المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية فى المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}$ من الدرجة الاولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} y + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_o \neq 0$

فاذا كانت جميع المعاملات $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة فى x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ فى المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x)\neq 0$ فان المعادلة (I) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلى D :

نعرّف $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x .

كذلك فان :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

مثال

$$D\,e^{3x} = \frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2\,e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{3x} = 9\,e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

1) $D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$

2) $D[kf(x)] = kDf(x)$

3) $F(D)\, e^{\alpha x} = F(\alpha)\, e^{\alpha x}$; F كثيرة حدود فى D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots\dots a_{n-1} D + a_n)\, y = f(x)$$

حيث نجد ان

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} D + a_n$$

دالة كثيرة حدود فى D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D)\, y = f(x)$$

وهى معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D) y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1 , y_2 حلين مستقلين للمعادلة *(1)* فان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة *(1)* ، حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'', a_1 y', a_2 y = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_1, \ a_2$ ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة *(1)* حيث λ مقدار ثابت .

نضع المعادلة على الصورة $\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y = 0$

ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad , D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right)e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1, λ_2

حيث

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

١) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$

٢) حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$.

٣) مركبان .

سوف ندرس كل حالة على حده .

١) **<u>جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان</u>** :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً ..... لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4 \quad , \quad \lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1\, e^{-4x} + c_2\, e^{x}$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $2y'' - 3y' = 0$

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)\ y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $2\lambda^2 + 3\lambda = 0$

و تكون جذورها $\lambda = 0 \quad , \quad 3/2$

ويكون الحل العام صفر

اى ان

$$y = c_1\, e^{0x} + c_2\, e^{3/2 x}$$

$$y = c_1 + c_2\, e^{3/2 x}$$

٢) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{\lambda x}$$

حيث $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

ويكون جذراها $\lambda = 2, 2$

أى أن الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

٣) جذرا المعادلة المميزة مركبان :

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_2 \neq \lambda_1$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (1)$$

حيث A_1 , A_2 ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (1) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right]$$

ونعلم ان $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \ , \ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$

وعلى ذلك فان

$$y = e^{\alpha x}[A_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + A_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x]$$

ونعتبر $A_1 + A_2 = C_1 \quad , \quad i(A_1 - A_2) = C_2$

فيكون الحل هو : $y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 2D + 4)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x}\,[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$

<u>مثـــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 9y = 0$

<u>الحـــــل :</u>

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 9) = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 9 = 0$

ويكون جذراها $\therefore\ \lambda = \neq 3i$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$