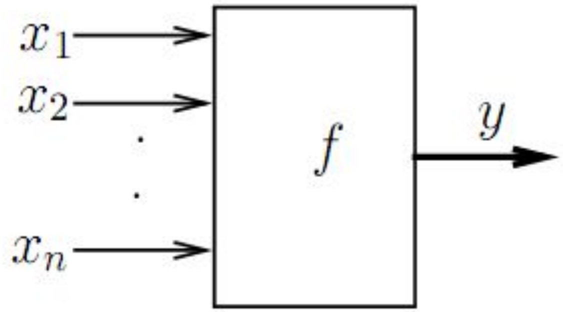
Автоматы и алгоритмы

четвертый семестр

Лекция 1
Комбинационные схемы и конечные автоматы

- §1. Комбинационные схемы.

$y(x_{1,}\, x_{2,}\ \ldots, x_n)$ –булева функция от n переменных



полный функциональный элемент

Входные сигналы поступают в момент времени t, временем вычисления пренебрегают и поучают y в тот же момент t.

Комбинационная схема (КС) –это функциональная схема, комбинация сигналов на выходе которой однозначно определяется комбинацией сигналов на ее входе.

Такой способ обработки сигналов называют **комбинационным**.
На практике выходные сигналы зависят от сигналов, поступивших в предыдущие моменты времени.

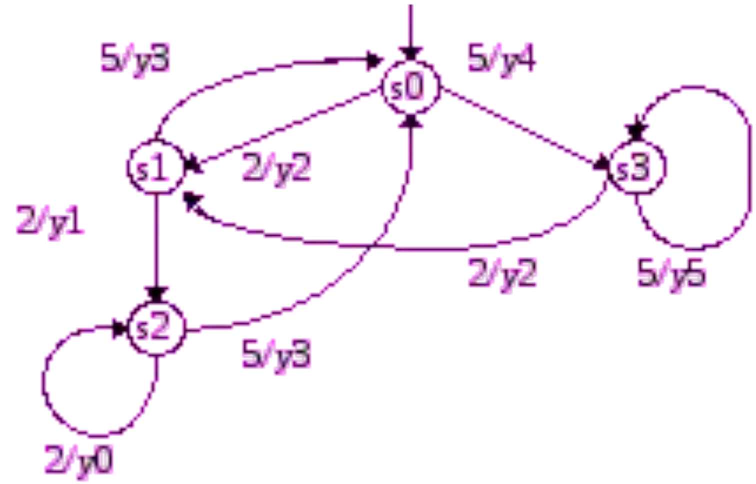
Возникает необходимость хранить поступившие сигналы с специальном устройстве – блоке памяти.

Автоматы с памятью

Опишем поведение родителя, отправившего сына в школу.
Сын приносит двойки и пятерки. Отец не хочет хвататься за ремень каждый раз, как только сын получит очередную двойку, и выбирает более тонкую тактику воспитания.

Автомат, моделирующий родителя, имеет четыре состояния {s0, ... ,s3}, и два входных сигнала - оценки, полученные сыном в школе: {2, 5}. Начиная с начального состояния s0 (оно помечено входной стрелкой), автомат под воздействием входных сигналов переходит из одного состояния в другое и выдает выходные сигналы - реакции на входы.

Выходы автомата {y0, ..., y5} будем интерпретировать как действия родителя так:



y0: - брать ремень;
y1: - ругать сына;
y2: - успокаивать сына;
y3: - надеяться;
y4: - радоваться;
y5: - ликовать.

Сына, получившего одну и ту же оценку - двойку, ожидает дома совершенно различная реакция в зависимости от предыстории его учебы. Например, после третьей двойки в истории 2,2,2 сына встретят ремнем, а в истории 2,2,5,2 - будут успокаивать. Каждая предыстория определяет текущее состояние автомата. Таким образом, текущее состояние представляет все то, что автомат знает о прошлом с точки зрения его будущего поведения - реакций на последующие входы.

§2. Определение конечного автомата

- Автомат(конечный) –дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ – пятерка объектов, где

X-входной алфавит,

Y- выходной алфавит,

Q- множество внутренних состояний,

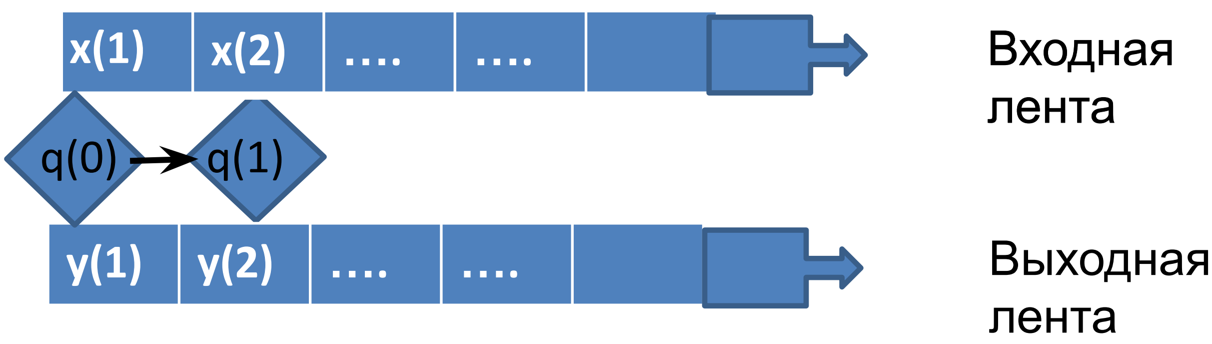
φ: $\mathrm{X} \times Q \to Q$; φ- функция переходов,

ψ: $\mathrm{X} \times Q \to Y$; ψ – функция выходов.

$$|X| = n; |Y| = m; |Q| = k$$

Все множества конечны –
Конечный автомат.

Описание работы автомата



Функции перехода и выхода:

$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

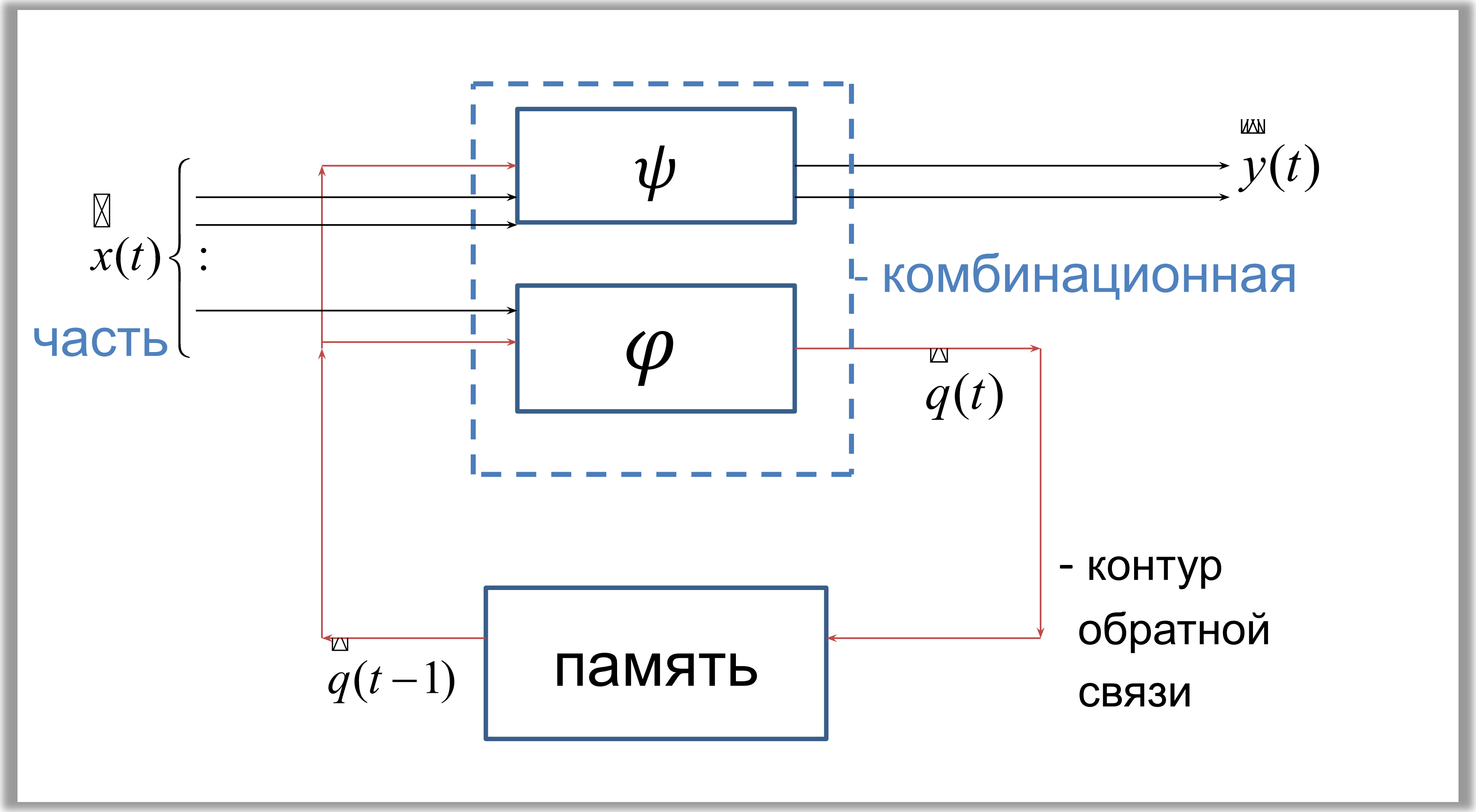
- График работы автомата

$$q(0) \xrightarrow[y(1)]{x(1)} q(1) \xrightarrow[y(2)]{x(2)} q(2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow q(t)$$

Если q_0- начальное состояние, α – входное слово, ω – выходное слово, то преобразование $S(q_0, \alpha) = \omega$

называется автоматным преобразованием

Принципиальная модель структуры конечного автомата



$$\varphi(x(t), q(t-1)) = q(t), \quad \psi(x(t), q(t-1)) = y(t)$$

Способы задания автоматов. Логические автоматы.

§3. Способы задания автоматов.

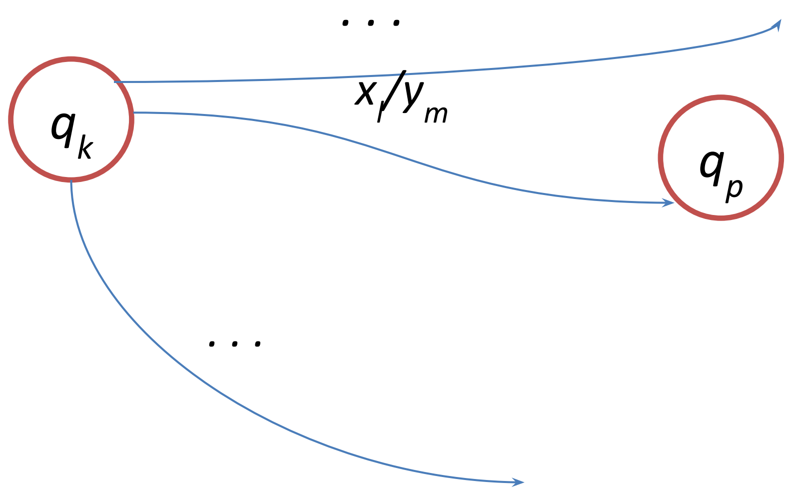
- 1. Табличный способ задания автомата (АТ).

$x(t)$ \ $q(t\text{-}1)$	q_1	q_2	…	q_k	…	q_r
x_1						
…						
x_l				y_m / q_p		
…						
x_n						

$$\varphi(x_l, q_k) = q_p, \ \psi((x_l, q_k) = y_m$$

2. Способ задания в виде диаграммы Мура (ДМ) .

- ДМ- это орграф, в котором каждая вершина помечена одним из состояний (количество вершин равно количеству состояний). Из каждой вершины выходит столько стрелок, сколько символов в алфавите *X*.



Пример. Автомат задан в виде АТ

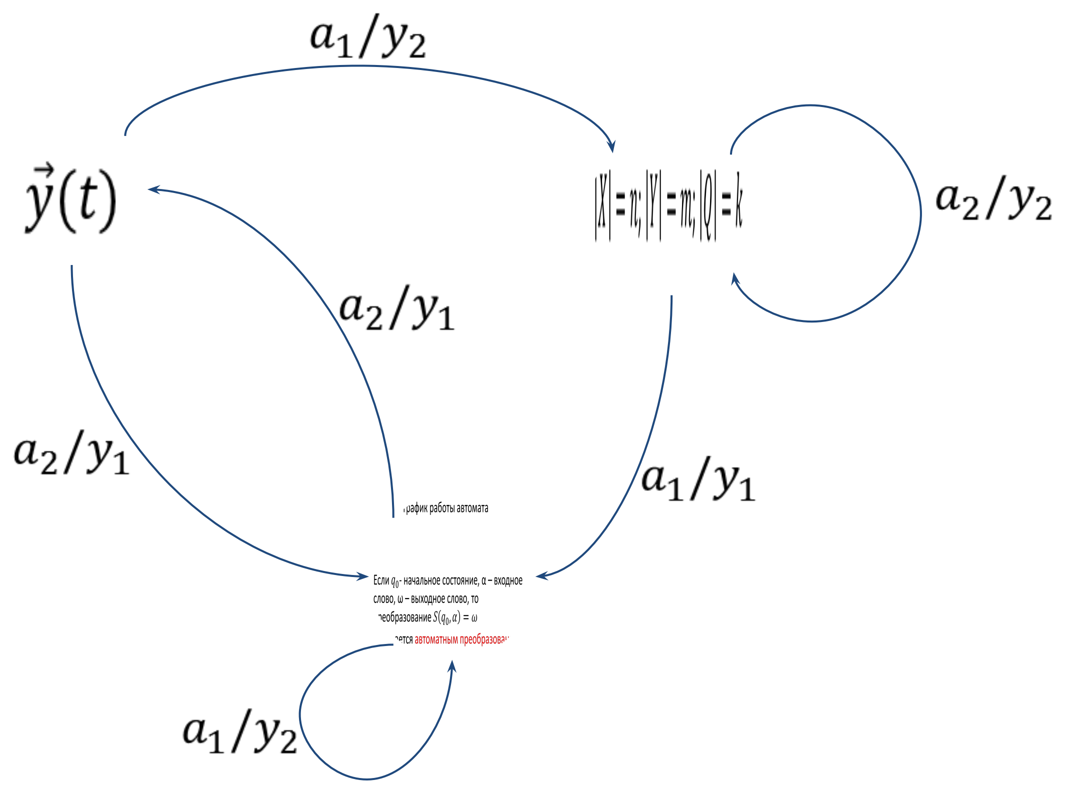
q(t-1) / x(t)	q1	q2	q3

Автомат(конечный) —дискретный преобразователь информации, на вход которого поступают входные последовательности сигналов (входные слова). Он формирует выходные последовательности сигналов (выходные слова) на основании своих внутренних состояний и входных сигналов.

Автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ — пятерка объектов, где
X -входной алфавит,
Y - выходной алфавит,
Q - множество внутренних состояний,
φ: X
ψ: X

$$q_2 \xrightarrow[y_1]{a_1} q_3 \xrightarrow[y_2]{a_1} q_3 \xrightarrow[y_1]{a_2} q_1 \xrightarrow[y_2]{a_1} q_2 \xrightarrow[y_2]{a_2}$$

Зададим автомат с помощью ДМ:



3. Задание автомата с помощью системы канонических уравнений (СКУ)

- X, Y, Q кодируются двоичными числами.

Имеем СКУ:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{q}(t) \\ \psi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{y}(t) \end{cases}$$

Функции φ и ψ становятся булевыми функциями.

Сам автомат становится **логическим.**

Продолжение примера (строим логический автомат): $X: a_1 \sim 0,\ \ a_2 \sim 1$

$Y: y_1 \sim 0,\ \ y_2 \sim 1$

$Q: q_1 \sim 00,\ q_2 \sim 01, q_3 \sim 10;\ q(t) \sim z_1(\mathrm{t})\mathrm{z}_2(\mathrm{t})$

АТ для логического Автомата ↝

$X: a_1 \sim 0, \;\; a_2 \sim 1$

$Y: y_1 \sim 0, \;\; y_2 \sim 1$

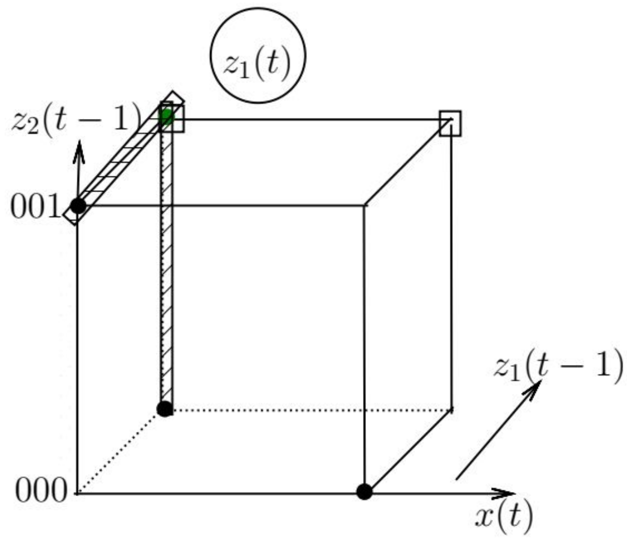
$Q: q_1 \sim 00, \;\; q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; \;\; q(t) \sim z_1(t)z_2(t)$

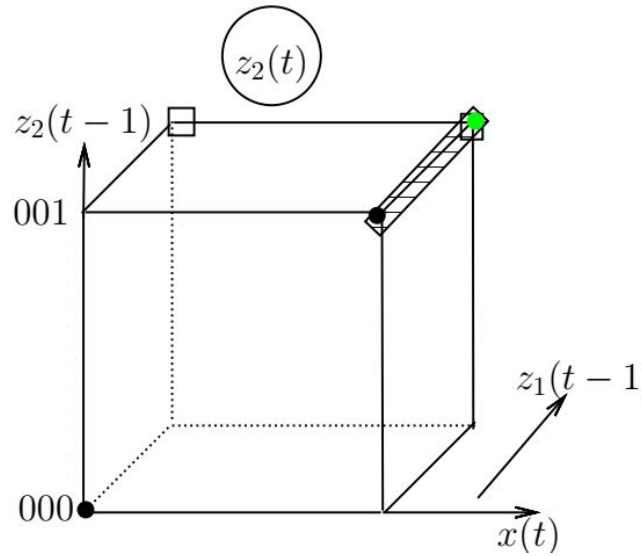
X \ z_1z_2	00	01	10	11
0	01 / 1	10 / 0	10 / 1	10 / 0
1	10 / 0	01 / 1	00 / 0	01 / 1

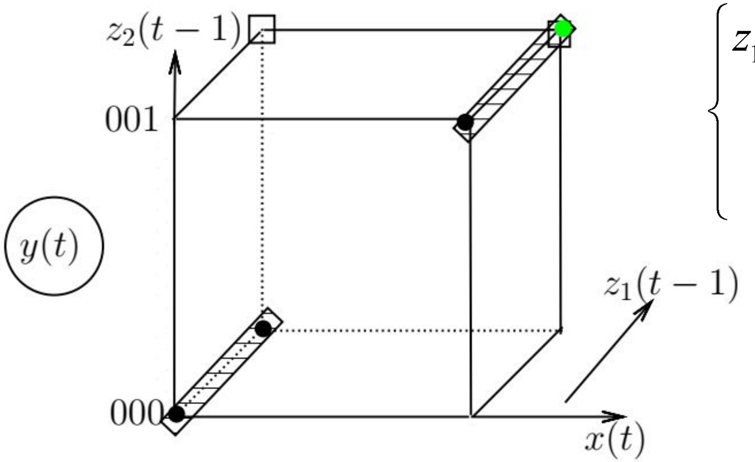
Таблица истинности ↲

x(t)					*y(t)*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	1	0	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	0	1	1

АТ дополняем резервными состояниями так, чтобы функции $z_1(t)$, $z_2(t)$, $y_1(t)$ имели минимальные ДНФ







$$
\begin{cases}
z_1(\mathrm{t}) = \bar{x}(t)\cdot z_2(t-1) \vee \bar{x}(t)\cdot z_1(t-1) \vee x(t)\cdot z_1(t-1)\cdot z_2(t-1) \\
z_2(t) = \bar{x}(t)\cdot \bar{z}_1(t-1)\cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t)\cdot z_2(t-1) \\
y(t) = \bar{x}(t)\cdot \bar{z}_2(t-1) \vee x(t)\cdot z_2(t-1)
\end{cases}
$$

§2. Определение логического автомата.

- Конечный автомат S=$\{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ называется **логическим**, если все его алфавиты являются булевыми кубами, а именно $X = B^n, Y = B^k, Q = B^r$.
- В этом случае функции переходов и выходов (φ и ψ) становятся булевыми векторными функциями от $n + r$ аргументов и мы имеем систему из $r + k$ канонических уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{q}(t) \\ \psi(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)) = \vec{y}(t) \end{cases}$$

При этом могут возникнуть *фиктивные* или *резервные* состояния.

§3. Примеры автоматов

- 1. Элемент единичной задержки (З).

X={0,1}=Y=Q

X \ Q	0	1
0	0 0	0 1
1	1 0	1 1

$$\begin{cases} q(t) = x(t) \\ y(t) = q(t-1) \end{cases}$$

- 2. Последовательный арифметический сумматор.

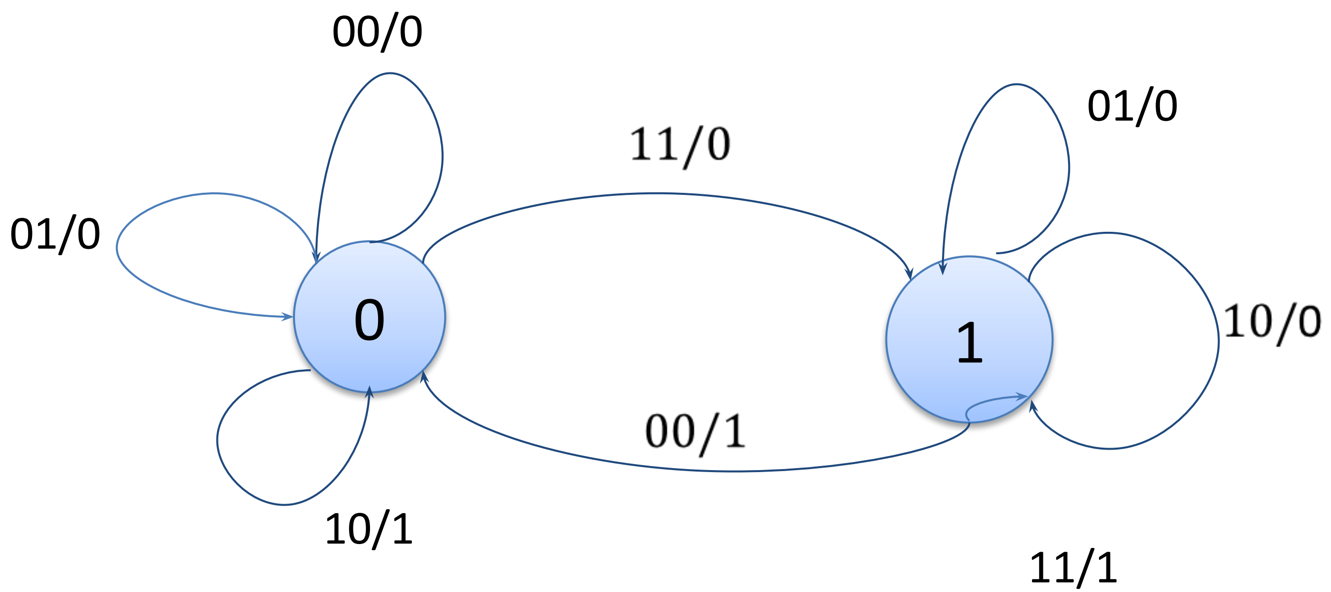
a и *b* – двоичные –*n*- разрядные двоичные числа.

a+b=y?

$$
\begin{array}{l}
a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \\
+ \\
b = b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 \\
\hline
y = y_{n+1} y_n y_{n-1} \ldots y_1 y_0
\end{array}
$$

X={00,01,10,11}; Y=Q={0,1}

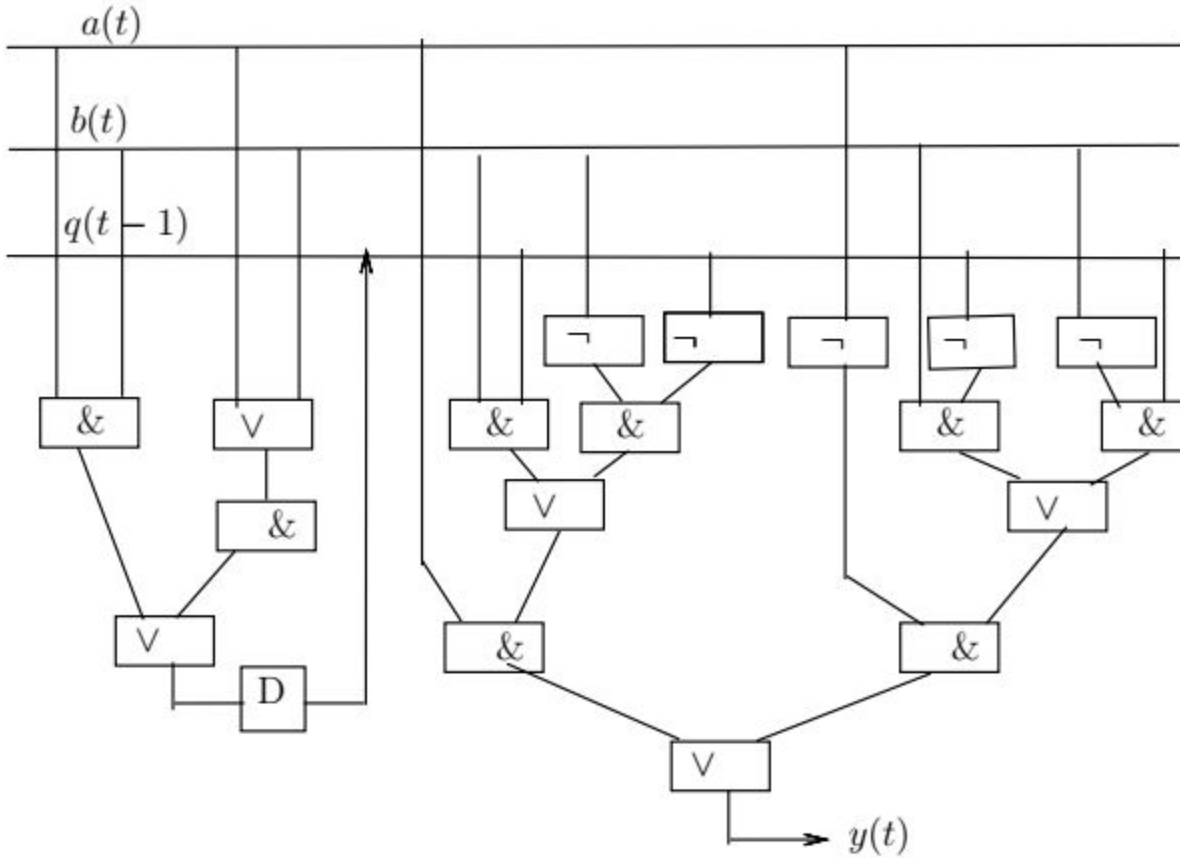
Q X	0	1
00	0 0	0 1
01	0 1	1 0
10	0 1	1 0
11	1 0	1 1



После минимизации ДНФ получим СКУ:

$$\begin{cases} q(\mathrm{t}) = a(t)\cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t))\cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(b(t)\cdot q(t-1) \vee \overline{b}(t)\cdot \overline{q}(t-1)) \vee \overline{a}(t)\cdot (b(t)\overline{q}(t-1) \vee \overline{b}(t)q(t-1) \end{cases}$$

Реализуем автомат в виде СЛС



4 яруса,
Сложность схемы равна
14

$$\begin{cases} q(\mathrm{t}) = a(t)\cdot b(t) \vee (a(t) \vee b(t))\cdot q(t-1) \\ y(t) = a(t)(\mathrm{b(t)}\cdot q(t-1) \vee \overline{b}(t)\cdot \overline{q}(t-1)) \vee \overline{a}(t)\cdot (b(t)\overline{q}(t-1) \vee \overline{b}(t)q(t-1) \end{cases}$$