Практическое занятие № 4 (11)

Задачи группы «А»

ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

№ 2616(2)
Сборник вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики в системе РИТМ. Часть 2.
Стр. 179 – 192.

Перед решением задач необходимо *самостоятельно* разобрать *теоретические основы* по рассматриваемой теме (приведены в данной презентации)

3-й модуль 2-го семестра

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Основные положения теории :

1. Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как переменный ток, протекающий в цепи, содержащей резистор ***R***, конденсатор ***C*** и катушку индуктивности ***L***.
2. Переменный ток можно считать ***квазистационарным***, т.е. мгновенные значения тока можно считать во всех точках цепи одинаковыми, т.к. его изменения являются медленными в сравнении со скоростью распространения ЭМ волны (скоростью света) вдоль этой электрической цепи.
3. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняется закон Ома и следук

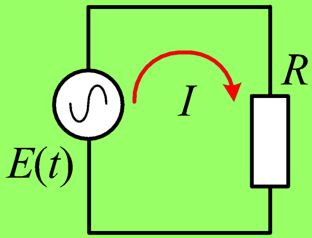
Рассмотрим процессы в простейших электрических цепях с переменным током :

1. ***Переменный ток течет через резистор R***. В рамках условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома (***E(t)*** – внешний источник переменной ЭДС):

$$I = \frac{E(t)}{R} = \frac{E_m}{R}\cos\omega t = I_m \cos\omega t \quad (1)$$

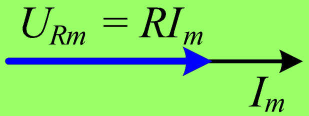
$$E(t) = E_m \cos\omega t \quad (2)$$

Амплитуда тока: $I_m = \dfrac{E_m}{R}$



Наглядно представить соотношение между переменным током и напряжением в цепи можно векторной диаграммой, построенной для амплитудных значений гармонических функций тока ***I(t)*** и напряжения ***U(t)*** .

Из векторной диаграммы видно: сдвиг фаз между амплитудой тока I_m , текущего через резистор, и падением напряжения на резисторе U_{Rm}, равен нулю.



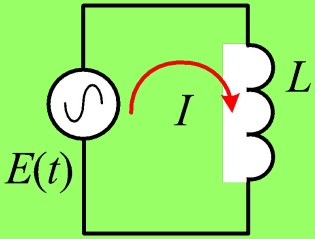
2. ***<u>Переменный ток течет через катушку индуктивности</u>*** **L**. **Под действием переменной ЭДС *E*(*t*) в цепи течет переменный, приводящий к возникновению ЭДС самоиндукции в катушке. Закон Ома :**

$$E(t) + E_{Si}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad E_m \cos\omega t - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad U_L = L\frac{dI}{dt} = E_m \cos\omega t \qquad (3)$$

Выделим из (3) дифференциал тока *dI* и проинтегрируем по времени (постоянная интегрирования равна нулю, т.к. отсутствует постоянный ток):

$$\int dI = \int \frac{E_m}{L}\cos\omega t\, dt$$

$$I = \frac{E_m}{\omega L}\sin\omega t = \frac{E_m}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4) \qquad I_m = \frac{E_m}{\omega L}$$



Из (4) получаем реактивное индуктивное сопротивление катушки (для постоянного тока, ω = 0, получаем Z_L = 0) :

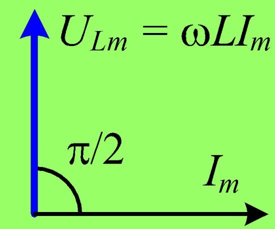
$$Z_L = \frac{E_m}{I_m} = \omega L \qquad (5)$$

Подставим в (3) выражение амплитуды ЭДС

$$\rightarrow \quad E_m = \omega L I_m \qquad (6)$$

и получим падение напряжения на катушке:

$$U_L = \omega L I_m \cos\omega t = U_{Lm}\cos\omega t \qquad (7)$$



<u>Вывод</u> **: из сравнения (4) и (7) следует, что падение напряжения на индуктивности опережает по фазе ток, текущий через катушку, на угол φ = π/2 , см. векторную диаграмму.**

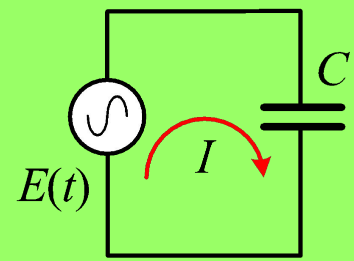
3. ***Переменный ток течет через конденсатор*** **C**. **Под действием переменной ЭДС** ***E(t)*** **конденсатор непрерывно перезаряжается, в результате в цепи течет переменный ток. Напряжение ЭДС полностью приложено к конденсатору. Пренебрегая сопротивлением проводов, закон Ома запишется в виде :**

$$E(t) = U_C \;\rightarrow\; E_m \cos\omega t = \frac{Q}{C} \;\rightarrow\; Q = CE_m \cos\omega t \qquad (8)$$

Найдем ток, используя выражение для заряда (8):

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega CE_m \sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (9)$$

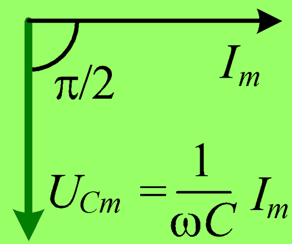
Из (9) находим реактивное емкостное сопротивление конденсатора Z_C**, которое для постоянного тока (**$\omega = 0$**) очень большое (**$Z_C \to \infty$**) :**



$$I_m = \omega CE_m = \frac{E_m}{1/\omega C} = \frac{E_m}{Z_C} \quad (10) \;\rightarrow\; Z_C = \frac{1}{\omega C} \quad (11)$$

Подстановкой (10) в (8) получим падение напряжение на конденсаторе :

$$U_C = \frac{Q}{C} = E_m \cos\omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t \qquad (12) \qquad U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_m$$



Вывод **: из сравнения (9) и (12) следует, что ток, текущий через конденсатор, опережает по фазе падение напряжения на конденсаторе на угол** $\varphi = \pi/2$ **, см. векторную диаграмму.**

Основные формулы для решения задач

1. Реактивное сопротивление конденсатора переменному току (C – электроемкость конденсатора; ω - круговая частота) :

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

2. Реактивное сопротивление катушки индуктивности переменному току (L - индуктивность катушки):

$$X_L = \omega L$$

3. Полное сопротивление переменному току последовательной цепи, состоящей из активного сопротивления, электроемкости и индуктивности:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

4. Угол сдвига фазы между током и напряжением в последовательной цепи, содержащей активное сопротивление, электроемкость и индуктивность :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

5. Закон Ома для переменного тока :

$$I_{ЭФ} = \frac{U_{ЭФ}}{Z}$$

6. Связь между эффективными (действующими) и амплитудными значениями тока и напряжения :

$$I_{ЭФ} = I_m/\sqrt{2} \quad U_{ЭФ} = U_m/\sqrt{2}$$

7. Мощность переменного тока :

$$P = I_{ЭФ} U_{ЭФ} \cos\varphi = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ :

Плотность меди: $\rho_0 = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3

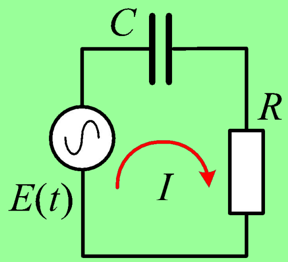
Удельное сопротивление меди: $\rho = 0{,}017$ мкОм·м

Магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Электрическая постоянная: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

А1. (В.14.23) Найти полное сопротивление цепи Z и разность фаз между напряжением и током при разных способах включения сопротивления R, емкости С и индуктивности L. Рассмотреть следующие случаи : 1). R и С включены последовательно; 2). R и С включены параллельно; 3). R и L включены последовательно; 4). R и L включены параллельно; 5). R, L и С включены последовательно.

1). Цепь переменного тока из последовательно соединенных резистора конденсатора С и R. В цепи под действием переменной ЭДС $E(t)$ возникает переменный ток, создающий падения напряжения на каждом из элементов цепи. Закон Ома запишется в виде :



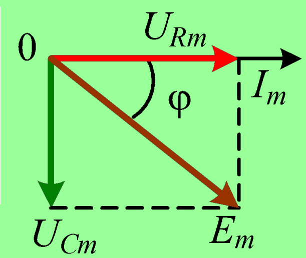
$$E(t)=U_R+U_C \qquad E(t)=IR+\frac{Q}{C}=IR+\frac{1}{C}\int I dt \quad (1) \qquad I(t)=I_m\cos\omega t$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t+\frac{1}{\omega C}I_m\sin\omega t$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t+\frac{1}{\omega C}I_m\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=U_{Rm}\cos\omega t+U_{Cm}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Из векторной диаграммы видно, что вектор амплитуды ЭДС E_m равен векторной сумме амплитуд напряжений на элементах цепи.



Амплитуда напряжения ЭДС – это гипотенуза треугольника:

$$E_m^2=U_{Rm}^2+U_{Cm}^2$$

$$E_m^2=(RI_m)^2+[(1/\omega C)I_m]^2$$

$$U_{Rm}=RI_m \quad U_{Cm}=(1/\omega C)I_m$$

Угол φ определяет разность фаз между силой тока и напряжением ЭДС на зажимах цепи :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-U_{Cm}}{U_{Rm}}=-\frac{1}{\omega CR}$$

Амплитуда тока :

$$I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}}$$

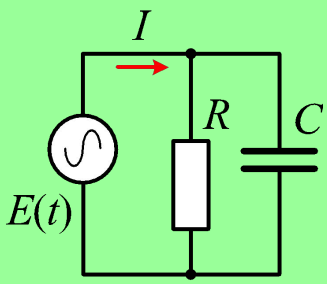
Полное сопротивление цепи:

$$Z=\frac{E_m}{I_m}=\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}$$

Реактивное сопротивление цепи:

$$X=-Z_C=-\frac{1}{\omega C}$$

2). Цепь переменного тока из параллельно соединенных резистора *R* и конденсатора С. В цепи под действием переменной ЭДС *E*(*t*) возникает переменный ток, создающий падения напряжения на каждом из элементов цепи. Закон Ома запишется в виде :



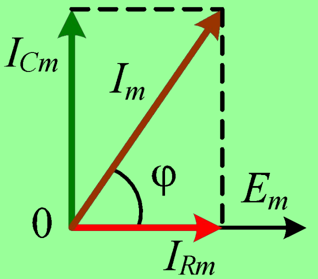
$$I(t) = I_R + I_C \qquad I(t) = \frac{E(t)}{R} + \frac{dQ}{dt} = \frac{E(t)}{R} + C\frac{dE(t)}{dt} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} E(t) = E_m \cos\omega t \\ Q(t) = CE(t) \end{cases}$$

$$I_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t - \omega C E_m \sin\omega t$$

$$I_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t + \omega C E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m \cos(\omega t + \varphi) = I_{Rm}\cos\omega t + I_{Cm}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} I_{Rm} = \dfrac{E_m}{R} \\ I_{Cm} = \omega C E_m \end{cases}$$



Из векторной диаграммы видно, что вектор амплитуды тока *I_m* равен векторной сумме амплитуд тока в элементах цепи :

$$\begin{cases} I_m^2 = (E_m/R)^2 + (\omega C E_m)^2 \\ I_m^2 = I_{Rm}^2 + I_{Cm}^2 \end{cases}$$

Угол φ определяет разность фаз между током в цепи и напряжением ЭДС на зажимах цепи :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_{Cm}}{I_{Rm}} = \frac{\omega C E_m}{E_m/R} = \omega C R$$

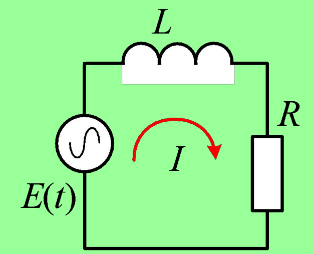
Амплитуда тока :

$$I_m = E_m\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

Полное сопротивление цепи :

$$Z = \frac{E_m}{I_m} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega C R)^2}}$$

3). Цепь переменного тока из последовательно соединенных резистора R и индуктивности L. В цепи под действием ЭДС $E(t)$ возникает переменный ток, создающий напряжения на каждом из элементов цепи. Закон Ома имеет вид:



$$E(t)+E_{Si}=U_R \qquad E(t)=IR+L\frac{dI}{dt}$$

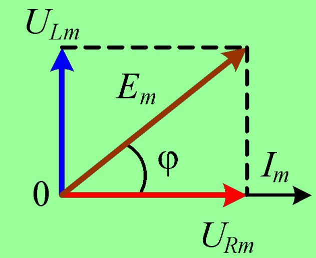
$$\begin{cases} I(t)=I_m\cos\omega t \\ E_{Si}=-L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t-\omega LI_m\sin\omega t$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t+\omega LI_m\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=U_{Rm}\cos\omega t+U_{Lm}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} U_{Rm}=RI_m \\ U_{Lm}=\omega LI_m \end{cases}$$



Согласно векторной диаграмме вектор амплитуды ЭДС E_m равен сумме векторов амплитуд напряжений на элементах цепи. Угол φ определяет разность фаз между током и напряжением ЭДС на зажимах цепи :

$$E_m^2=U_{Rm}^2+U_{Lm}^2=(RI_m)^2+[(\omega L)I_m]^2 \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{U_{Lm}}{U_{Rm}}=\frac{\omega L}{R}$$

Амплитуда тока из (3) :

$$I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

Полное сопротивление цепи :

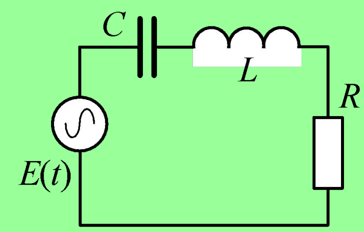
$$Z=\frac{E_m}{I_m}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

Реактивное сопротивление цепи :

$$X=Z_L=\omega L$$

4). Цепь переменного тока из последовательно соединенных резистора *R*, конденсатора *C* и катушки индуктивности *L* . В цепи под действием переменной ЭДС *E*(*t*) возникает переменный ток, создающий падения напряжения на каждом из элементов цепи. Закон Ома запишется в виде :

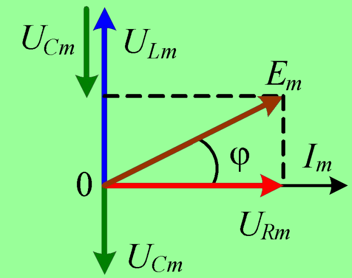
$$E(t)+E_{Si}=U_R+U_C \qquad E(t)=IR+L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=IR+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int I dt \leftarrow I(t)=I_m\cos\omega t$$



$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t-\omega LI_m\sin\omega t+\frac{1}{\omega C}I_m\sin\omega t$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=RI_m\cos\omega t+\omega LI_m\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\omega C}I_m\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_m\cos(\omega t+\varphi)=U_{Rm}\cos\omega t+U_{Lm}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+U_{Cm}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$



Из векторной диаграммы видно, что вектор амплитуды ЭДС E_m равен векторной сумме амплитуд падений напряжений на элементах цепи. Угол φ определяет разность фаз между силой тока в цепи и напряжением ЭДС на зажимах цепи :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{U_{Lm}-U_{Cm}}{U_{Rm}}=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}$$

Амплитуда напряжения ЭДС – это гипотенуза прямоугольного треугольника:

$$E_m^2=(RI_m)^2+[(\omega L-1/\omega C)I_m]^2$$

$$E_m^2=U_{Rm}^2+(U_{Lm}-U_{Cm})^2$$

Амплитуда тока :

$$I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}$$

Полное сопротивление цепи :

$$Z=\frac{E_m}{I_m}=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$$

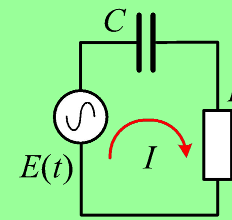
Реактивное сопротивление цепи :

$$X=Z_L-Z_C=\omega L-\frac{1}{\omega C}$$

А2. (В.14.24) Конденсатор емкостью С = 1 мкФ и резистор с сопротивлением *R* = 3 кОм включены в цепь переменного тока с частотой ν = 50 Гц. Найти полное сопротивление цепи, если конденсатор и резистор включены : 1) последовательно; 2) параллельно.

Дано:
С = 1 мкФ
***R* = 3 кОм**
ν= 50 Гц
Z_1 - ? Z_2 - ?

1). Цепь из последовательно соединенных *R* и С . Закон Ома :

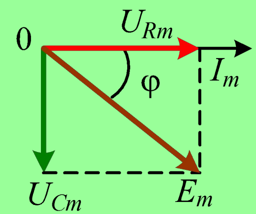


$$E(t) = U_R + U_C = IR + \frac{Q}{C} = IR + \frac{1}{C}\int Idt \quad \leftarrow \quad I(t) = I_m \cos\omega t$$

$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t + \frac{1}{\omega C} I_m \sin\omega t$$

$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t + \frac{1}{\omega C} I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Используем метод векторных диаграмм, где вектор - это амплитуда напряжения с учетом начальной фазы :



$$E_m^2 = (RI_m)^2 + [(1/\omega C)I_m]^2 \qquad (1)$$

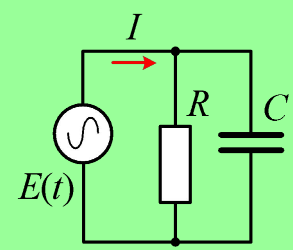
Сопротивление цепи согласно (1):

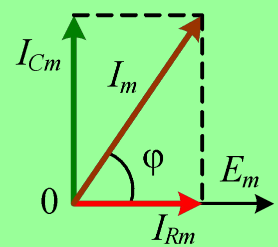
$$Z_1 = \frac{E_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (1/2\pi\nu C)^2}$$

$$Z_1 = \sqrt{(3\cdot 10^3)^2 + \left(\frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 10^{-6}}\right)^2} = 4{,}38\cdot 10^3 \ (Ом)$$

---

2). Цепь из параллельно соединенных *R* и С . Закон Ома :





$$I(t) = I_R + I_C = \frac{E(t)}{R} + \frac{dQ}{dt} = \frac{E(t)}{R} + C\frac{dE(t)}{dt} \quad \leftarrow \quad E(t) = E_m \cos\omega t$$

$$I_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t - \omega C E_m \sin\omega t$$

$$I_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t + \omega C E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Векторная диаграмма:

$$I_m^2 = (E_m/R)^2 + (\omega C E_m)^2 \qquad Z = \frac{E_m}{I_m} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega C R)^2}}$$

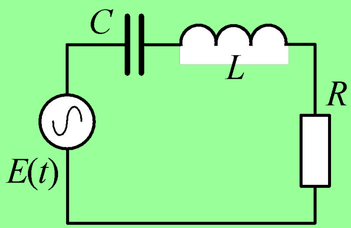
$$Z = \frac{3000}{\sqrt{1 + (2\pi\cdot 50\cdot 10^{-6}3\cdot 10^3)^2}} = 2{,}18\cdot 10^3 \ (Ом)$$

А3. (В.14.25) В цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены емкости, емкость $C = 35{,}4$ мкФ, сопротивление $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0{,}7$ Гн. Найти ток I в цепи и падение напряжения на емкости U_C , сопротивлении U_R и индуктивности U_L .

Дано :
$U = 220$ В
$\nu = 50$ Гц
$C = 35{,}4$ мкФ
$R = 100$ Ом
$L = 0{,}7$ Гн
I - ? U_C - ?
U_R - ? U_L - ?

Закон Ома:

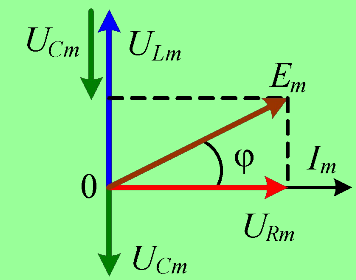
$$E(t) + E_{Si} = U_R + U_C \quad \longleftarrow \quad I(t) = I_m \cos\omega t$$



$$E(t) = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt \qquad (1)$$

$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t - \omega L I_m \sin\omega t + \frac{1}{\omega C} I_m \sin\omega t$$

$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t + \omega L I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$



Используем метод векторных диаграмм, где вектор - это амплитуда напряжения с учетом начальной фазы :

$$E_m^2 = (RI_m)^2 + \left[(\omega L - 1/\omega C) I_m\right]^2 \qquad (3)$$

Сопротивление цепи согласно (3):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} \; \sqrt{100^2 + \left(2\pi\cdot 50\cdot 0{,}7 - \frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 35{,}4\cdot 10^{-6}}\right)^2} = 164\,(Ом)$$

Ток в цепи и напряжение на элементах цепи согласно (3):

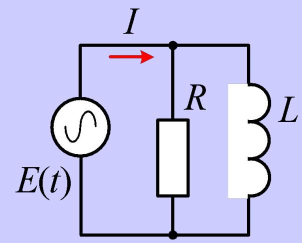
$$I_m = \frac{E_m}{Z} = \frac{220}{164} = 1{,}34\ (A) \qquad U_{Rm} = RI_m = 100\cdot 1{,}34 = 134\ (B)$$

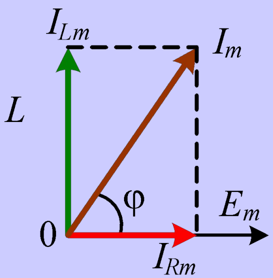
$$U_{Cm} = \frac{I_m}{2\pi\nu C} = \frac{1{,}34}{2\pi\cdot 50\cdot 35{,}4\cdot 10^{-6}} = 121\ (B) \qquad U_{Lm} = 2\pi\nu L I_m = 2\pi\cdot 50\cdot 0{,}7\cdot 1{,}34 = 295\ (B)$$

А4. (В.14.26) Индуктивность L = 22,6 мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока с частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление R , если сдвиг фаз между напряжением и током равен ϕ = 60°.

Дано :
L = 22,6 мГн
ν = 50 Гц
ϕ = 60°
R - ?

Запишем закон Ома и воспользуемся выражением ЭДС самоиндукции :





$$I(t) = I_R + I_L \quad \leftarrow \quad U_L = E_{Si} = E(t) = -L\frac{dI}{dt}$$

$$I(t) = \frac{E(t)}{R} - \frac{1}{L}\int E(t)dt \quad \leftarrow \quad E(t) = E_m \cos\omega t \qquad \textbf{(1)}$$

$$I_m\cos(\omega t+\varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t - \frac{E_m}{\omega L}\sin\omega t \rightarrow I_m\cos(\omega t+\varphi) = \frac{E_m}{R}\cos\omega t + \frac{E_m}{\omega L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$I_m\cos(\omega t+\varphi) = I_{Rm}\cos\omega t + I_{Lm}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow I_{Rm} = \frac{E_m}{R} \qquad I_{Lm} = \frac{E_m}{\omega L}$$

Амплитуда общего тока цепи согласно векторной диаграмме – это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами I_{Rm} и I_{Lm}

$$I_m = E_m\sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2}$$

Угол ϕ определяет разность фаз между общим током в цепи и напряжением ЭДС на зажимах цепи :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_{Lm}}{I_{Rm}} = \frac{R}{\omega L} \rightarrow R = \omega L\cdot\operatorname{tg}\varphi = 2\pi\nu L\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

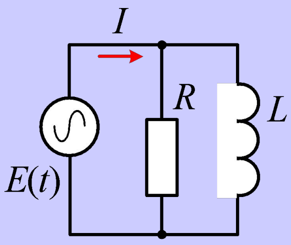
$$R = 2\pi\cdot 50\cdot 22{,}6\cdot 10^{-3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 12{,}3\ (Ом)$$

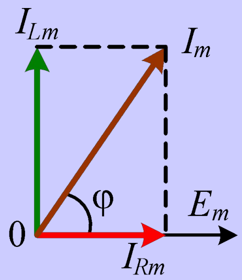
А5. (В.14.27) Активное сопротивление *R* и индуктивность *L* соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением *E* = 127 В и частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление *R* и индуктивность *L*, если известно, что цепь поглощает мощность *P* = 404 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

Дано :
E **= 127 В**
ν = 50 Гц
P **= 404 Вт**
φ = 60°
R **- ?** ***L*** **- ?**

Поглощаемая цепью мощность:

$$P = IE\cos\varphi = \frac{1}{2} I_m E_m \cos\varphi \qquad (1)$$





Из (1) найдем ток:

$$I_m = \frac{2P}{E_m \cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}P}{E\cos\varphi} \qquad (2)$$

Из решения предыдущей задачи для такой же цепи (1) следуют два уравнения, из которых найдем *R* и *L* :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_{Lm}}{I_{Rm}} = \frac{R}{\omega L} \rightarrow R = \omega L \cdot \operatorname{tg}\varphi \qquad (3)$$

Амплитуда общего тока цепи по векторной диаграмме – это гипотенуза треугольника с катетами I_{Rm} и I_{Lm}:

$$I_m = E_m \sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2} \qquad (4)$$

Из (1) и (4) следует :

$$\frac{I_m}{E_m} = \frac{P}{E^2\cos\varphi} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\omega L R} \rightarrow \omega L = \frac{E^2 R\cos\varphi}{\sqrt{(PR)^2 - E^4\cos^2\varphi}} \qquad (5)$$

После подстановки (5) в (3) получаем :

$$R = \frac{E^2}{P} = \frac{127^2}{404} \cong 40\ (Ом)$$

Из (3) следует :

$$L = \frac{R}{\omega \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{R}{2\pi\nu \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{40}{2\pi \cdot 50 \cdot \operatorname{tg}\pi/3} = 0{,}074\ (Гн)$$

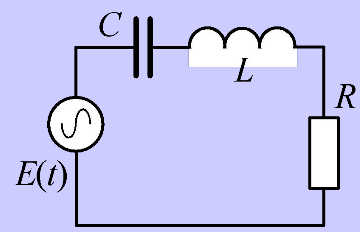
А6. (В.14.28) В цепь переменного тока напряжением $E = 220$ В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = 2U_R$, а на напряжение индуктивности равно $U_L = 3U_R$.

Дано:
$E = 220$ В
$U_C = 2U_R$
$U_L = 3U_R$
U_R - ?

Закон Ома:

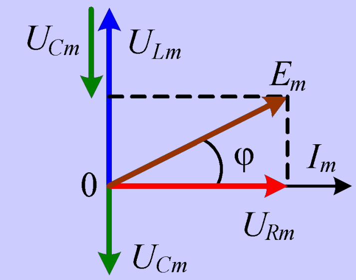
$$E(t) + E_{Si} = U_R + U_C \qquad E(t) = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt \qquad \text{(1)}$$

Подставим: $I(t) = I_m \cos\omega t$



$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t - \omega L I_m \sin\omega t + \frac{1}{\omega C} I_m \sin\omega t$$

$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos\omega t + \omega L I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$E_m \cos(\omega t + \varphi) = U_{Rm} \cos\omega t + U_{Lm} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_{Cm} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(2)}$$

Из векторной диаграммы видно, что вектор амплитуды ЭДС E_m равен векторной сумме амплитуд напряжений на элементах цепи:

$$E_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2 = U_{Rm}^2 + (3U_{Rm} - 2U_{Rm})^2 = 2U_{Rm}^2 \;\Rightarrow\; E_m^2 = 2U_{Rm}^2$$

$$E^2 = 2U_R^2 \;\Rightarrow\; U_R = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{220}{\sqrt{2}} = 156\ (B)$$