

# Задание №15: делимость чисел

Время выполнения: 5 минут

# Повторение: упрощение логических операций

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

Законы инверсии  
(де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Формулы

поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Закон двойного  
отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$\overline{(A \rightarrow B)} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$$

$$= (\bar{A} \vee B) \& (A \vee \bar{B})$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\bar{A} \& (A \vee B) = \bar{A} \& B$$

$$A \vee (\bar{A} \& B) = A \vee B$$

# Задача 1

# Задача 1

Обозначим через **ДЕЛ**( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

# Решение задачи 1

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

Введём обозначения:

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A)$$

$$21 = \text{ДЕЛ}(x, 21)$$

$$35 = \text{ДЕЛ}(x, 35)$$

Получаем:  $A \rightarrow (21 \vee 35)$

Упростим:  $\neg A \vee 21 \vee 35$

# Решение задачи 1

$\neg A \vee 21 \vee 35$

С учётом наших обозначений получаем:

или  $x$  **не** делится на  $A$ , или  $x$  делится на 21, или  $x$  делится на 35.

Если  $x$  делится на 21, результат – истина.

Если  $x$  делится на 35, результат – истина.

Но если  $x$  не делится ни на 21, ни на 35, то чтобы результат был истиной,  $x$  также не должно делиться на  $A$ . Значит, если разложить  $A$  на множители, среди них должны быть либо 21, либо 35.

# Решение задачи 1

Требуется найти наименьшее  $A$ , среди делителей которого есть либо 21, либо 35.

Это число 21.

Ответ: 21

# Решение задачи 1

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения:  $A \rightarrow (21 \vee 35)$

2) упростили:  $\neg A \vee 21 \vee 35$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с  $A$ , во второй части выражений с  $A$  нет

$\neg A$  – первая часть

$21 \vee 35$  – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$$\neg(21 \vee 35) = \neg 21 \wedge \neg 35$$



# Решение задачи 1

5) По условию задачи требуется найти минимальное  $A$ , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное  $A$ , что если выполняется  $\neg 21 \wedge \neg 35$ , то выполняется и  $\neg A$ .

**$X$  не делится на 21 и  $X$  не делится на 35.** Минимальное  $A$ , на которое не делится  $X$ , равно 21. Это и есть ответ.

# Задача 2

## Задача 2

Обозначим через **ДЕЛ**( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

# Решение задачи 2

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

После переобозначения (см. пример обозначений в задаче 1) получаем:  
 $A \rightarrow (\neg 21 \vee 35)$

После упрощения:  
 $\neg A \vee \neg 21 \vee 35$

Т.е. или  $x$  не делится на  $A$ , или  $x$  не делится на 21, или  $x$  делится на 35.

# Решение задачи 2

$$\neg A \vee \neg 21 \vee 35$$

Если  $x$  не делится на 21, выражение истинно.

Если делится на 35, выражение истинно.

Если  $x$  делится на **21** и не делится на **35**, то чтобы выражение было истинным,  **$x$  не должно делиться на  $A$ .**

$x$  не должно делиться на  $A$ , и мы знаем, что  $x$  не делится на 35  $\Rightarrow$   $x$  не делится ни на  $5 \cdot 7$ .

$x$  делится на 21  $\Rightarrow$   $x$  делится на  $3 \cdot 7$ .

# Решение задачи 2

$x$  не делится на 35  $\Rightarrow$   $x$  не делится на  $5 \cdot 7$ .

$x$  делится на 21  $\Rightarrow$   $x$  делится на  $3 \cdot 7$ .

Нужно найти минимальное  $x$ , на которое  $x$  не будет делиться. Это 5.

Ответ: 5

# Решение задачи 2

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения:  $A \rightarrow (\neg 21 \vee 35)$

2) упростили:  $\neg A \vee \neg 21 \vee 35$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с  $A$ , во второй части выражений с  $A$  нет

$\neg A$  – первая часть

$\neg 21 \vee 35$  – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$$\neg(\neg 21 \vee 35) = 21 \wedge \neg 35$$

# Решение задачи 2

5) По условию задачи требуется найти минимальное  $A$ , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное  $A$ , что если выполняется  $21 \wedge \neg 35$ , то выполняется и  $\neg A$ .

**$X$  делится на 21 и  $X$  не делится на 35. Т.е.  $X$  делится на  $3 \cdot 7$  и не делится на  $5 \cdot 7$ .**

Минимальное  $A$ , на которое не делится  $X$ , равно 5. Это и есть ответ.



# Задача 3

## Задача 3

Обозначим через **ДЕЛ**( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наибольшего** натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

# Решение задачи 3

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

После переобозначения:

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

Упростим:

$$\neg(\neg A) \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

**Это означает, что или  $x$  делится на  $A$ , или  $x$  не делится ни на 21, ни на 35.**

# Решение задачи 3

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$$

Если  $x$  не делится ни на 21, ни на 35, выражение истинно.

Если  $x$  делится на 21, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на  $A$ .

Если  $x$  делится на 35, то чтобы выражение было истинным, оно также должно делиться на  $A$ .

Нужно взять такое  $A$ , чтобы для любого  $x$ , делящегося или на 21, или на 35, выражение было истинным.

# Решение задачи 3

$x$  делится на 21  $\Rightarrow$   $x$  делится на  $3 \cdot 7$ .

$x$  делится на 35  $\Rightarrow$   $x$  делится на  $5 \cdot 7$ .

Если  $A = 7$ , то для любого  $x$ , делящегося или на 21, или на 35, выражение будет истинным.

Ответ: 7

# Решение задачи 3

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения:  $\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35)$

2) упростили:  $A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35)$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с  $A$ , во второй части выражений с  $A$  нет

$A$  – первая часть

$\neg 21 \wedge \neg 35$  – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$\neg(\neg 21 \wedge \neg 35) = 21 \vee 35$

# Решение задачи 3

5) По условию задачи требуется найти минимальное  $A$ , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти минимальное  $A$ , что если выполняется  $21 \vee 35$ , то выполняется и  $A$ .

**$X$  делится на 21 или  $X$  делится на 35. Т.е.  $X$  делится на  $3 \cdot 7$  или делится на  $5 \cdot 7$ . В любом случае  $X$  делится на 7.**

Минимальное  $A$ , на которое делится  $X$ , равно 7. Это и есть ответ.

# Задача 4



# Задача 4

Обозначим через **ДЕЛ**( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

# Решение задачи 4

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

После переобзначения:

$$\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4)$$

Упростим:

$$\neg A \rightarrow (\neg 6 \vee \neg 4)$$

$$\neg(\neg A) \vee (\neg 6 \vee \neg 4)$$

$$A \vee \neg 6 \vee \neg 4$$

Т.е. или  $x$  не делится на 6, или  $x$  не делится на 4, или  $x$  делится на 4.

# Решение задачи 4

$$A \vee \neg 6 \vee \neg 4$$

Если  $x$  не делится на 6, выражение истинно.

Если  $x$  не делится на 4, выражение истинно.

Если  $x$  делится и на 6, и на 4, то  $x$  также должно делиться на  $A$ , чтобы выражение было истинным.

$x$  делится на 4  $\Rightarrow x$  делиться на  $2 \cdot 2$

$x$  делиться на 6  $\Rightarrow x$  делиться на  $2 \cdot 3$

Нужно найти **наибольшее**  $A$ , на которое **гарантированно** будет делиться такое число  $x$ .  
Это число  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ .

Ответ: 12

# Решение задачи 4

Более формальный способ решения:

1) ввели обозначения:  $\neg A \rightarrow (6 \rightarrow \neg 4)$

2) упростили:  $A \vee \neg 6 \vee \neg 4$

3) разделили на две части: в первой части находится выражение с  $A$ , во второй части выражений с  $A$  нет

$A$  – первая часть

$\neg 6 \vee \neg 4$  – вторая часть

4) поставили отрицание перед второй частью:

$\neg(\neg 6 \vee \neg 4) = 6 \wedge 4$

# Решение задачи 4

5) По условию задачи требуется найти максимальное  $A$ , при котором исходная формула тождественно истинна.

Переформулируем: нужно найти максимальное  $A$ , что если выполняется  $B \wedge C$ , то выполняется и  $A$ .

**$X$  делится на 6 и  $X$  делится на 4. Т.е.  $X$  делится на  $2 \cdot 3$  и делится на  $2 \cdot 2$ .**  
 $X$  делится на  $2 \cdot 2 \cdot 3$ .

Максимальное  $A$ , на которое гарантированно делится  $X$ , равно 12. Это и есть ответ.

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

5. Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  $\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$  тождественно истинна?

6. Для какого наименьшего натурального числа  $A$  выражение  $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 18)$  тождественно истинно?

7. Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  $(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$  тождественно истинна?

8. Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула  $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \text{ДЕЛ}(x, 15))$  тождественно истинна

9. Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула  $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 12)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 42) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 12))$  тождественно истинна?

# ОТВЕТЫ

5. 18

6. 18

7. 90

8. 15

9. 7