

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية في المتغير y (المتغير التابع) إذا كان
 $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ من الدرجة الأولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$

فاذا كانت جميع المعاملات a_0, a_1, \dots, a_n قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات
معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة في x سميت
المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ في المعادلة (1)



ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فإن المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلي D :

نعرف $D \equiv \frac{d}{dx}$ أى المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

كذلك فإن :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}, \quad \dots \dots \dots \quad D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9e^{3x}$$

مثال



بعض خواص المؤثر D :

$$1) \quad D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$$

$$2) \quad D[kf(x)] = kDf(x)$$

$$3) \quad F(D) e^{\alpha x} = F(\alpha) e^{\alpha x} \quad ; \quad F \text{ كثيرة حدود في } D$$

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

حيث نجد أن

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

دالة كثيرة حدود في D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D) y = f(x)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D) y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

سوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية

المتجانسة من الرتبة الثانية .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1, y_2 حلين مستقلين للمعادلة (1) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (1) ، حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة
(1)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

حيث a_1, a_2 ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت .

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$$

نضع المعادلة على الصورة



ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad , D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) (*Auxiliary characteristic*) ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران

λ_1, λ_2

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$



حيث

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

(١) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(٢) حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$.

(٣) مركبان .

سوف ندرس كل حالة على حده .

١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ، $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .



مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

$$D = \frac{d}{dx} \text{ حيث}$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -4, \lambda = 1$$

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$$

اي ان

يكون الحل العام على صورة



مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$2y'' - 3y' = 0$$

نضع للمعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

$$2\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

فان المعادلة المساعدة هي

$$\lambda = 0 \quad , \quad \frac{3}{2}$$

و تكون جذورها

ويكون الحل العام صفر

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$

اي ان

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$



٢ جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اي أن $\lambda_1 = \lambda_2$ في هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل آخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

حيث



مثال :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

لوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 - 4D + 4) y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

∴ المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

ويكون جذراها

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

أي أن الحل العام



٢ جذرا المعادلة المميزة مركبان :

إذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فإن الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فإن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (1) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} [A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}]$$



$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x.$$

ونعلم ان

وعلى ذلك فان

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x} [A_1(\cos \beta x + i \sin \beta x) + A_2(\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} [(A_1 + A_2) \cos \beta x + i(A_1 - A_2) \sin \beta x] \end{aligned}$$

$$A_1 + A_2 = C_1, \quad i(A_1 - A_2) = C_2$$

ونعتبر

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

فيكون الحل هو :



مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 2D + 4)y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

∴ فإن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

∴ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x} [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$



مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 9y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 9) = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

\therefore فإن المعادلة المساعدة هي

$$\therefore \lambda = \pm 3i$$

ويكون جذراها

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

